

走化性増殖モデル方程式における定常解の 大域的構造と安定性について*

宮崎大学・工学教育研究部 辻川 亨

Tohru Tsujikawa

Faculty of Engineering, University of Miyazaki

e-mail: tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

1 導入と背景

走性を持つ生物の時間・空間パターン形成のメカニズムを解明するため反応拡散方程式が研究されてきた。特に、生物が生成する化学物質に対する走化性を持つ生物の集合メカニズムの解明に関しては、1970年代から移流項を持つ反応拡散方程式の1つである Keller-Segel 型の方程式が扱われている。一方、サルモネラ菌などのバクテリアコロニー形成をモデル化した次のような増殖項を持つ移流反応拡散方程式の研究も行われてきた ([2], [10], [18])。

$$\begin{cases} u_t = D \nabla \cdot \{\nabla u - \alpha u \nabla v\} + f(u), & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_t = d \Delta v + u - v, & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u_\nu(x, t) = 0, \ v_\nu(x, t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0, \ v(\cdot, 0) = v_0 \geq 0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 Ω は有界領域、 ν は境界 $\partial\Omega$ での単位法線ベクトル、 u と v は生物の個体群密度と化学物質の濃度を表す。方程式 (1) について、静的なものだけでなく、移流不安定化による時間・空間に関する動的なパターンの存在が数値的に知られている ([1], [8], [11], [5])。また、パターンの出現メカニズムを解明するため定常解の存在及びその安定性を含めた解の大域的構造を解明することは重要である。これまでに分岐理論、指数理論などにより局所的な空間非一様定常解の存在が示されている ([15], [17], [6])。しかし、方程式に含まれるパラメータに関する大域的解構造の依存性を示すことは難しい問題である。そこで、係数 D について、 $D \rightarrow \infty$ することで、特別な状況を設定する。このとき、(1) の定常問題に対して次のような積分条件付のスカラー方程式が形式的に得られる。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \{\nabla u - \alpha u \nabla v\} = 0, & x \in \Omega, \\ d \Delta v + u - v = 0, & x \in \Omega, \\ u \geq 0, \ v \geq 0, & x \in \Omega, \\ u_\nu(x) = v_\nu(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

そして

$$\int_{\Omega} f(u) \, dx = 0. \quad (3)$$

本稿では、増殖項を $f(u) = u(1-u)(u-a)$ ($0 < a < 1/2$) とする。このとき (1) の定常問題と (2), (3) について、次の定理が成り立つ。

*久藤 衡介 (電気通信大学) と出原 浩史 (宮崎大学) との共同研究に基づく。

定理 1. [16] ($N \leq 3$) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \infty$ を満たす任意の正の数数列 $\{D_n\}$ に対して、 $D = D_n$ としたとき (1) の定常解を (u_n, v_n) とする. このとき、 $\{D_n\}$ のある部分列 $\{D_{n'}\}$ と (2), (3) の解 (u_∞, v_∞) が存在し、かつ

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} (u_{n'}, v_{n'}) = (u_\infty, v_\infty) \quad \text{in } C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}) \quad (4)$$

が成り立つ.

この定理より十分大きな D に対して、(1) の定常解の解構造を解明するためには (2), (3) を解析すれば十分であることがわかる. 次の章では Ω を 1 次元区間として方程式 (2), (3) を考察する.

2 Shadow System の解の存在

$\Omega = (0, 1)$ について、(2) の第 1 式と境界条件から、 u は正の任意定数 E を用いて $u = Ee^{\alpha v}$ と表示される. したがって、 $g(v, E) = Ee^{\alpha v} - v$ とするとき、(2), (3) は次のような積分条件付の方程式に書き換えられる. これを (1) の定常問題の Shadow System という.

$$\begin{cases} dv_{xx} + g(v, E) = 0, & x \in (0, 1), \\ v_x(0) = v_x(1) = 0, \\ v \geq 0, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (5)$$

そして

$$\int_0^1 f(Ee^{\alpha v}) dx = 0. \quad (6)$$

そこで、(5), (6) の解を $(v(x, d, E), d, E)$ とするとき、すべての解は単調な解を用いて表示できることから、以降単調増加な解のみを扱う.

まず、(5) について、その正値定数解を調べる.

