

Lens space の DS-diagram について

上智大理工 横山和夫 (Kazuo Yokoyama)

前回、京都大学数理解析研究所講究録 542、「DS-diagram の基本変形 II」 ([4]) において、特別な Lens space $L(p, g)$ の DS-diagram について述べたが、ここでは全ての Lens space $L(p, g)$ に対する DS-diagram の“標準形”なるものを与える。

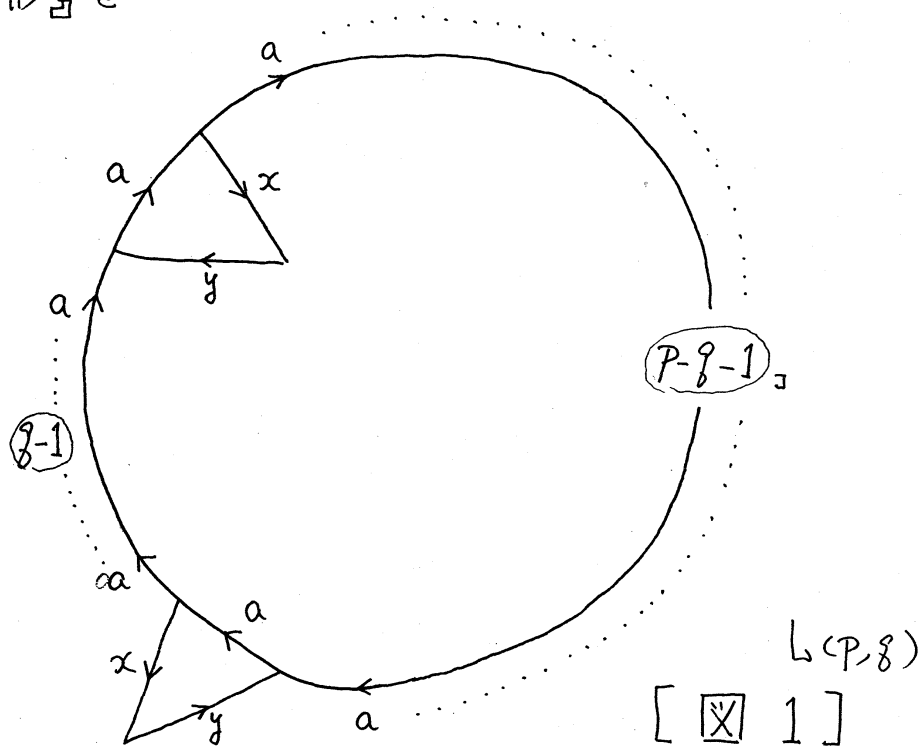
そして、与えられた p と g から $S_3(P)$ (ここに P は上の DS-diagram から定まる $L(p, g)$ の fake surface を表わし $S_3(P)$ e.t.c. 詳しい定義、記号は [1] を参照) の点の数を計算することによって、 $S_3(L(p, g))$ を上からおさえる式 (定理 4, 命題 5) を求める。そして予想として「その式は = である」と思われる。

<注> DS-diagram, polygon 等は S^2 上 diagram ([5] 参照) であるが、ここでは図で表わすときは、その polygon の 1 つの 2-gram 上の点をとって、平面 $\mathbb{R}^2$ 上の diagram

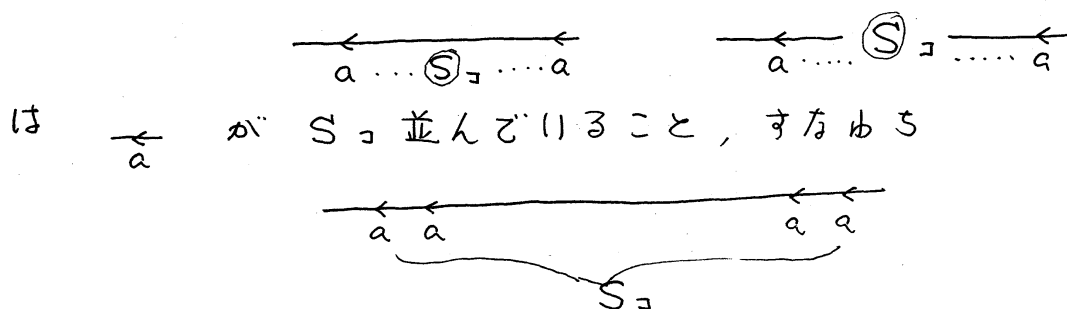
(図形)として書く。

§ 1 polygram (特に Lens space の polygram) の基本変形にかんする基本命題.

今後 polygram (詳しいことは [5] をみられたい) のみを使うものとする。まず Lens space $L(p, q)$ の polygram の『基本形』を



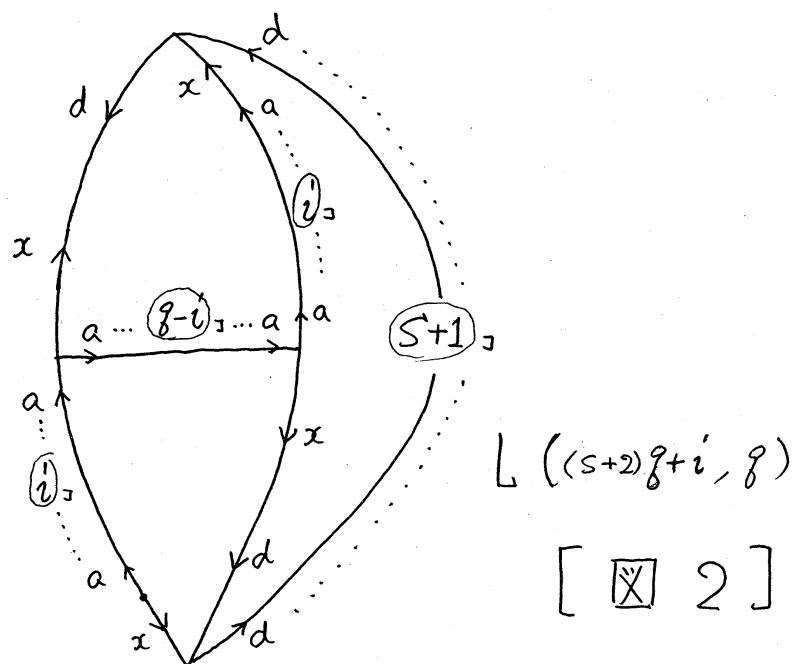
としておく。但し



をまわす。また上の polygram から定まる 3 次元多様体が Lens space $L(p, g)$ であると理解してもらってもよい。

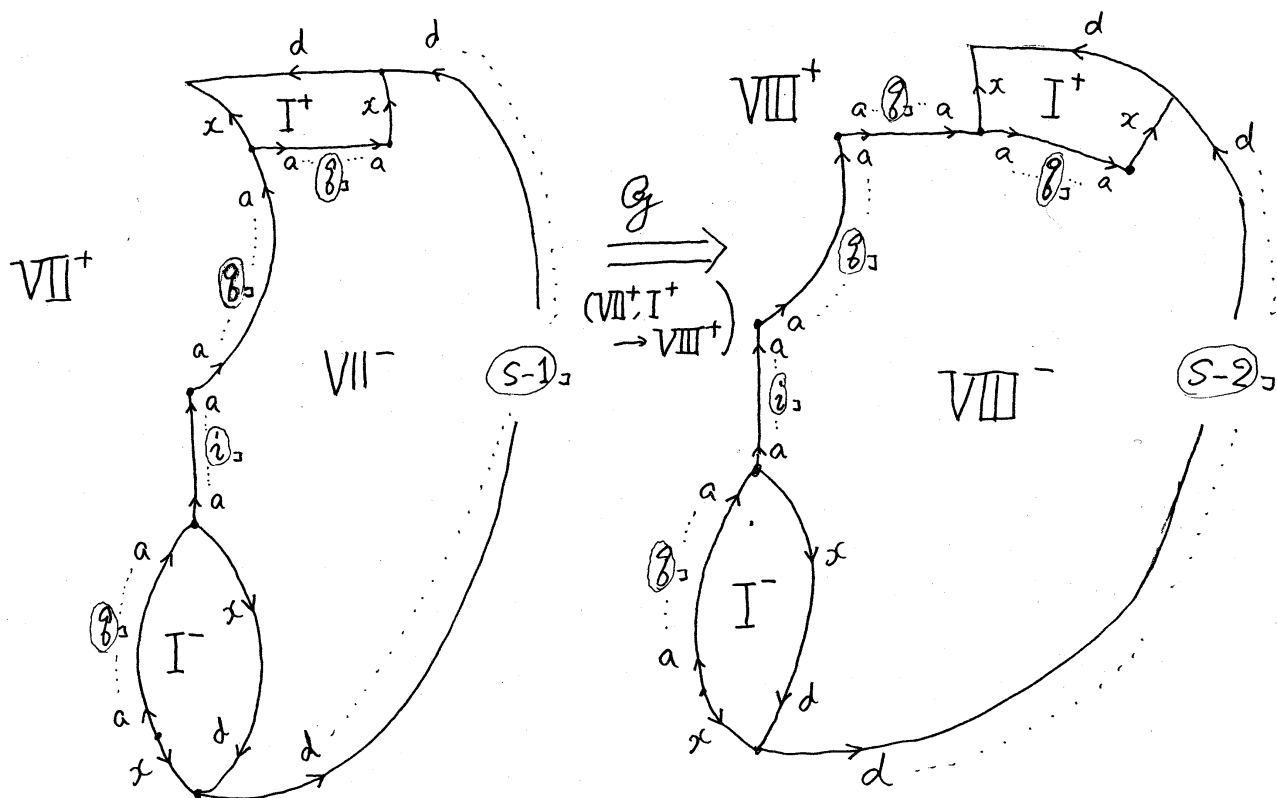
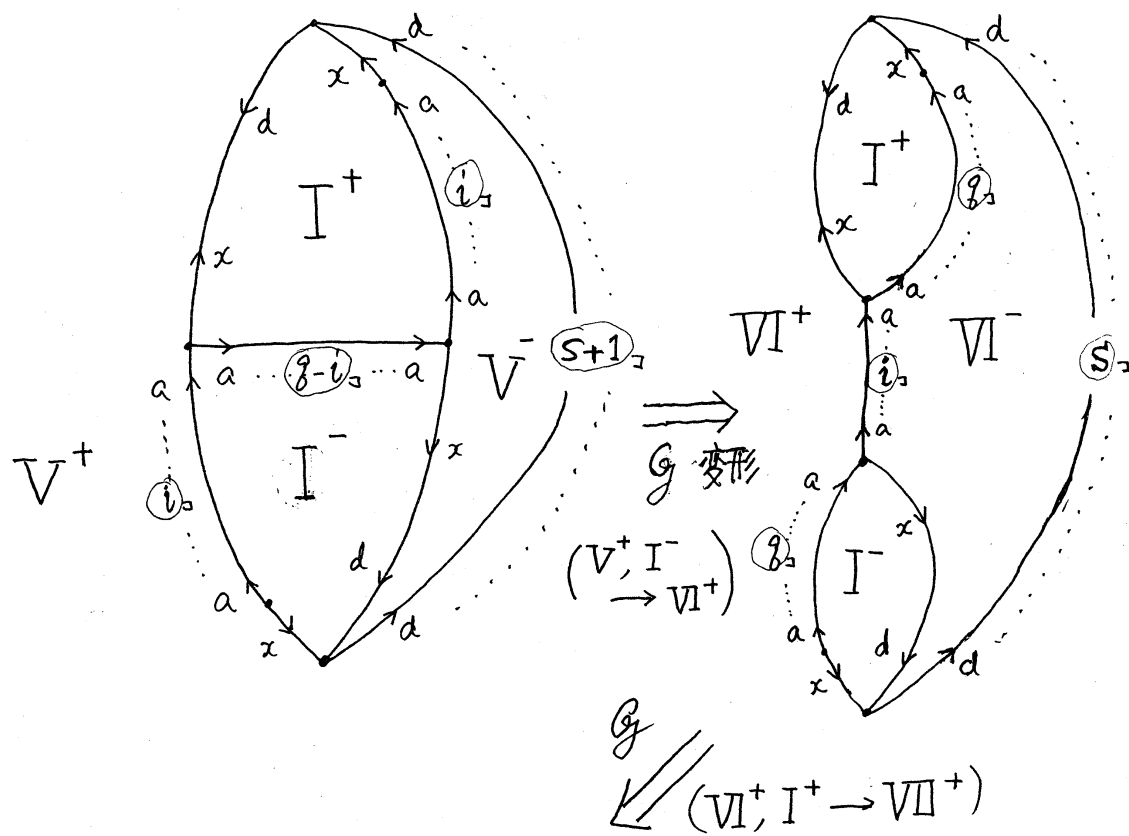
次に, polygram の基本変形 ([5] の p23) を使って, 種々の polygram の変形 (β -変形) に関する補題を述べておこう。まず

