

Functional equation for the Mordell-Tornheim multiple zeta-function

Takuya Okamoto

Department of Human Science and Common Educate, Nippon
Institute of Technology

Tomokazu Onozuka

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 Introduction

Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数とは次のように定義される関数である。

$$\zeta_{MT,r}(s_1, \dots, s_r; s_{r+1}) := \sum_{m_1, \dots, m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_r^{s_r} (m_1 + \cdots + m_r)^{s_{r+1}}} \quad (1.1)$$

この級数は次の不等式を満たす領域において絶対収束する。

$$\Re s_{k_1} + \Re s_{r+1} > 1 \quad (1 \leq k_1 \leq r)$$

$$\Re s_{k_1} + \Re s_{k_2} + \Re s_{r+1} > 2 \quad (1 \leq k_1 < k_2 \leq r)$$

...

$$\Re s_{k_1} + \Re s_{k_2} + \cdots + \Re s_{k_{r-1}} + \Re s_{r+1} > r - 1 \quad (1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{r-1} \leq r)$$

$$\Re s_1 + \Re s_2 + \cdots + \Re s_{r+1} > r$$

また、この関数は $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間内に有理型に接続されることが知られている [1]。

この形の級数について、おそらく最初に研究したのが Tornheim [4] である。Tornheim は各変数が整数のとき $\zeta_{MT,2}$ の値についての研究を行った。その後 Mordell [3] も同様に $r = 2$ で $s_1 = s_2 = s_3$ の場合について、値を研究を行った。これらの先駆的な研究により級数 (1.1) には Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数という名前が付けられている。

2 多重ゼータ関数の関数等式

タイトルにもある関数等式についてであるが、多重ゼータ関数の関数等式はまだあまり研究されていない。既に行われている研究としては松本の [2] が挙げられる。松本は [2] において Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数についての関数等式を与えた。(実際には Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数にパラメーターを付け加えて一般化した関数についての関数等式を与えている。) Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数とは次のように定義される関数である。

$$\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) := \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}}$$

この級数は 2 つの不等式 $\Re s_2 > 1$, $\Re s_1 + \Re s_2 > 2$ を満たす領域において絶対収束し、 $\mathbb{C}^2$ 空間に有理型に接続されることが知られている。この関数に対して松本は次の関数等式を与えた。

Theorem 2.1. ([2] THEOREM 1)

複素数 u, v に対して次の等式が成り立つ。

$$\frac{g(u, v)}{(2\pi)^{u+v-1}\Gamma(1-u)} = \frac{g(1-v, 1-u)}{i^{u+v-1}\Gamma(v)} + 2i \sin\left(\frac{\pi}{2}(u+v-1)\right) F_+(u, v) \quad (2.1)$$

ただし関数 $F_+(u, v)$, $g(u, v)$ はそれぞれ次のように定義される。

$$F_+(u, v) := \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{u+v-1}(k) \Psi(v, u+v; 2\pi i k) \quad (2.2)$$

$$g(u, v) := \zeta_{EZ,2}(u, v) - \frac{\Gamma(1-u)}{\Gamma(v)} \Gamma(u+v-1) \zeta(u+v-1) \quad (2.3)$$

また (2.2) と (2.3) の定義では約数関数 $\sigma_l(k) := \sum_{d|k} d^l$ と合流型超幾何関数

$$\Psi(a, c; x) := \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty e^{i\phi}} e^{-xy} y^{a-1} (1+y)^{c-a-1} dy$$

を用いた。 $(\Re a > 0, -\pi < \phi < \pi, |\phi + \arg x| < \pi/2)$

関数 (2.2) はそのままでは不等式 $\Re u < 0$, $\Re v > 1$ を満たす領域でしか収束しないが、 $\mathbb{C}^2$ 空間上まで有理型に接続できるため、関数 $F_+(u, v)$ は $\mathbb{C}^2$ 上で定義されることに注意しておく。

定理 2.1 の式 (2.1) はそのままでは Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の関数等式とは分かりにくい、実際に Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の関数等式となっている。式 (2.1) の左辺と右辺第 1 項を見比べてみると、関数 $g(u, v)$ には 2 点 (u, v) と $(1-v, 1-u)$ の間に関係があることが見てとれる。これにより式 (2.1) は $g(u, v)$ の関数等式になっていることが分かるが、 $g(u, v)$ は Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数を少し変形したものになっているので、式 (2.1) は Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の関数等式と考えられる。

この関数等式の証明を応用して得られたのが今回の主結果である Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の関数等式である。ここからはその結果について述べる。そのための準備としていくつかの関数を定義する。まず約数関数のある種の一般化として次の 2 つの約数関数を定義する。

$$\sigma_a(\ell_1, \dots, \ell_r) := \sum_{d|\ell_1, \dots, d|\ell_r} d^a$$

$$\sigma_{MT,r}(s_1, \dots, s_r, s_{r+1}; \ell_1, \dots, \ell_r) := \sum_{d_1|\ell_1, \dots, d_r|\ell_r} d_1^{s_1} \cdots d_r^{s_r} (d_1 + \cdots + d_r)^{s_{r+1}}$$