補題 2. ある正定数 $\hat{E}$ が存在して、 $0 < E < \hat{E}$ に対して、(5) は 2 つの正値定数解 $v_*(E)$, $v^*(E)$ を持ち、 $v_*(E)$ と $v^*(E)$ は $v_*(E) < v^*(E)$ と $v_*(\hat{E}) = v^*(\hat{E})$ を満たす.

(5) の単調増加な解の存在について、分岐理論により次の補題が成り立つ ([12], [13], [14]).

補題 3. $0 < E < \hat{E}$ に対して、 $\lim_{E \rightarrow 0} d^*(E) = \infty$, $\lim_{E \rightarrow \hat{E}} d^*(E) = 0$ を満たす単調減少関数 $d^*(d)$ が存在する. このとき、 $0 < E < \hat{E}$, $0 < d < d^*(E)$ に対して、(5) の解 $v(x, d, E)$ が存在して

$$\lim_{d \rightarrow d^*(E)} v(x, d, E) = v^*(E), \quad \lim_{d \rightarrow 0} v(x, d, E) = v^B(x, E) = \begin{cases} v_*(E) & 0 \leq x < 1 \\ \bar{v}(E) & x = 1 \end{cases} \quad (7)$$

が成り立つ. ここで、 $\bar{v}(E)$ は $v^*(E) < \bar{v}(E)$ を満たすある定数である.

$\Lambda := \{(d, E) \mid 0 < E < \hat{E}, 0 < d < d^*(E)\}$ とするとき、Shi [13] 等の結果を適応するとパラメータ領域 Λ 以外では非定数解が存在しないことが示される. (5), (6) の単調増加な解の全体を $\Gamma := \{(v(x, d, E), d, E) \mid (d, E) \in \Lambda \text{ に対して } v(x, d, E) \text{ は (5), (6) の解である}\}$ とするとき、定常解の存在に関する次の定理が成り立つ.

定理 4. [7] 正定数 a と 1 に依存した 2 つの定数 $0 < E_a, E_1 < \hat{E}$ が存在して、つぎのことが成り立つ.

(i) $1/\alpha < a$, 1 のとき、 E_a, E_1 は関係式 $E_1 < E_a$ を満たし、区間 (E_1, E_a) で定義された関数 $d(E)$ が存在して、 $(v(x, d(E), E), d(E), E) \in \Gamma$ となる. その上、

$$\lim_{E \rightarrow E_1} v(x, d(E), E) = v^*(E_1), \quad \lim_{E \rightarrow E_a} v(x, d(E), E) = v^*(E_a) \quad (8)$$

が成り立つ.

(ii) $a < 1/\alpha < 1$ のとき、区間 (E_1, E_a) 又は区間 (E_a, E_1) で定義された関数 $d(E)$ が存在して、 $(v(x, d(E), E), d(E), E) \in \Gamma$ となる. その上、

$$\lim_{E \rightarrow E_1} v(x, d(E), E) = v^*(E_1), \quad \lim_{E \rightarrow E_a} v(x, d(E), E) = v^B(x, E_a) \quad (9)$$

が成り立つ.

(iii) $1/\alpha > a, 1$ のとき、 E_a, E_1 は関係式 $E_a < E_1$ を満たし、区間 (E_a, E_1) で定義された関数 $d(E)$ が存在して、 $(v(x, d(E), E), d(E), E) \in \Gamma$ となる. その上、

$$\lim_{E \rightarrow E_1} v(x, d(E), E) = v^B(x, E_1), \quad \lim_{E \rightarrow E_a} v(x, d(E), E) = v^B(x, E_a) \quad (10)$$

が成り立つ.

また、非定数解の非存在に関連して、[16] の結果を用いることにより、 Λ の原点を除いた、 $E = 0$ の近傍に解が存在しないことが示されている. 一方、定理 4 の証明から α, a を固定するとき、ある正定数 $\bar{E}$ が存在して $0 < E < \bar{E}$ に対して、 $d > 0$ を十分小さく選べば、(5), (6) の解は存在しないことが示される. したがって、次の結果が得られる.

定理 5. [7] 原点近傍の (d, E) に対して、 $(v(x, d, E), d, E) \in \Gamma$ となる解が存在しないと仮定すれば、定理 4 で得られた解について、解集合 Γ はほとんどすべての $0 < \alpha$ について、連続な曲線として表示される.