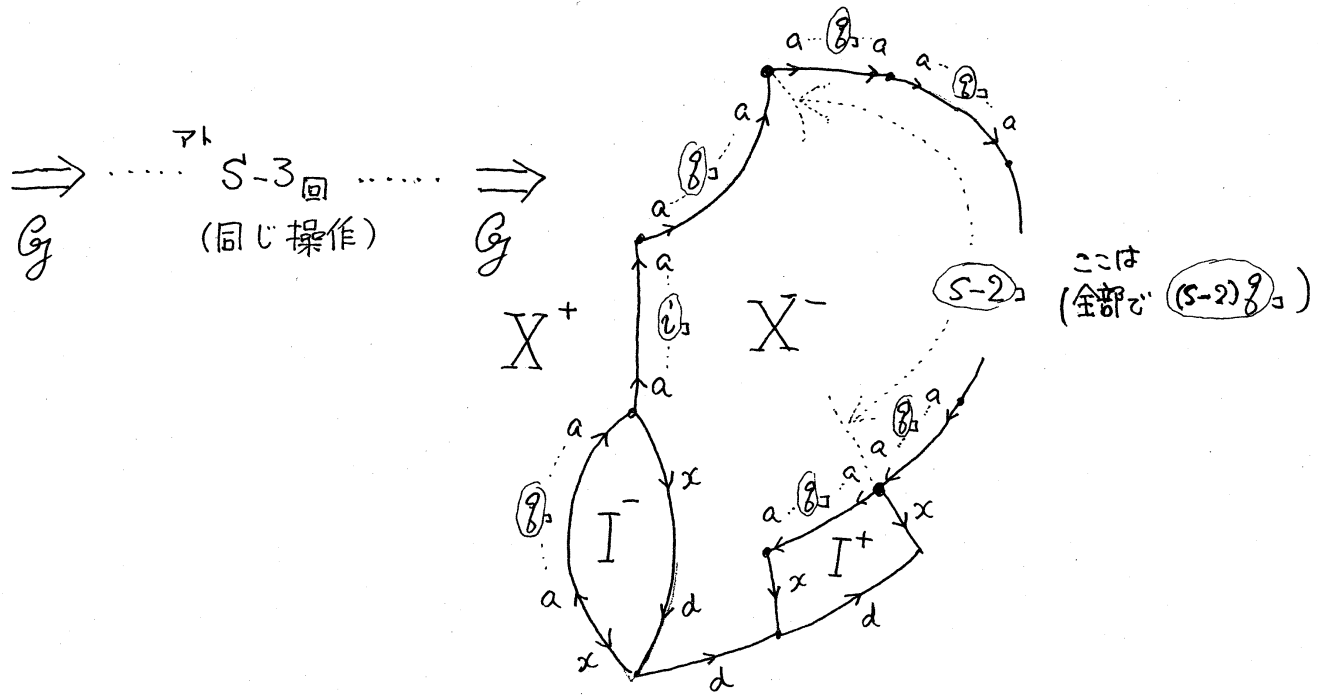
補題 1



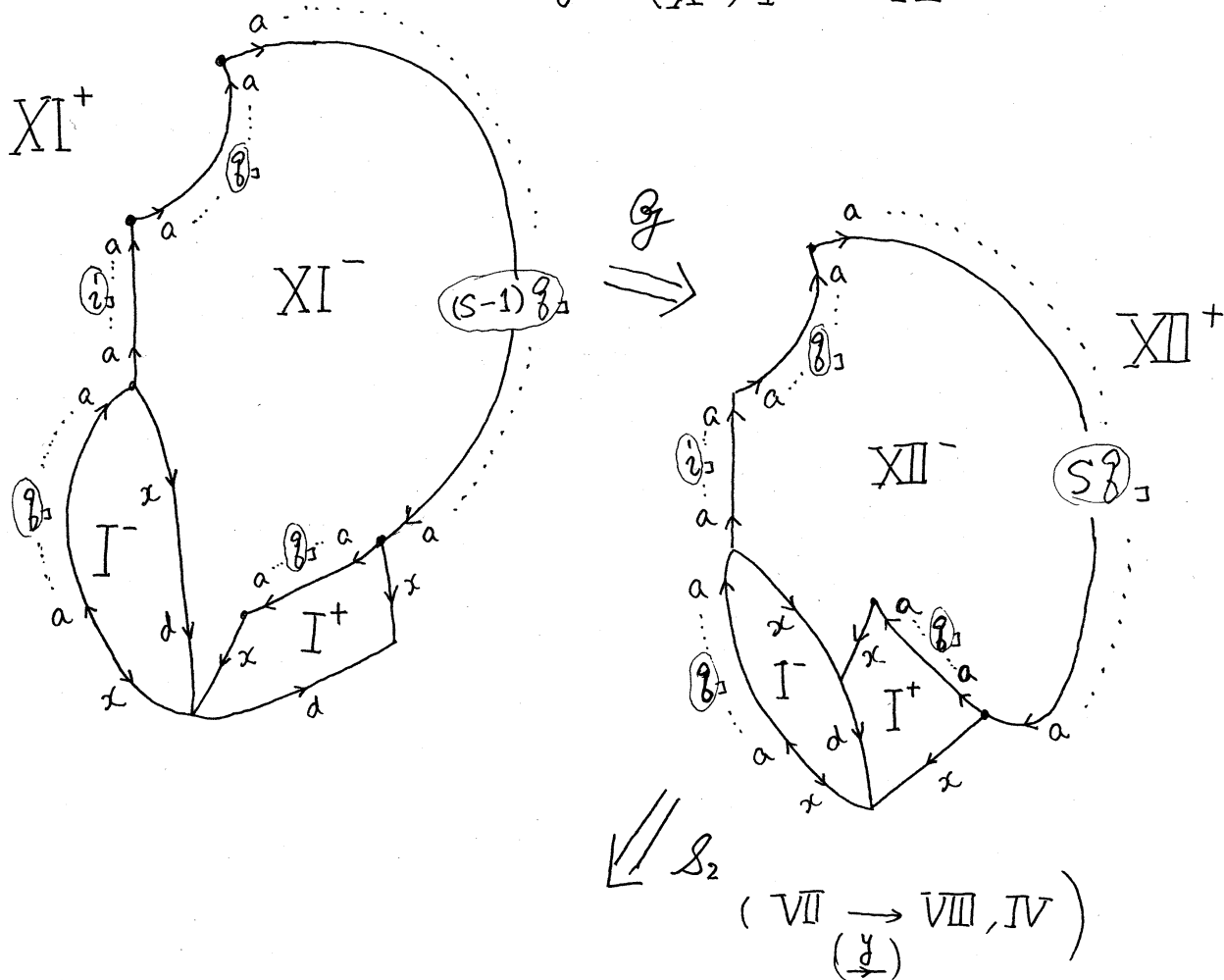
任意の整数 g, S, i ($g \geq 1, S \geq 0, g > i \geq 1$) に対して $p = (S+2)g+i$ とおくと 図 2 は 図 1 と β -equivalent である。(p と g は互いに素) すなわち, この polygram から定まる 3 次元多様体は $L((S+2)g+i, g)$ なる Lens space である。

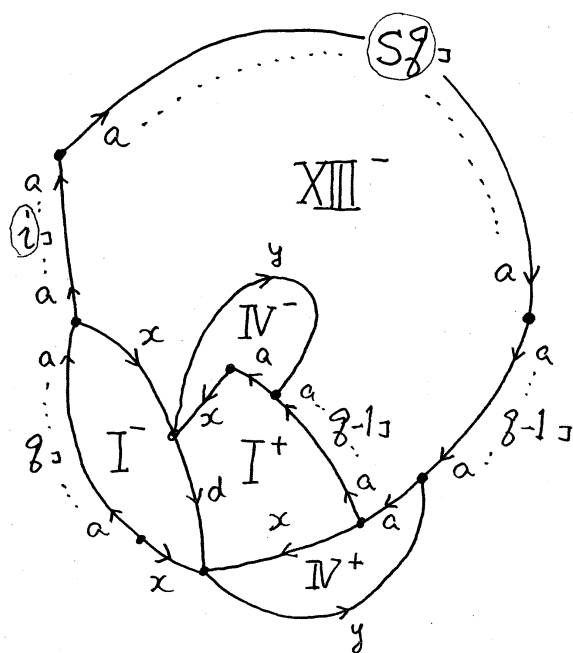
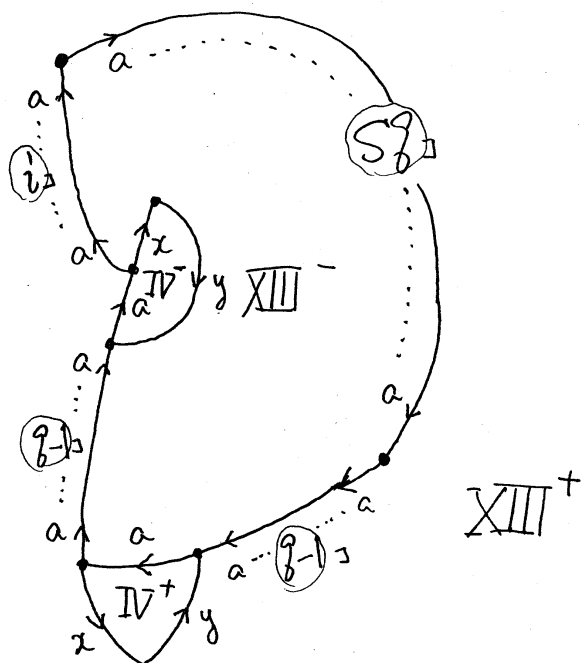
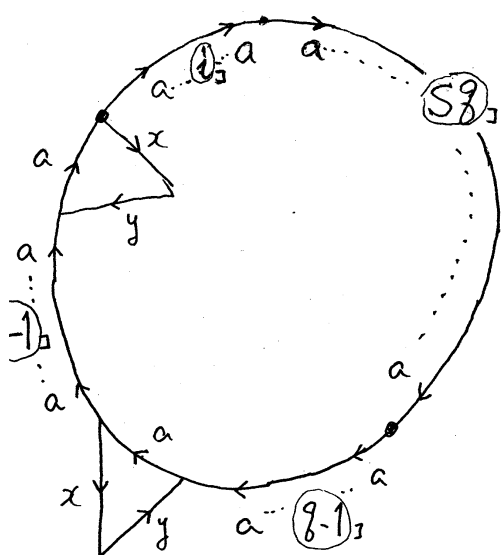
[証明] 以下の図で示される。



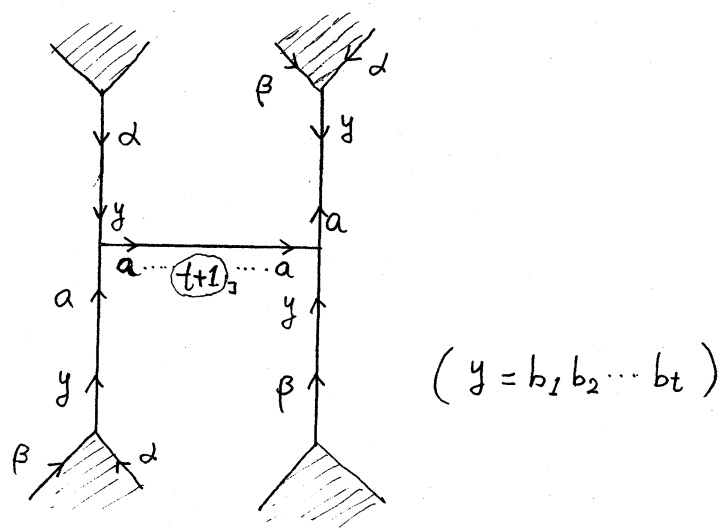
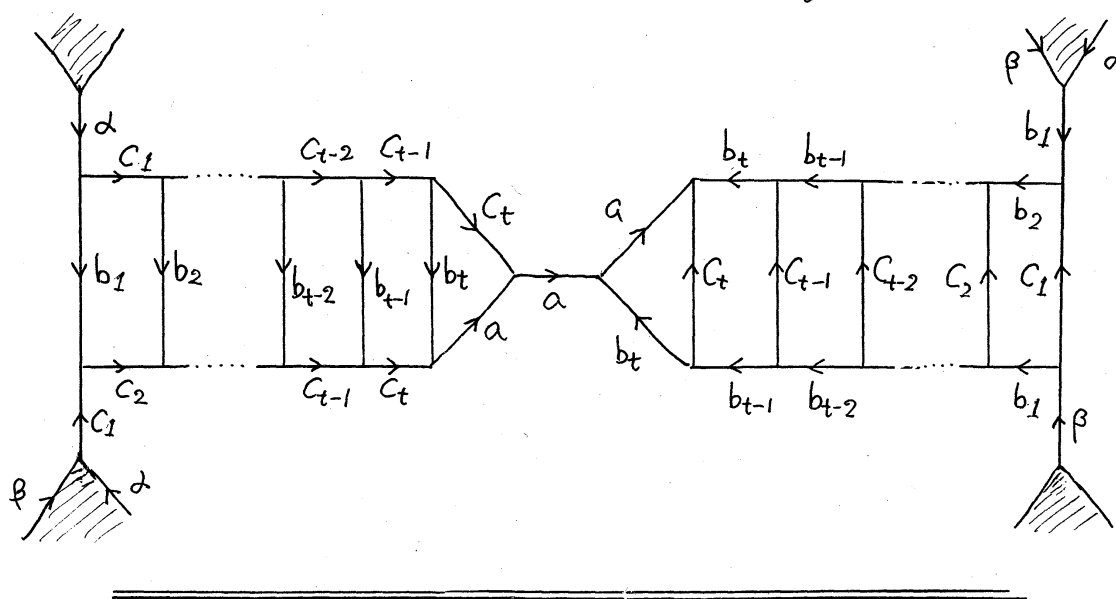