ただし $\ell_1, \dots, \ell_r$ は正の整数とし a は複素数とする。また Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の関数等式では関数 $F_+(u, v)$ と $g(u, v)$ を用いたが、その Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数版として $F_r^\pm(s_1, \dots, s_{r+1})$ と $g_r(s_1, \dots, s_{r+1})$ をそれぞれ次のように定義する。

$$F_r^\pm(s_1, \dots, s_{r+1}) = \sum_{\ell_1, \dots, \ell_{r-1}=1}^{\infty} \frac{\sigma_{s_1+\dots+s_{r+1}-1}(\ell_1, \dots, \ell_{r-1})}{\ell_1^{s_1} \cdots \ell_{r-1}^{s_{r-1}}} \times \Psi(s_{r+1}, s_r + s_{r+1}; \pm 2\pi i(\ell_1 + \cdots + \ell_{r-1})) \quad (2.4)$$

$$g_r(s_1, \dots, s_{r+1}) := \zeta_{MT,r}(s_1, \dots, s_r; s_{r+1}) - \frac{\Gamma(1-s_r)\Gamma(s_r+s_{r+1}-1)}{\Gamma(s_{r+1})} \zeta_{MT,r-1}(s_1, \dots, s_{r-1}; s_r+s_{r+1}-1) \quad (2.5)$$

ただし $h(z) = 1/(e^z - 1) - 1/z$ とする。上の式 (2.4) の右辺の級数は不等式 $\Re s_j > 1$ ($j = 1, 2, \dots, r-1$)、 $\Re s_r < 0$, $\Re s_{r+1} > 0$ を満たす範囲でし

が絶対収束しないが、 $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間上に有理型に接続できるため 関数 $F_r^\pm$ は $\mathbb{C}^{r+1}$ 上で定義されることに注意しておく。

以上の準備の下、Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の関数等式は次の定理のように表せる。

Theorem 2.2.

次の関数等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 & \frac{g_r(-s_1, \dots, -s_{r-1}, 1-s_{r+1}, 1-s_r)}{i^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(s_{r+1})} \\
 & + e^{\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)} F_r^+(s_1, \dots, s_{r+1}) + e^{-\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)} F_r^-(s_1, \dots, s_{r+1}) \\
 & = \frac{g_r(s_1, \dots, s_{r-1}, s_r, s_{r+1})}{(2\pi)^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(1-s_r)} \\
 & + e^{-\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)} \sum_{\ell_1, \dots, \ell_{r-1}=1}^{\infty} \sigma_{MT, r-1}(s_1, \dots, s_{r-1}, s_r + s_{r+1} - 1; \ell_1, \dots, \ell_{r-1}) \\
 & \times \left\{ \Psi(s_{r+1}, s_r + s_{r+1}; 2\pi i(\ell_1 + \dots + \ell_{r-1})) \right. \\
 & \quad \left. + \Psi(s_{r+1}, s_r + s_{r+1}; -2\pi i(\ell_1 + \dots + \ell_{r-1})) \right\}
 \end{aligned}$$

上の定理 2.2 は定理 2.1 と同様に、一見 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の関数等式には見えないかもしれない。しかし、定理 2.2 の式の両辺の第 1 項を見比べてみると、関数 $g_r(s_1, \dots, s_{r+1})$ には 2 点 $(s_1, \dots, s_{r-1}, s_r, s_{r+1})$ と $(-s_1, \dots, -s_{r-1}, 1-s_{r+1}, 1-s_r)$ の間に関係があることが分かり、更に式 (2.5) より $g_r(s_1, \dots, s_{r+1})$ は Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数を少し変形したものだったので、確かに Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の関数等式になっていることが分かる。

3 2つの関数等式の関係

定理 2.2 は $r = 2$ のとき定理 2.1 の一般化となっている。実際、定理 2.2 において $r = 2$ とおいて $(s_1, s_2, s_3) = (0, u, v)$ を代入すると定理 2.1 が得られる。このことを非常に簡単にではあるが見てみよう。

$r = 2$ のとき関数 $g_2(s_1, s_2, s_3)$ は次のようになる。

$$g_2(s_1, s_2, s_3) = \zeta_{MT, 2}(s_1, s_2; s_3) - \frac{\Gamma(1-s_2)\Gamma(s_2+s_3-1)}{\Gamma(s_3)} \zeta_{MT, 1}(s_1; s_2+s_3-1)$$

この式に Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の定義からすぐに得られる 2 つの関係式 $\zeta_{MT,2}(0, s_1; s_2) = \zeta_{EZ,2}(s_1, s_2)$ と $\zeta_{MT,1}(0; s_1 + s_2 - 1) = \zeta(s_1 + s_2 - 1)$ を用いれば

$$g_2(0, u, v) = g(u, v) \quad (3.1)$$

となることが分かる。同様に次の 2 つの関係式も簡単に得ることができる。

$$F_2^\pm(0, u, v) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sigma_{u+v-1}(\ell) \Psi(v, u+v; \pm 2\pi i \ell) \quad (3.2)$$

$$\sigma_{MT,1}(0, u+v-1; \ell) = \sigma_{u+v-1}(\ell) \quad (3.3)$$

これらの式 (3.1)、(3.2)、(3.3) を定理 2.2 に代入すると定理 2.1 を得ることができる。

参考文献

- [1] K. Matsumoto, *On analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in: M. A. Bennett et al.(Eds), *Number Theory for the Millennium II*, Proc. Millennial Conference on Number Theory, A K Peters, Wellesley, 2002, pp. 417–440.
- [2] K. Matsumoto, *Functional equation for double zeta-functions*, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **136** (2004), 1–7.
- [3] L. J. Mordell, *On the evaluation of some multiple series*, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 368–371.
- [4] L. Tornheim, *Harmonic double series*, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 303–314.

Takuya Okamoto

Department of Human Science and Common Educate

Nippon Institute of Technology

4-1 Gakuendai Miyashiro-machi, Saitama-gun, Saitama 345-8501

Japan

E-mail: takuyaoka@nit.ac.jp,

Tomokazu Onozuka

Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
E-mail: m11022v@math.nagoya-u.ac.jp