3 分岐解曲線の分岐方向

この章では定理 4 で得られた解について、定数解からの (第一モードに関する) 分岐点近傍での解曲線の分岐方向を調べる. 定数解 (v^*, d^*, E^*) の近傍での分岐解が、十分小さいパラメータ s に関して次の形で展開されたとする.

$$\begin{cases} v = v^* + s \cos \pi x + s^2 \phi_2 + s^3 \phi_3 + \cdots \\ d = d^* + s d_1 + s^2 d_2 + s^3 d_3 + \cdots \\ E = E^* + s \eta_1 + s^2 \eta_2 + s^3 \eta_3 + \cdots \end{cases} \quad (11)$$

定理 4 の (i), (ii) において、 (v^*, d^*, E^*) は $(v^*(E_a), d^*(E_a), E_a)$ または $(v^*(E_1), d^*(E_1), E_1)$ であることに注意する. (11) を (2), (3) に代入する. ここで、 $\phi_i \in \{\phi \in C^2(0, 1); \phi_x(1) = \phi_x(1) = 0, \langle \phi, \cos \pi x \rangle = 0\}$ ($i = 2, 3, \dots$) とする. ただし、内積を $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ と定義する.

十分小さい s に関して、(2) から次のような関係式が得られる.

$O(1)$:

$$E^* e^{\alpha v^*} - v^* = 0, \quad (12)$$

$O(s)$:

$$(-d^* \pi^2 + \alpha E^* e^{\alpha v^*} - 1) \cos \pi x + \eta_1 e^{\alpha v^*} = 0, \quad (13)$$

$$d^* = (\alpha E^* e^{\alpha v^*} - 1) / \pi^2, \quad \eta_1 = 0, \quad (14)$$

$O(s^2)$:

$$d^* \phi_{2xx} + (\alpha - 1) \phi_2 - d_1 \pi^2 \cos \pi x + \frac{1}{2} \alpha^2 \cos^2 \pi x + \eta_2 e^{\alpha v^*} = 0, \quad (15)$$

$$\int_0^1 (15) dx = (\alpha - 1)\langle \phi_2, 1 \rangle + \eta_2 e^{\alpha v^*} + \frac{\alpha^2}{4} = 0, \quad (16)$$

$$\int_0^1 (15) \times \cos \pi x dx = d^* \langle \phi_{2xx}, \cos \pi x \rangle - \frac{d_1}{2} \pi^2 = -\frac{d_1}{2} \pi^2 = 0, \quad (17)$$

$$d_1 = 0, \quad (18)$$

$O(s^3)$:

$$d^* \phi_{3xx} + (\alpha - 1)\phi_3 + (-d_2 \pi^2 + \alpha^2 \phi_2 + \alpha \eta_2 e^{\alpha v^*}) \cos \pi x + \frac{\alpha^3}{6} \cos^3 \pi x + \eta_3 e^{\alpha v^*} = 0 \quad (19)$$

$$\int_0^1 (19) dx = (\alpha - 1)\langle \phi_3, 1 \rangle + \eta_3 e^{\alpha v^*} = 0 \quad (20)$$

$$\int_0^1 (19) \times \cos \pi x dx = \alpha^2 \langle \phi_2, \cos^2 \pi x \rangle - \frac{d_2}{2} \pi^2 + \frac{\eta_2}{2} e^{\alpha v^*} + \frac{\alpha^3}{16} = 0 \quad (21)$$

$$\int_0^1 (19) \times \cos 2\pi x dx = d^* \langle \phi_{2xx}, \cos 2\pi x \rangle + (\alpha - 1)\langle \phi_2, \cos 2\pi x \rangle + \frac{\alpha^2}{2} \langle \cos^2 \pi x, \cos 2\pi x \rangle = 0 \quad (22)$$

$$\langle \phi_{2xx}, \cos 2\pi x \rangle = -4\pi^2 \langle \phi_2, \cos 2\pi x \rangle, \quad \langle \cos^2 \pi x, \cos 2\pi x \rangle = \frac{1}{4} \quad (23)$$

(14), (22), (23) から、

$$\langle \phi_2, \cos 2\pi x \rangle = \frac{\alpha^2}{8(4\pi^2 d^* - \alpha + 1)} = \frac{\alpha^2}{24(\alpha - 1)} \quad (24)$$

そして (21), (24) から

$$d_2 = \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{\alpha^4}{48(\alpha - 1)} + \frac{\alpha^3}{16} + \frac{\alpha^2}{2} \langle \phi_2, 1 \rangle + \frac{\alpha}{2} \eta_2 e^{\alpha v^*} \right\} \quad (25)$$

が得られる.