$\Downarrow G (X^+, I^+ \rightarrow XI^+)$




 $XIII^+$
 $\Downarrow c \text{ 变形 } (I^-, I^+ (d \text{ 关系}))$

 $\equiv$


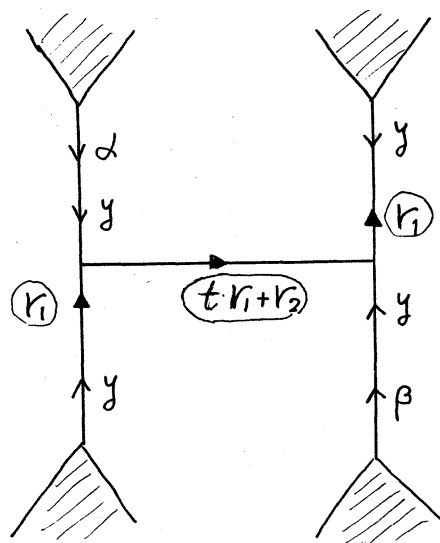
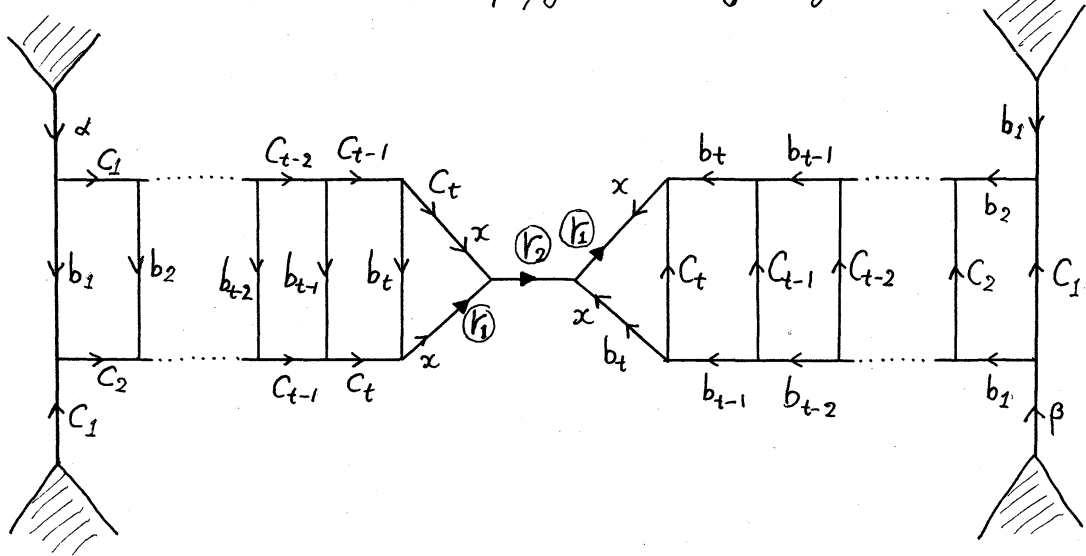
補題 2 次の 2 つの polygram は β -equivalent である。



ただし, t は $t \geq 1$ なる任意の整数で b_i, C_i ($1 \leq i \leq t$) は polygram の他の所には現われない。また  は polygram がこの先はどうなる、ていてもよいことを表す。

もっと一般に, 次の補題が示される。

補題 3 次の2つの polygram は β -equivalent である。

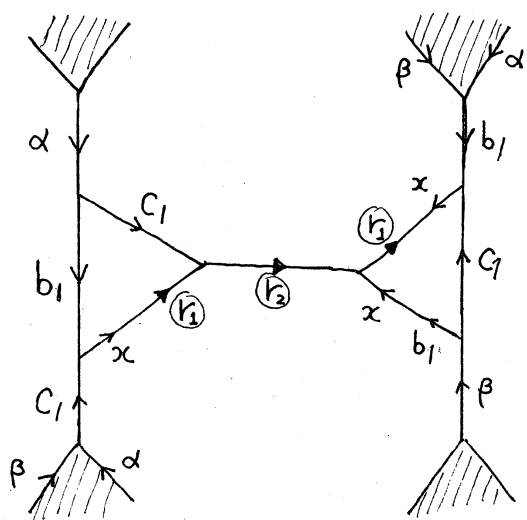


$$y = b_1 b_2 \cdots b_t x$$

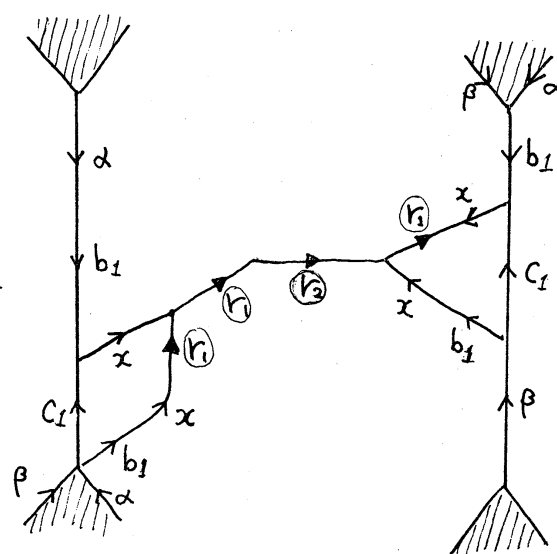
t ($t \geq 1$), b_i, C_i ($1 \leq i \leq t$) について、前の補題と同様で $\xrightarrow{\text{①}}$ は $\xrightarrow{a \cdots \text{②} \cdots a}$ を表わす。 ($r \geq 1$)

[証明] t に関する induction でおこなわれる。まず $t=1$ のときを示し、次に $t-1$ のとき成立するとして t のときを示す。てめは次の図のとおり。

$[t=1]$
のとき

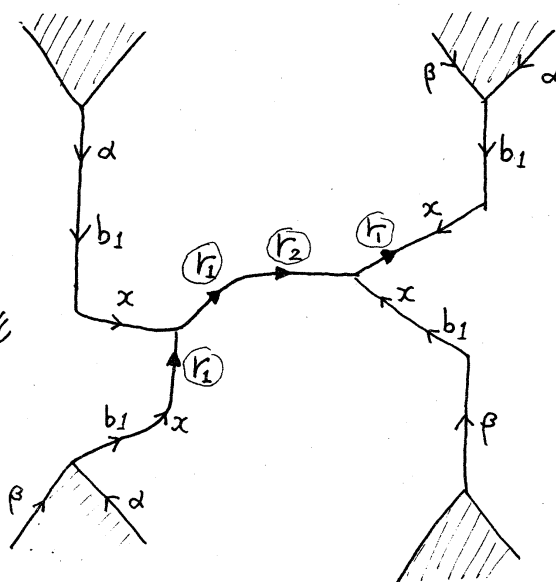


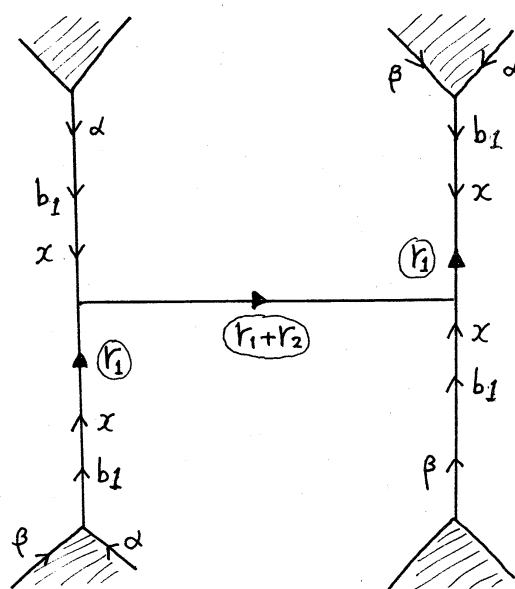
G_f 変形



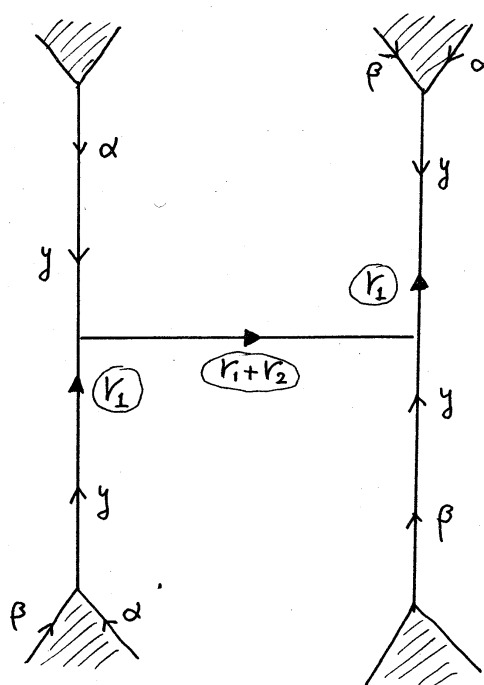
G_f

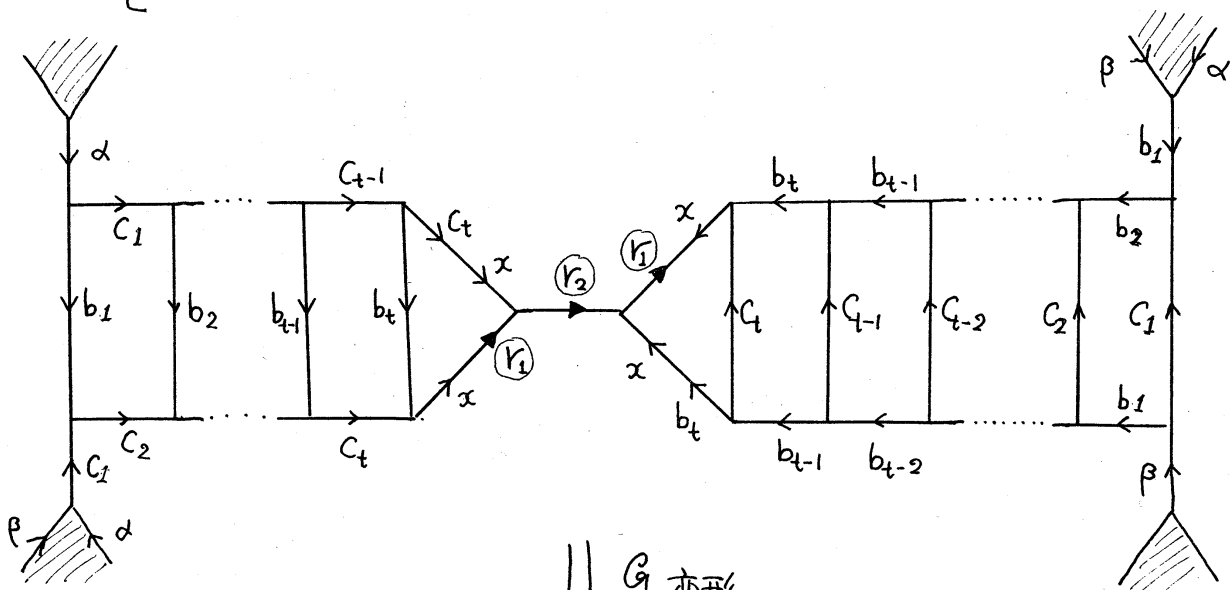
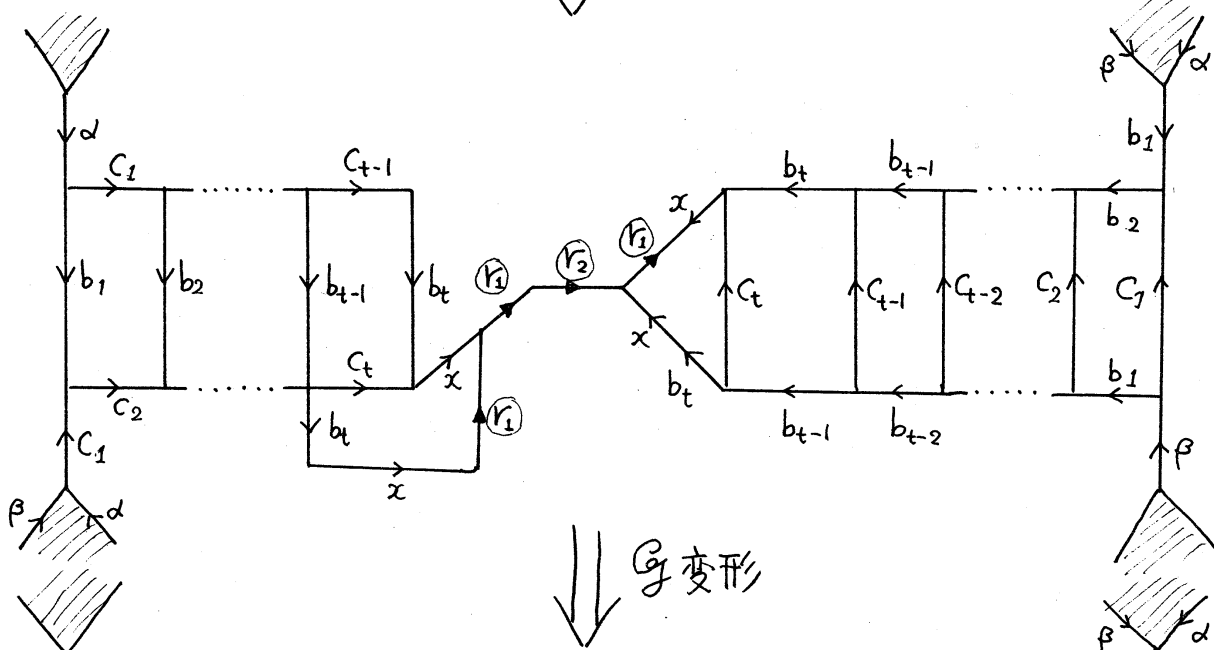
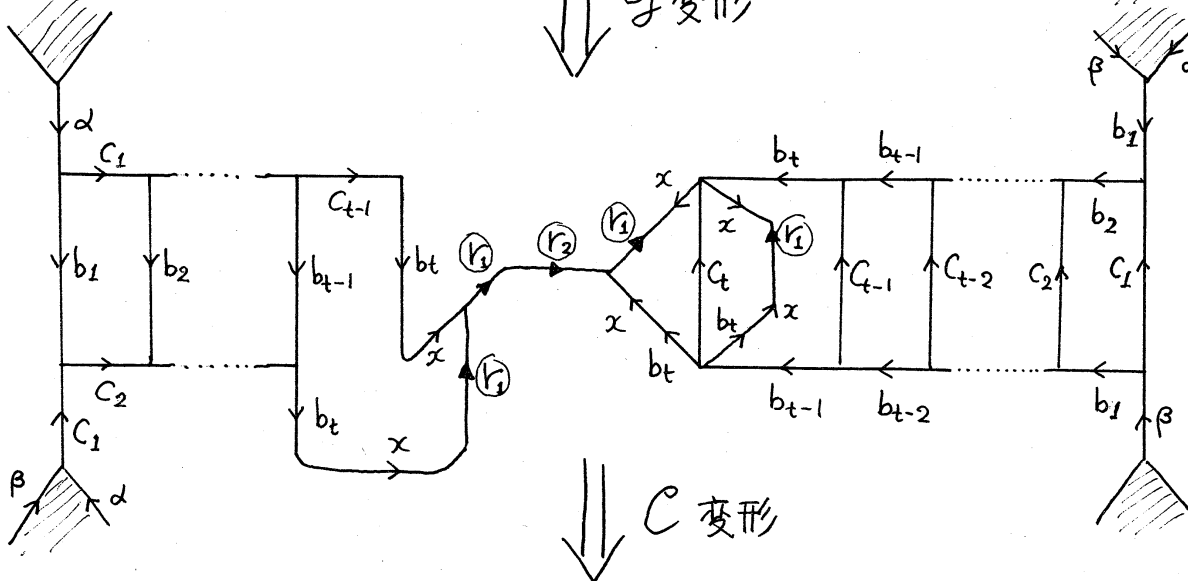
C 変形