一方、(11) を (6) に代入することで、次の関係式も得られる.

$O(1)$:

$$(1 - E^* e^{\alpha v^*})(E^* e^{\alpha v^*} - a) = 0, \quad (26)$$

$O(s)$:

$$\left\{ (1 - E^* e^{\alpha v^*})(E^* e^{\alpha v^*} - a) + E^* e^{\alpha v^*} (1 + a - 2E^* e^{\alpha v^*}) \right\} \langle \cos \pi x, 1 \rangle = 0, \quad (27)$$

$O(s^2)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(2(1+a)E^* e^{\alpha v^*} - a - 3(E^* e^{\alpha v^*})^2) \langle \phi_2, 1 \rangle - (2E^* e^{\alpha v^*} - a - 1)\eta_2 e^{\alpha v^*} \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{4}(4E^* e^{\alpha v^*} + 4aE^* e^{\alpha v^*} - 9(E^* e^{\alpha v^*})^2 - a). \end{aligned} \quad (28)$$

まず、 $(v^*(E_1), d^*(E_1), E_1)$ の場合を扱う. したがって、 $E^* e^{\alpha v^*} = 1$ が成り立ち

$$\alpha(1-a)\langle \phi_2, 1 \rangle + (1-a)\eta_2 e^{\alpha v^*} + \frac{\alpha^2}{4}(5-3a) = 0. \quad (29)$$

(16), (29) から

$$\begin{bmatrix} e^{\alpha v^*} & \alpha - 1 \\ (1-a)e^{\alpha v^*} & \alpha(1-a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \langle \phi_2, 1 \rangle \end{bmatrix} = -\frac{\alpha^2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 5-3a \end{bmatrix} \quad (30)$$

が得られる。一方、

$$\langle \phi_2, 1 \rangle = \frac{\alpha^2(a-2)}{2(1-a)}, \quad \eta_2 e^{\alpha v^*} = \frac{\alpha^2(4\alpha - 2a\alpha + 3a - 5)}{4(1-a)} \quad (31)$$

より、 d_2 の表現式は

$$d_2 = \frac{\alpha^3(14a\alpha - 26\alpha - 15a + 27)}{24\pi^2(\alpha - 1)(1-a)} \quad (32)$$

となる。

$\alpha_1 = (15a - 27)/(14a - 26)$ とすれば、 $\alpha_1 < \alpha$ のとき $d_2 < 0$ 、そして $(\alpha_1 > \alpha)$ のとき $d_2 > 0$ となる。したがって、 $d_1 = 0$ より、分岐の向きは d_2 の符号で決定されることから、 $\alpha_1 < \alpha$ のとき超臨界型、 $\alpha_1 > \alpha$ のとき亜臨界型となる。

次に $(v^*(E_a), d^*(E_a), E_a)$ を扱う。このとき、 $E^* e^{\alpha v^*} = a$ が成り立つ。

$$\alpha(1-a)a\langle \phi_2, 1 \rangle + (1-a)\eta_2 e^{\alpha v^*} + \frac{\alpha^2}{4}a(3-5a) = 0 \quad (33)$$

(16), (33) から

$$\begin{bmatrix} e^{\alpha v^*} & \alpha - 1 \\ (1-a)e^{\alpha v^*} & \alpha a(1-a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \langle \phi_2, 1 \rangle \end{bmatrix} = -\frac{\alpha^2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ a(3-5a) \end{bmatrix} \quad (34)$$

が得られる。したがって、

$$\langle \phi_2, 1 \rangle = -\frac{\alpha^2(4a-1-5a^2)}{4(1-a)(a\alpha-\alpha+1)}, \quad \eta_2 e^{\alpha v^*} = -\frac{\alpha^2 a(3-2\alpha-5a+4a\alpha)}{4(1-a)(a\alpha-\alpha+1)} \quad (35)$$