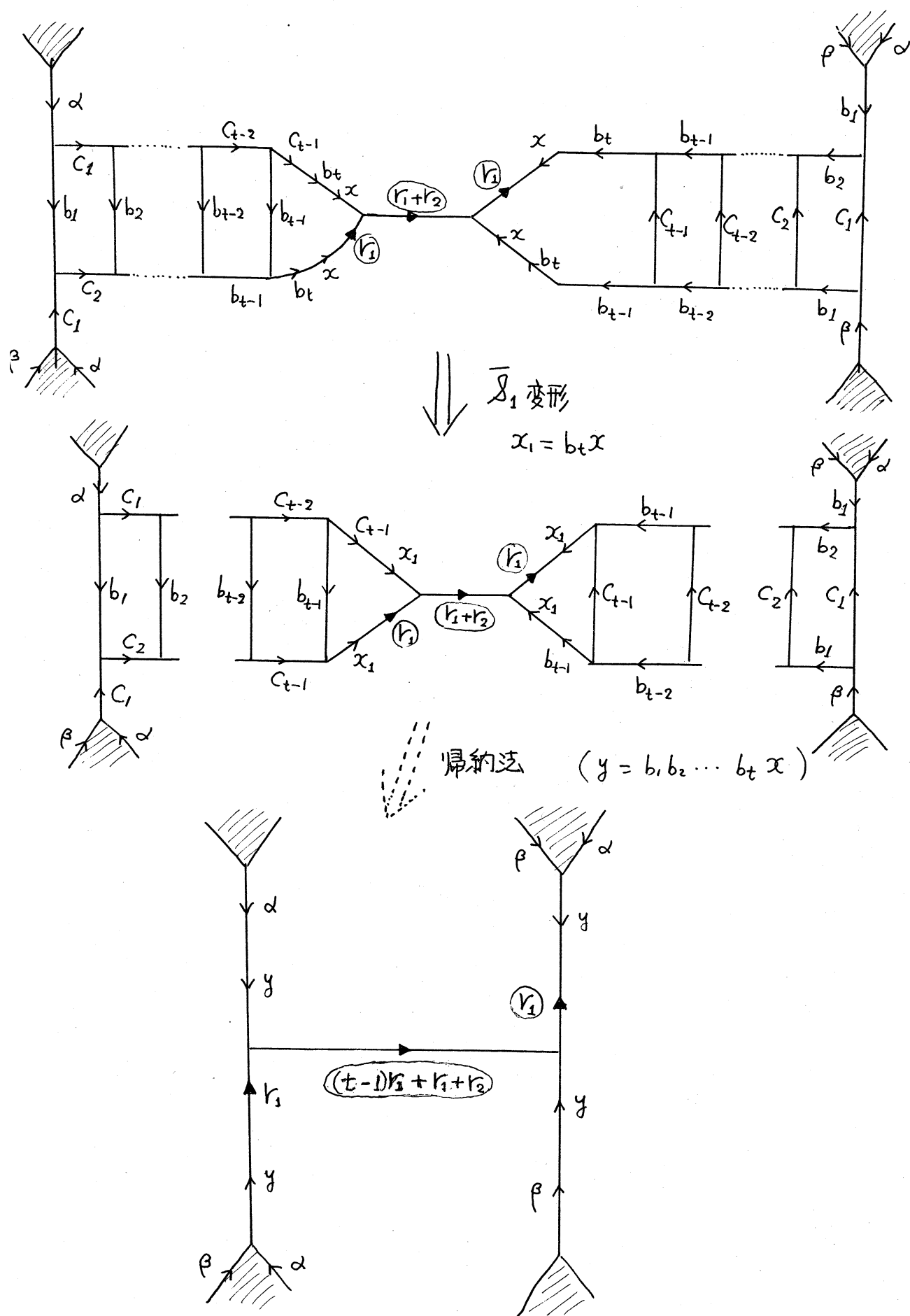




$\bar{S}_1$ 变形
($y = b_1 x$)

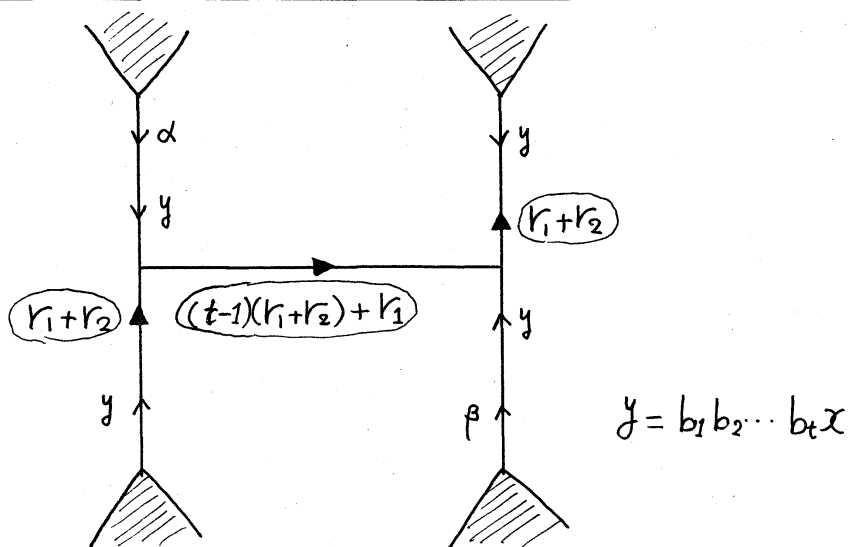
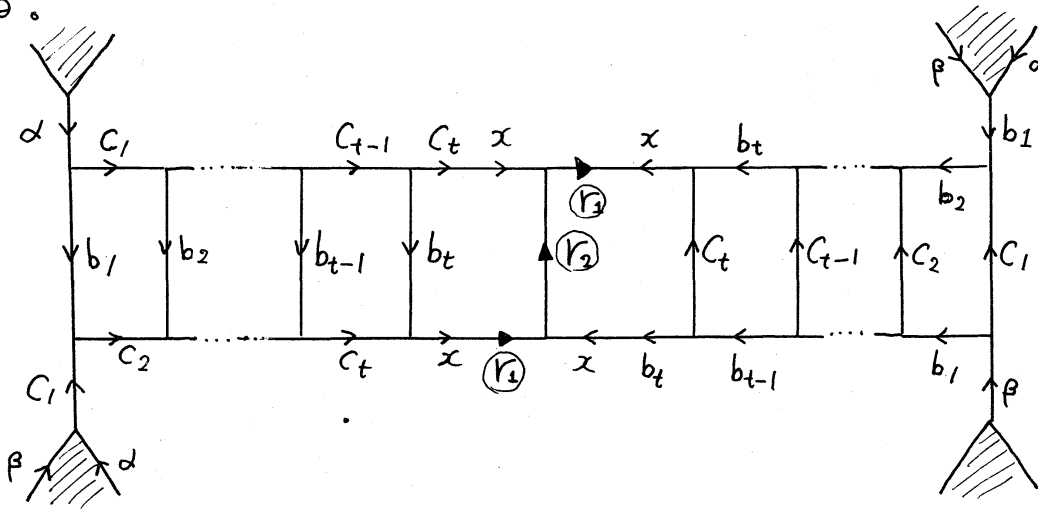


[t のとき] $\Downarrow G$ 変形 $\Downarrow G$ 変形 $\Downarrow C$ 変形



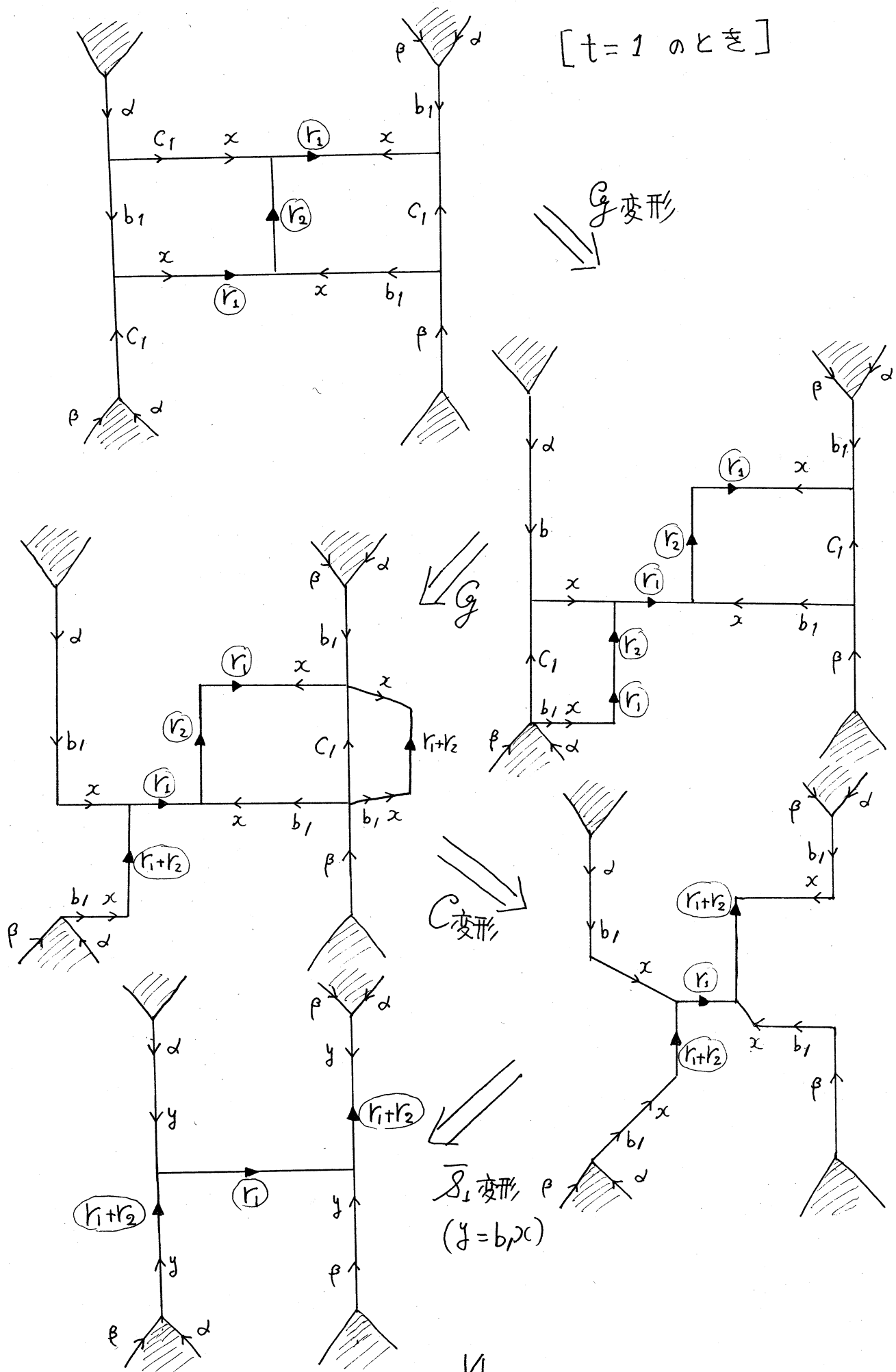
補題 4 次の 2 つの polygram は ϕ -equivalent である。

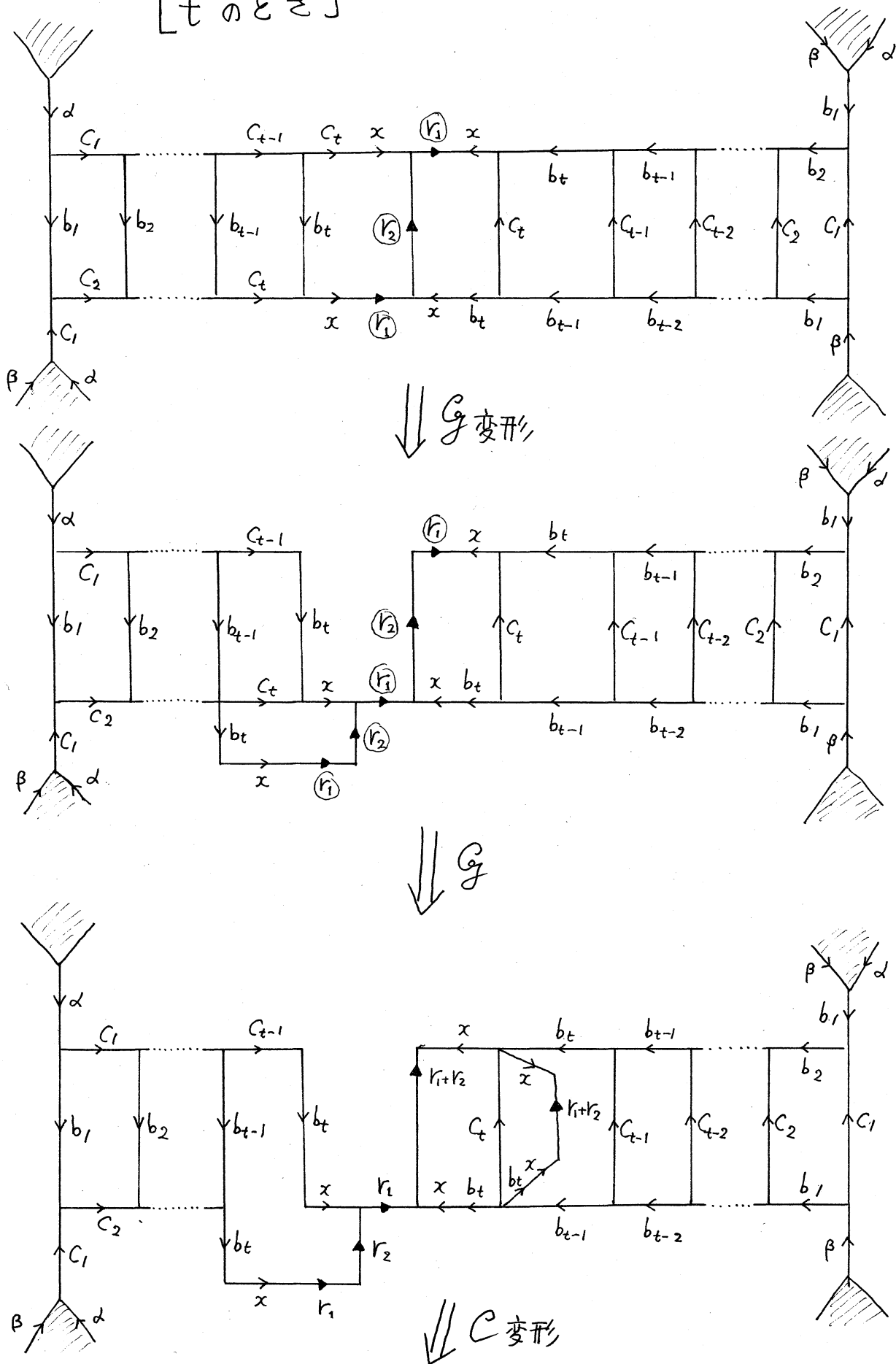
ある。

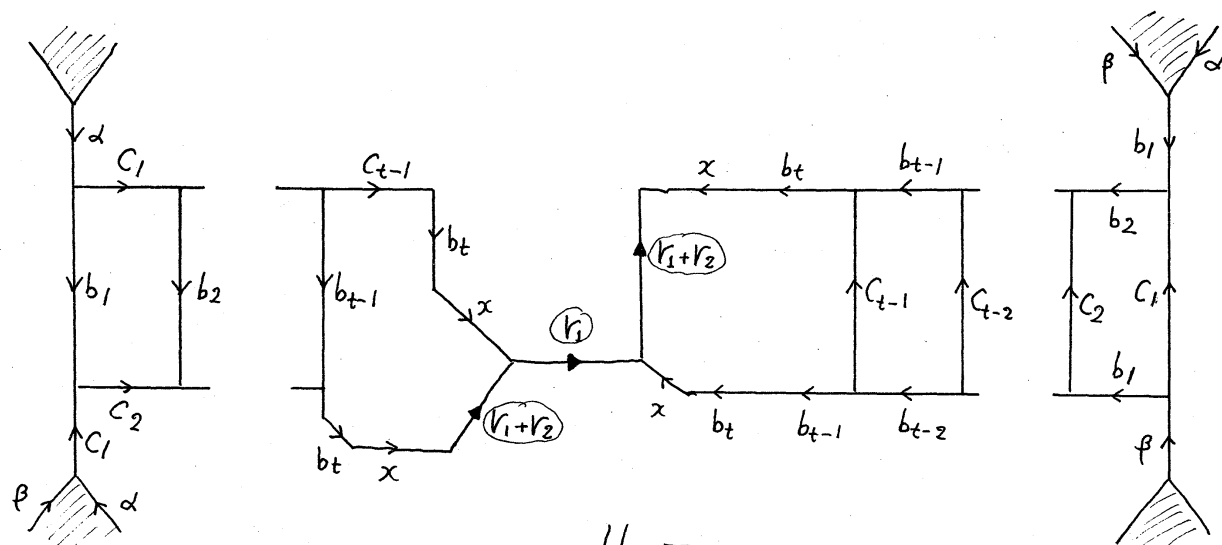


t は $t \geq 1$ なる任意の整数, b_i, C_i ($1 \leq i \leq t$) は polygram の他の所には現われない。図についての記法は前の補題と同じ。(r_1, r_2 は 任意の正の整数)

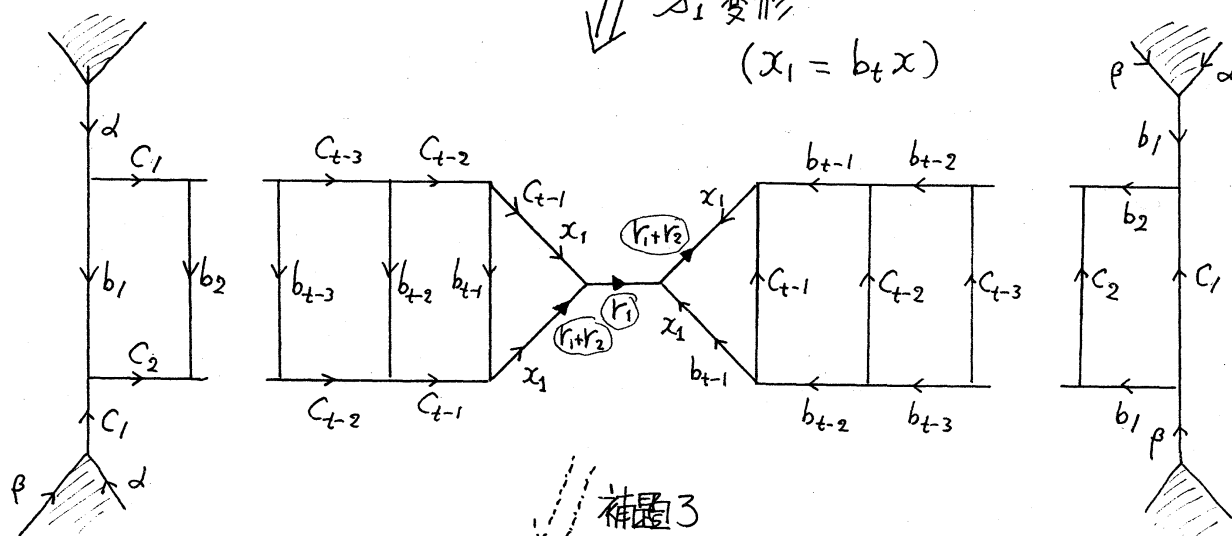
[証明] $t=1$ のときもまず示し, $t \geq 1$ のときは補題 3 を使, て, 次の図のように示される。($t=1$ も含まれるが)



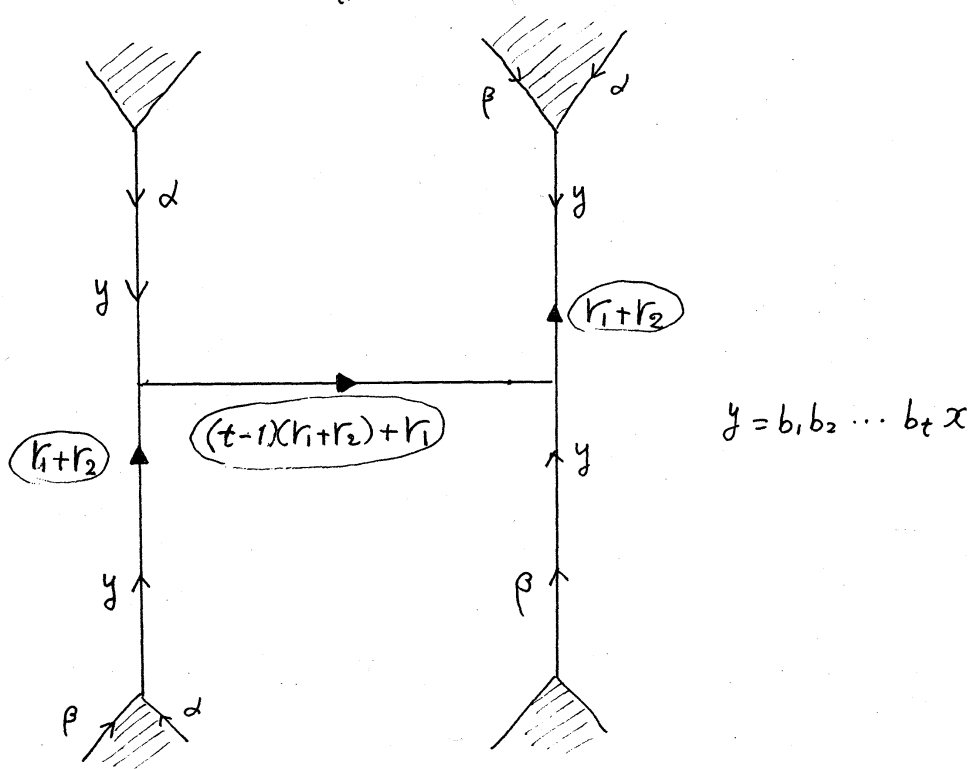
[t のとき]



$\bar{S}_1$ 变形
($x_1 = b_t x$)

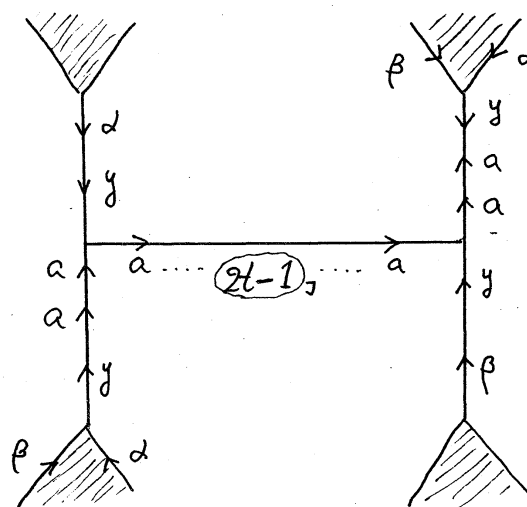
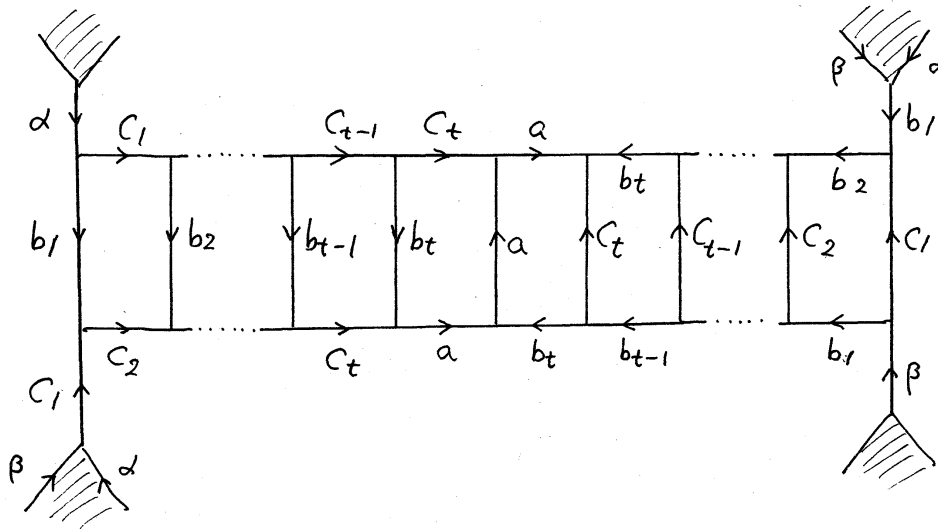


補題3



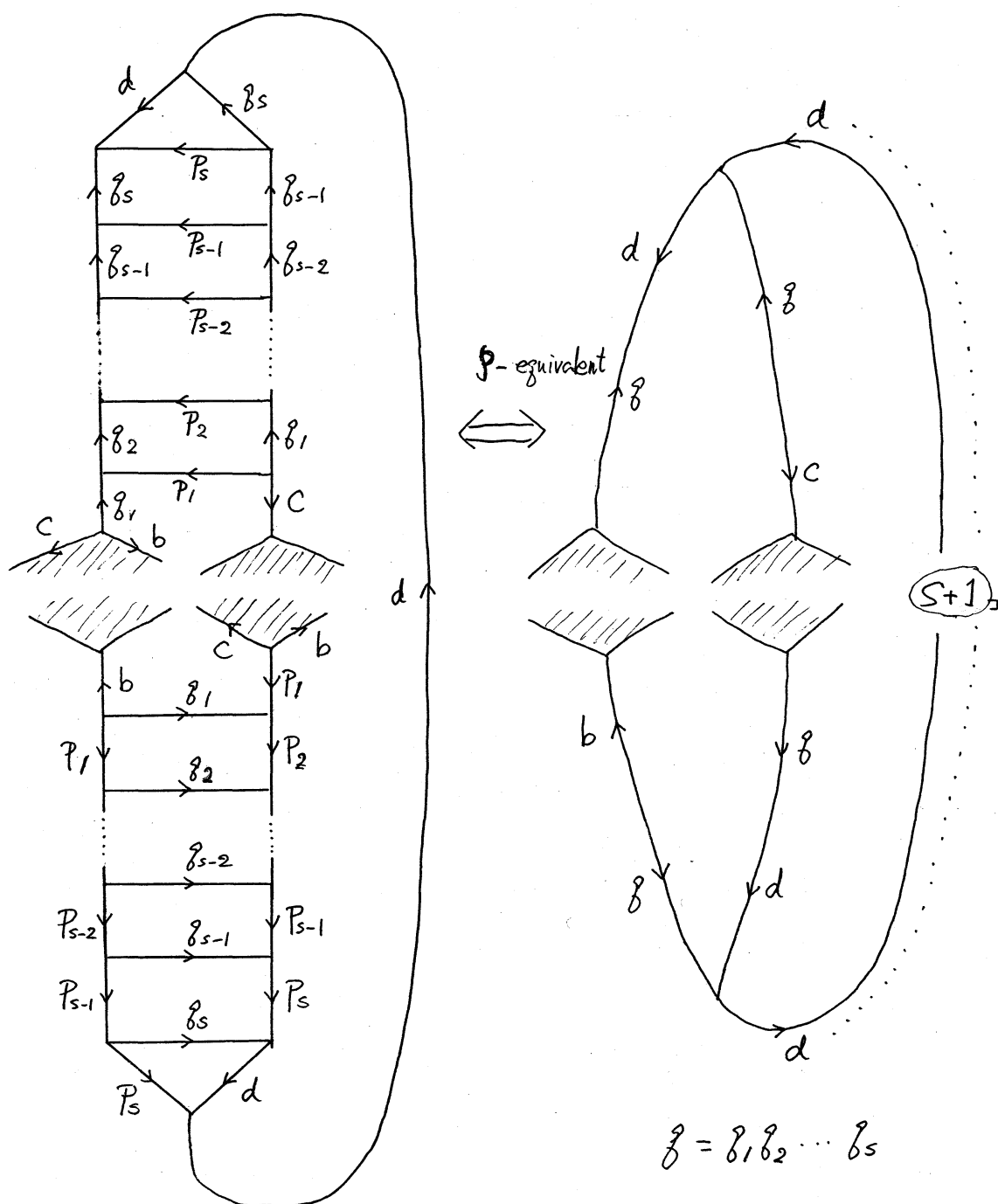
特に $r_1 = r_2 = 1$ のとき (x が s にないとき)