より、 d_2 の表現式として

$$d_2 = \frac{\alpha^3((2a^2-4a+2)\alpha^2 + (1-16a-3a^2)\alpha - 30a^2 + 21a - 3)}{24\pi^2(\alpha-1)(1-a)(a\alpha-\alpha+1)} \quad (36)$$

以上の計算は形式的なものではあるが、局所分岐理論 [3] により分岐曲線の分岐点近傍での存在と分岐の向きを求めることができる [7]。

4 数値計算とまとめ

この章では分岐曲線を追跡するソフト AUTO を用いて、第 2 章と 3 章の結果を数値的に確認する。 $a = 0.25$ とすれば、定理 4 の (i), (ii), (iii) の結果は図 1 (a), 図 1 (b) と図 2 (a) そして図 2 (b) にそれぞれ対応する。また、図 1, 2 の縦の破線は定数解である。定理 5 のなかで、 Γ に含まれる原点近傍では非一様定常解が存在しないことを仮定したが、図 1, 2 からこの仮定が正しいことが予想される。一方、増殖項が $f(u) = u(1-u)$ の場合、この仮定が正しいことを証明した [17]。

第 3 章の結果から、 d_2 の符号が変わる α の値は $\alpha_1 = 1.033 \dots$ となり、 $\alpha_1 < 1.05$ のとき超臨界型、そして $\alpha_1 > 1.02$ のとき亜臨界型となる。(図 3 参照)

(1) に対応する Shadow System は

$$\begin{cases} \left(\int_0^1 E e^{\alpha v} dx \right)_t = \int_0^1 f(E e^{\alpha v}) dx, & t > 0 \\ v_t = dv_{xx} + g(v, E), & x \in (0, 1), t > 0 \\ v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (37)$$

である。そこで [4] の結果から分岐点近傍の分岐解の安定性も d_2 の符号を用いて議論が可能であり、[7] の中で示す。

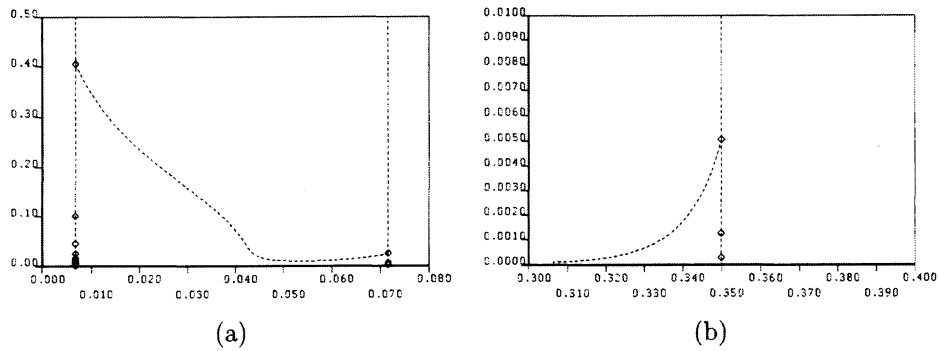


図 1: 横軸と縦軸はそれぞれ E と d である. (a) $\alpha = 5.0$, (b) $\alpha = 1.05$ とする.

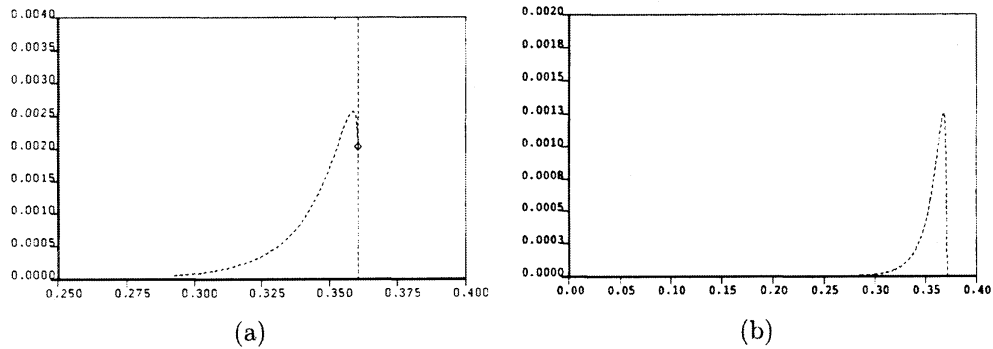


図 2: 軸は図 1 と同じとする. (a) $\alpha = 1.02$, (b) $\alpha = 0.99$ とする.

参考文献

- [1] M. Aida, A. Yagi, Target pattern solutions for chemotaxis-growth system, *Math. Sci. Jpn.*, **59** (2004), 577-590.
- [2] W. Alt and D. A. Lauffenburger, Transient behavior of a chemotaxis system modeling certain types of tissue inflammation, *J. Math. Biol.*, **24** (1987), 691-722.
- [3] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *Journal of Functional Analysis*, **8** (1971), 321-340.
- [4] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **52** (1973), 161-180.
- [5] S.-I. Ei, H. Izuhara and M. Mimura, Spatio-temporal oscillations in the Keller-Segel system with logistic growth, *Physica D*, **277** (2014), 1-21.
- [6] C. Gai, Q. Wang and J. Yan, Qualitative analysis of stationary Keller-Segel chemotaxis models with logistic growth, preprint.
- [7] H. Izuhara, K. Kuto and T. Tsujikawa, Bifurcation structure of stationary solutions for a chemotaxis system with bistable growth, preprint.

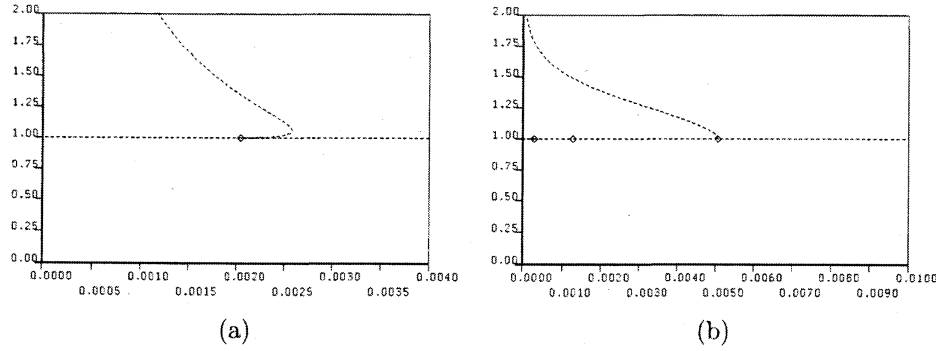


図 3: 横軸は d 、縦軸は $\max_{x \in (0,1)} v(x)$ である. (a) $\alpha = 1.02$, (b) $\alpha = 1.05$ とする.

- [8] K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai, T. Tsujikawa, Spatial pattern in a chemotaxis-diffusion-growth model, *Physica D*, **241** (2012), 1629-1639.
- [9] K. Kuto and T. Tsujikawa, Bifurcation structure of steady-states for bistable equations with nonlocal constraint, *Discrete Conti. Dynami. Systems, Supplement* (2013), 455-464.
- [10] M. Mimura and T. Tsujikawa, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, *Physica A*, **230** (1996), 499-543.
- [11] K. J. Painter and T. Hillen, Spatio-temporal chaos in a chemotaxis model, *Physica D*, **240** (2011), 363-375.
- [12] R., Schaaf, Global solution branches of two-point boundary value problems, *Lecture Notes in Mathematics*, 1458, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [13] J. Shi, Semilinear Newmann boundary value problems on a rectangle, *Trans. AMS*, **354** (2002), 3117-3154.
- [14] J. Smaller and A. Wasserman, Global bifurcation of steady-state solutions, *J. Differential Equations*, **39** (1981), 269-290.
- [15] J. I. Tello and M. Winkler, A chemotaxis system with logistic source, *Comm. Partial Differential Equations*, **35** (2007), 849-877.
- [16] T. Tsujikawa, Stationary problem of a simple chemotaxis-growth model, *RIMS Kokyuroku*, **1924** (2014), 55-63.
- [17] T. Tsujikawa, K. Kuto, Y. Miyamoto and H. Izuhara, Stationary solutions for some shadow system of the Keller-Segel model with logistic source, to appear in *DCDS-S*, 2014.
- [18] D. E. Woodward, R. Tyson, M. R. Myerscough, J. B. Murray, E. O. Budrene, B. O. Berg, Spatio-temporal patterns generated by *Salmonella typhimurium*, *Biophys.*, **68** (1995), 2181-2189.