補題 5 次の2つの polygram は β -equivalent である



次に 補題1と同じ方法によって

補題 6 次の2つの polygram は β -equivalent である。



§ 2 Lens space $L(p, q)$ の DS-diagram の構成法とその応用

この節では § 1 の補題を使って, Lens space $L(p, q)$ の DS-diagram の“標準形”の構成法を述べ, $S_3(L(p, q))$ に関する命題と予想を述べる。

まず p, q が $p/2 > q \neq 1$ をみたすとしておく。この時, ユークリッドの互除法によって p と q が互いに素であるから, 次のような式 (⊗) の列が作られる。 $\exists u \in \mathbb{N}$

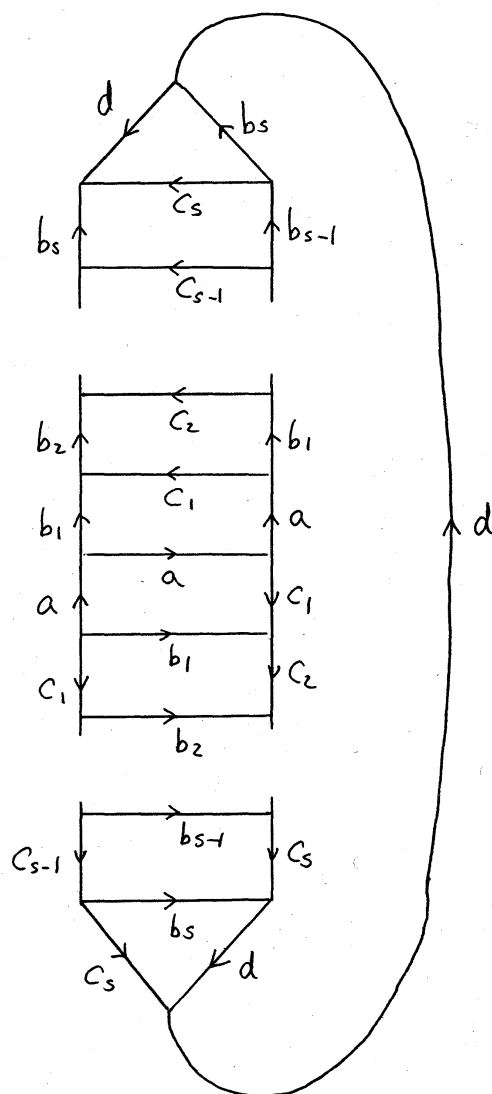
$$\begin{aligned}
 & \exists! \, q_0, r_1 \in \mathbb{N} \quad ; \quad p = q_0 q + r_1 \quad 1 < r_1 < q \\
 & \exists! \, q_1, r_2 \in \mathbb{N} \quad ; \quad q = q_1 r_1 + r_2 \quad 1 < r_2 < r_1 \\
 & \exists! \, q_2, r_3 \in \mathbb{N} \quad ; \quad r_1 = q_2 r_2 + r_3 \quad 1 < r_3 < r_2 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \exists! \, q_{u-2}, r_{u-1} \in \mathbb{N} \quad ; \quad r_{u-3} = q_{u-2} r_{u-2} + r_{u-1} \quad 1 < r_{u-1} < r_{u-2} \\
 & \exists! \, q_{u-1}, r_u \in \mathbb{N} \quad ; \quad r_{u-2} = q_{u-1} r_{u-1} + r_u \quad 1 = r_u < r_{u-2} \\
 & \exists! \, q_u \in \mathbb{N} \quad ; \quad r_{u-1} = q_u r_u \quad (q_u = r_{u-1})
 \end{aligned}$$

ここに $\mathbb{N}$ は正の整数(自然数)全体の集合を意味す。

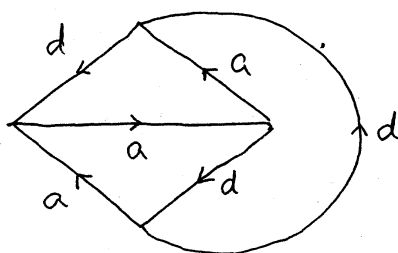
このとき $L(p, q)$ の DS-diagram は

定理 1 $p/2 > q > 1$ をみたす Lens space $L(p, q)$ の DS-diagram は 次のようにして上の式の列 (⊗) から構成される。

$g=2$ のときは $u=0$ であって $l(p, g)$ の DS-diagram は $s=(p-5)/2$ とおくと

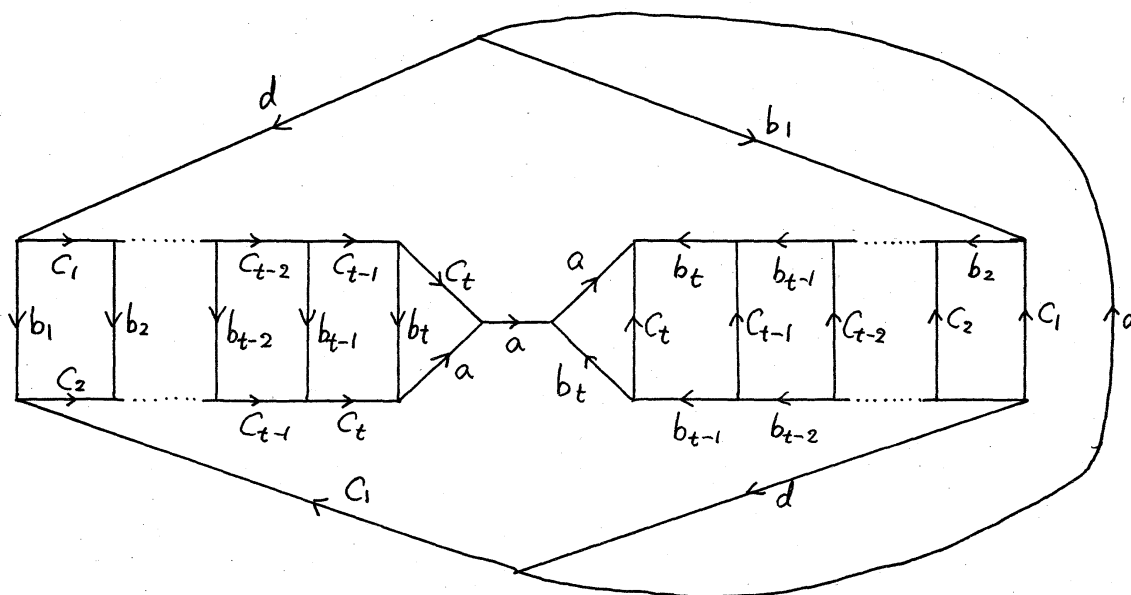


であって 特に $p=5$ のときは

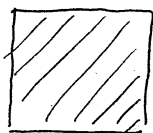


よって $g>2$ としておく。

【Step 0】* 仮定より $g_0 \geq 2$ であり $g_0 = 2$ であり $u = 1$ のときは $t = (p-5)/2$ とおくと $L(p, g)$ の DS-diagram は



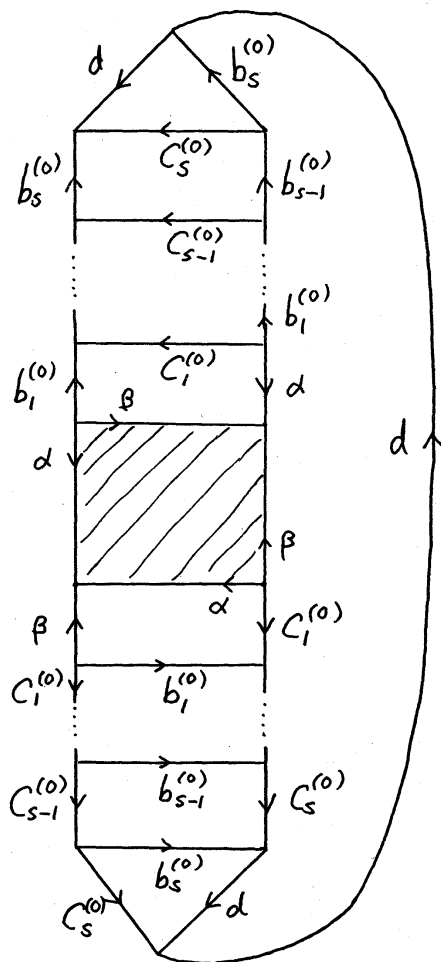
である。($p=5$ のときは $g=2$ であり $L(5, 2)$ となり 前述) さて 一般に $g_0 > 2$ であるか $g_0 = 2, u > 1$ のときは, まず Step 0 の次のような diagram (polygram) とかき そして次の Step の polygram の α -部 の部 一部とかき, それを



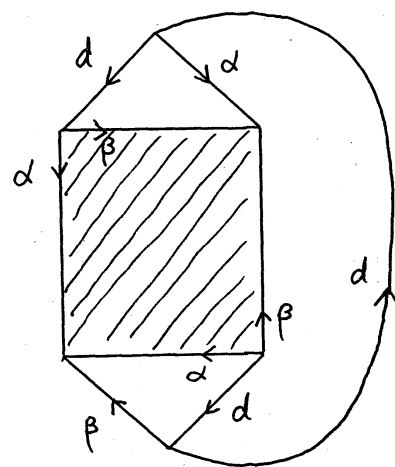
のなかに入れて, 次の Step に進む。それを u までくりかえす。最後の Step は もう一度きちんと最後にかくことにする。

【step 0】 仮定より $g_0 \geq 2$ ぞ

$g_0 > 2$ のときは $S = g_0 - 2$ とすれば

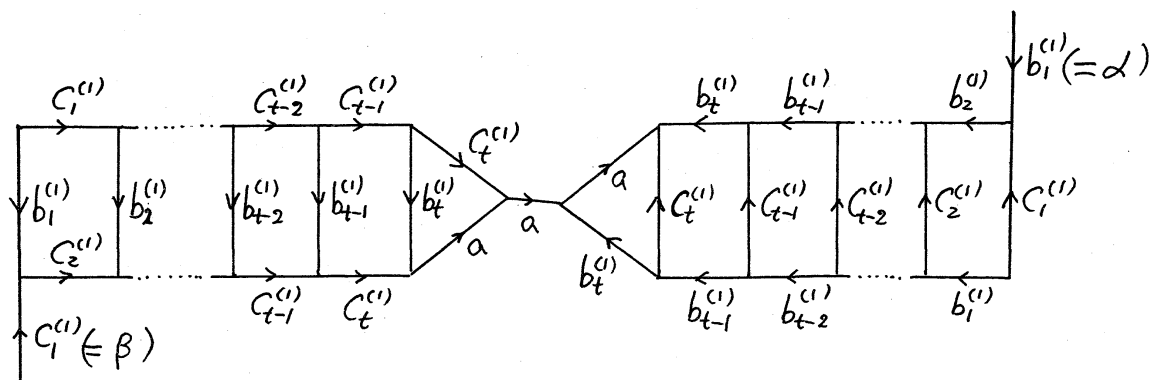
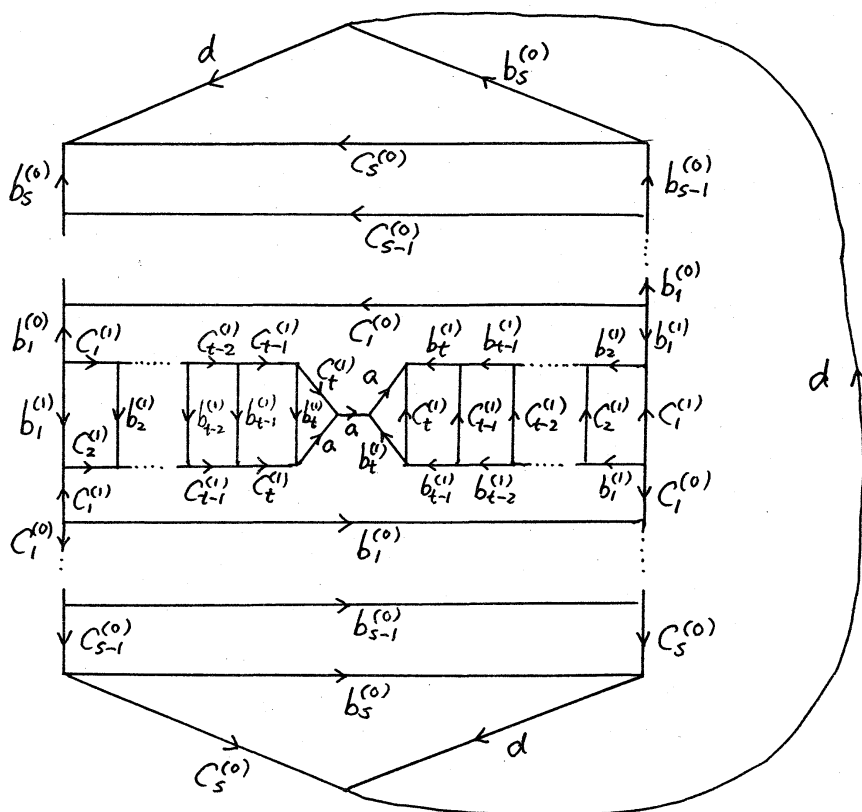


$g_0 = 2$ のときは
($u > 1$)

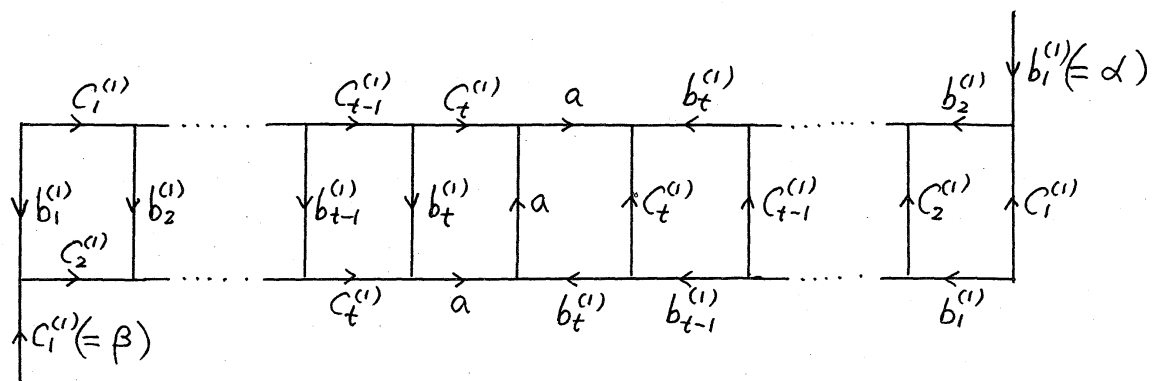


【Step 1】 $r_0 = 1$ のときは $u = 1$ ぞ 次の 図 1A
になり $r_0 = 2$ のときは $u = 2$ ぞ 次の 図 1B になり
その他 $r_0 > 2$ のときは 図 1C となり 次の step に
進む。

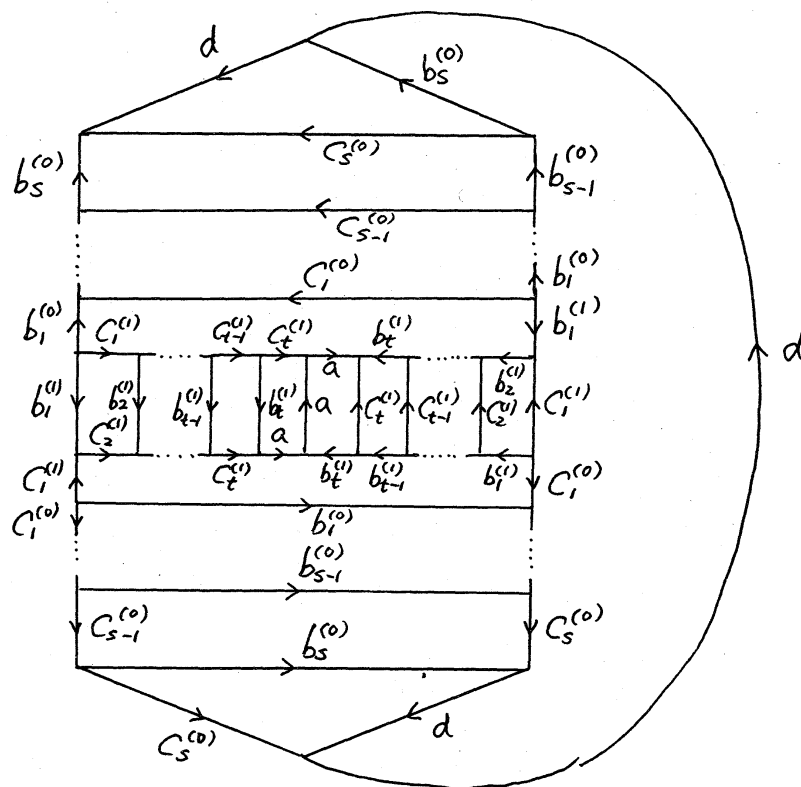
(図 1 A)

 $t = j - 2 (= j - 2)$ とおくとこのとき, DS-diagram は ($s > 0$ のとき)

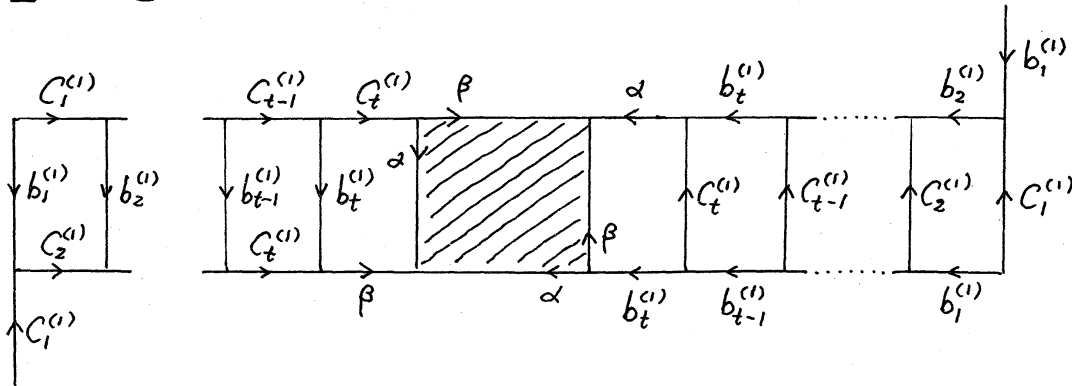
($\boxtimes$ 1 B) $t = g_1$ ($g = 2g_1 + 1$) とおくと



このときは, DS-diagram は ($s=0$ のときもある)



(図 1 C) $t = j_1$ とおくと



[Step 2] $r_2 = 1$ のときは $u = 2$ で 図 2 A になり

$r_2 = 2$ のときは $u = 3$ で 図 2 B になり, $r_2 > 2$ の

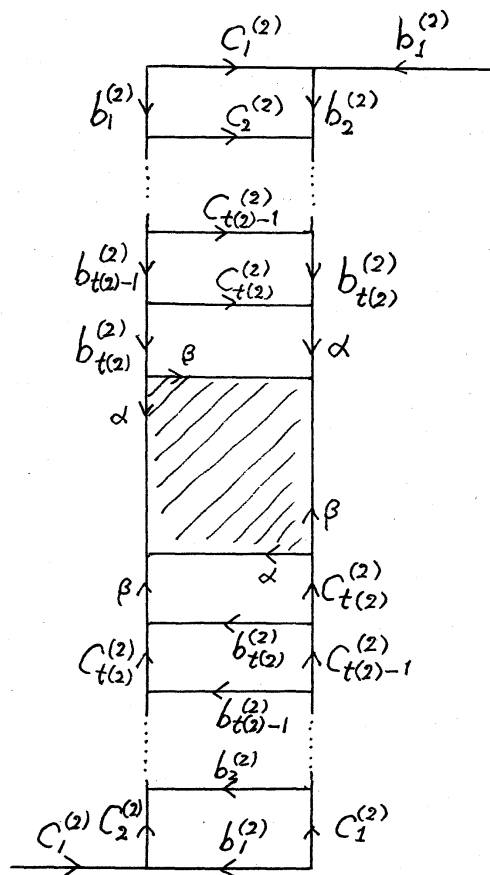
ときは 図 2 C となり 次の Step に進む。まず 図 2 C

から書いておく。

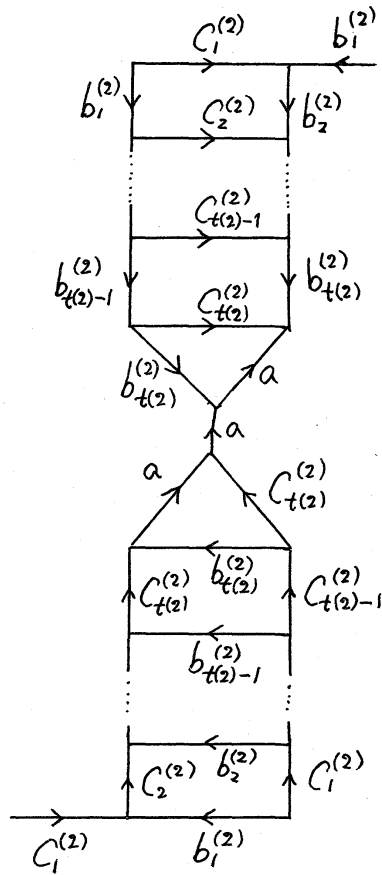
(図 2 C)

$t(2) = j_2$

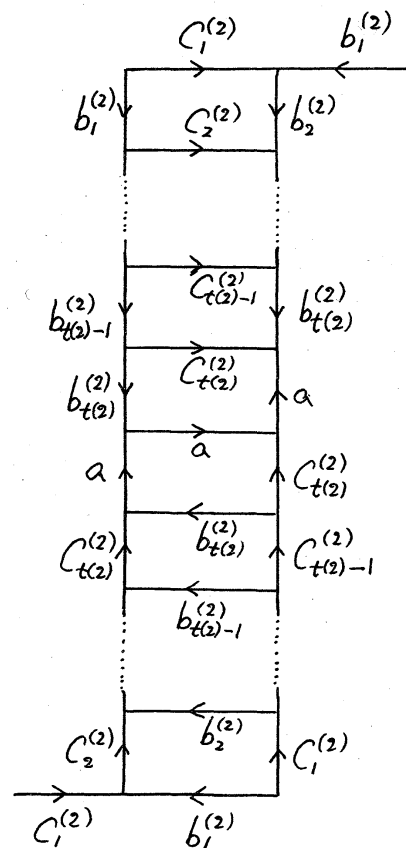
とおくと



($\boxtimes$ 2 A) $t(2) = \delta_2 - 2$ とおくと



($\boxtimes$ 2 B) $t(2) = \delta_2$ とおくと



こゝで、

図 2 A のとき ($u_2=1$ のとき) の DS-diagram は

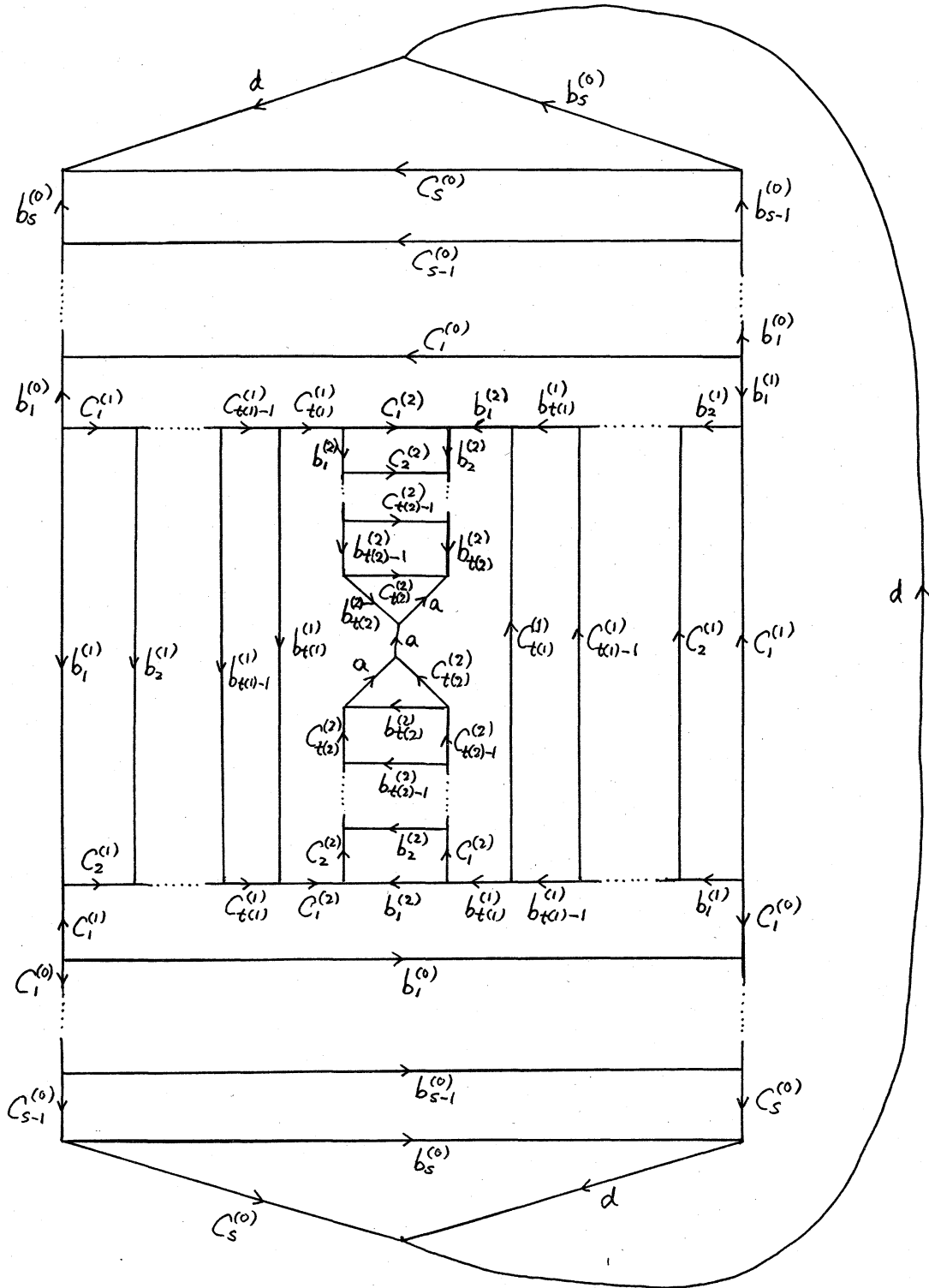
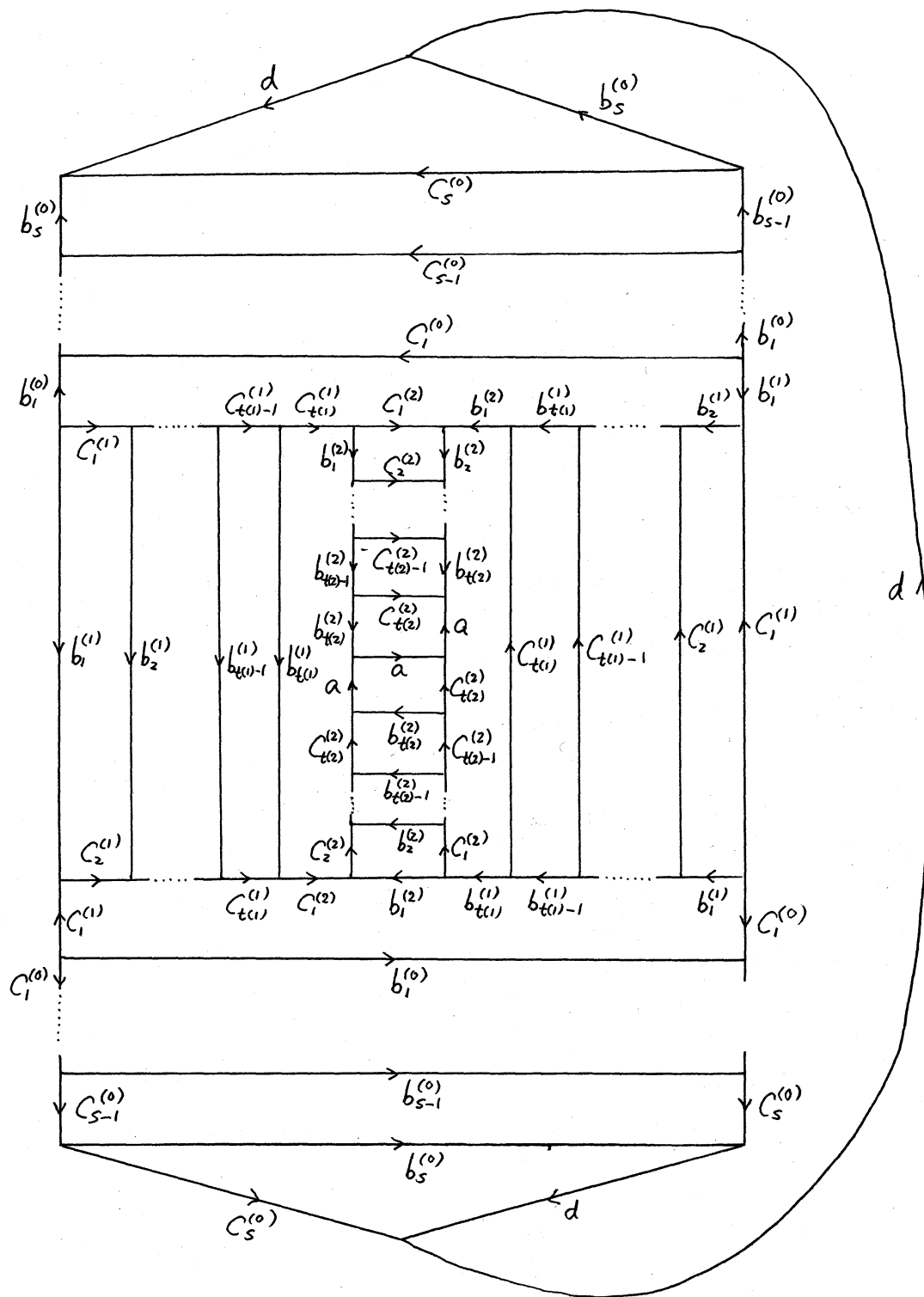


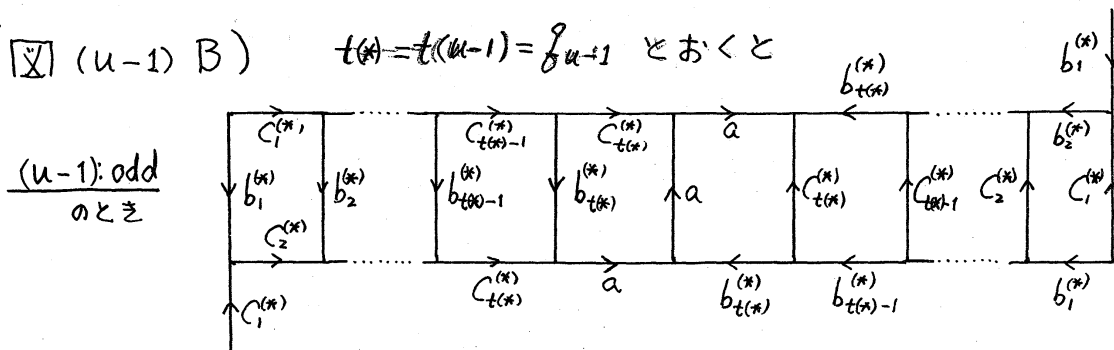
図 2B のとき ($u_2=2$ のとき) の DS-diagram は



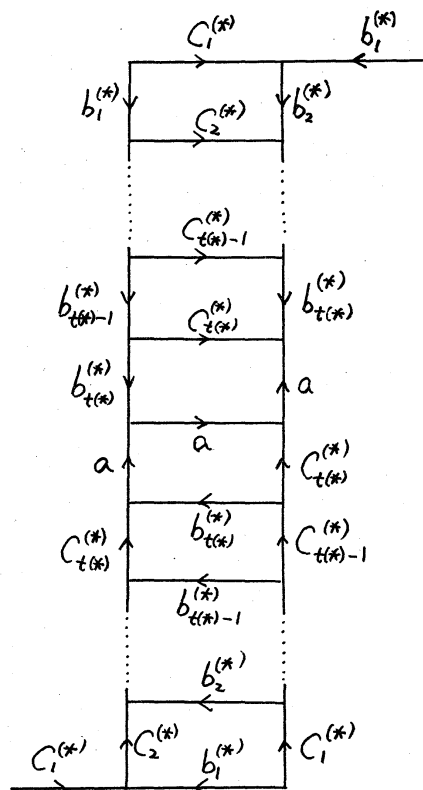
.....

[Step $u-1$] u の性質より $v_{u-1} \geq 2$ なるから $v_{u-1} = 2$ のときは $\boxed{\times}(u-1)B$ で終わり, $v_{u-1} > 2$ の時は $\boxed{\times}(u-1)C$ になり次の Step u に進んで終了する。

($\boxed{\times}(u-1)B$) $t^{(*)} = t(u-1) = f_{u+1}$ とおくと



($u-1$): even のとき



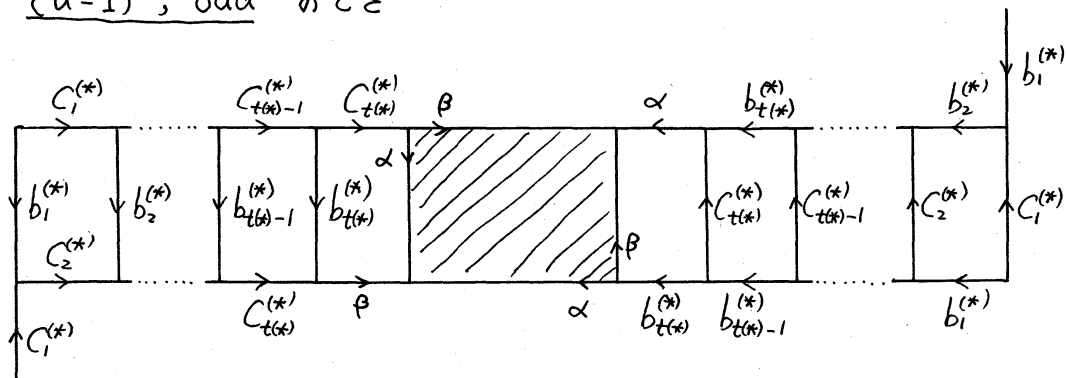
但し $b_i^{(*)} = b_i^{(u-1)}$, $C_i^{(*)} = C_i^{(u-1)}$ ($1 \leq i \leq t^{(*)} = t(u-1)$) と表わす。

($\boxtimes$) $(u-1) C$

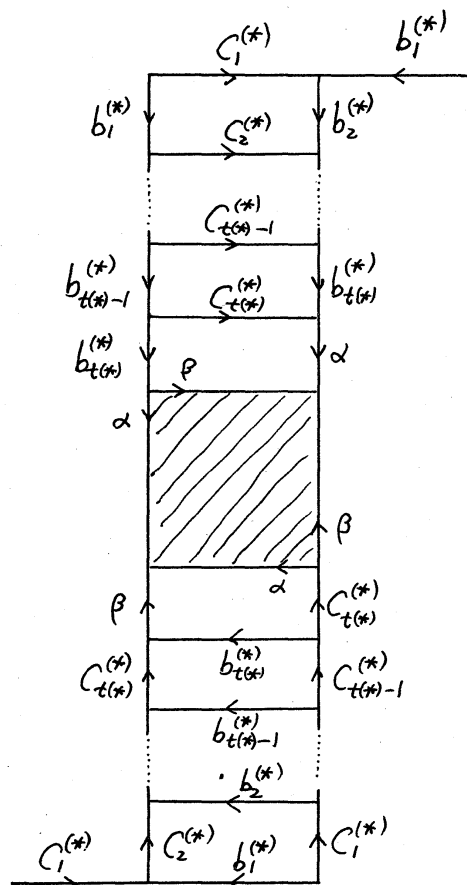
$t^{(*)} = t(u-1) = g_{u-1}$ とおくと

$b_i^{(*)} = b_i^{(u-1)}$, $C_i^{(*)} = C_i^{(u-1)}$ ($1 \leq i \leq t^{(*)} = t(u-1)$) とおくと

$(u-1)$; odd のとき



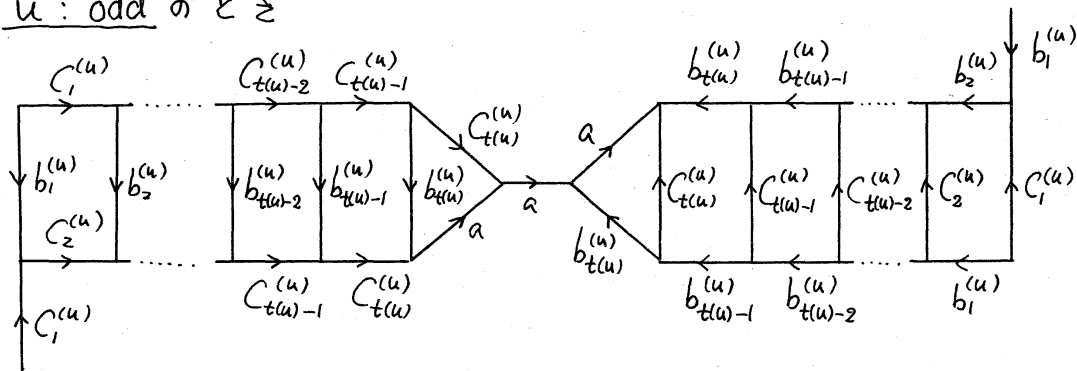
$(u-1)$; even のとき



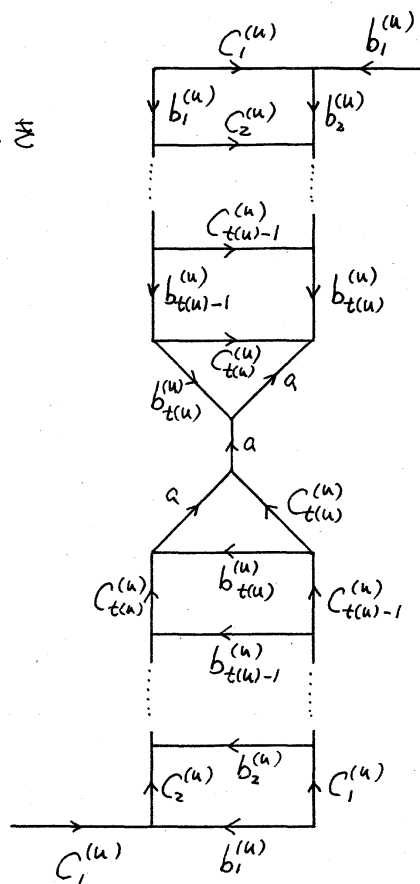
[Step u] $r_u = 1$ かつ $r_{u-1} > 2$ としよ。その
時は $\square u$ になり終了する。

($\square u$) $t(u) = g_u - 2$ とおくと

u : odd のとき

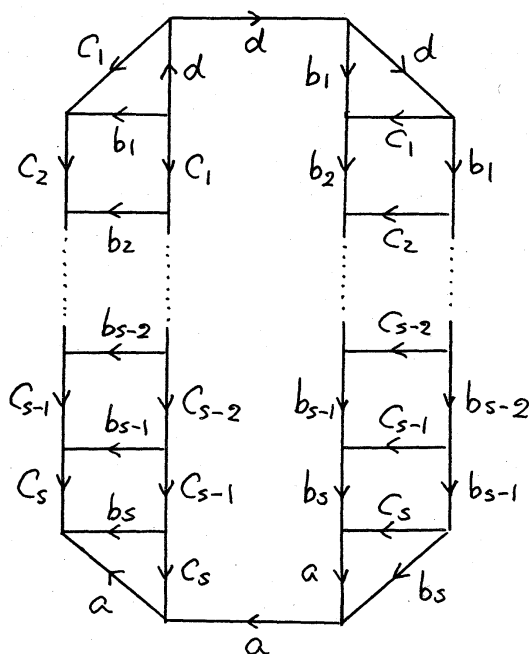


u : even のとき



Q.E.D. $\blacksquare$

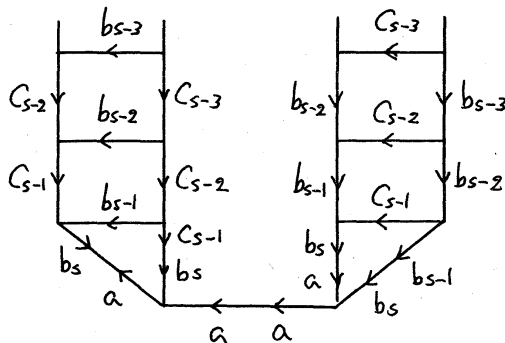
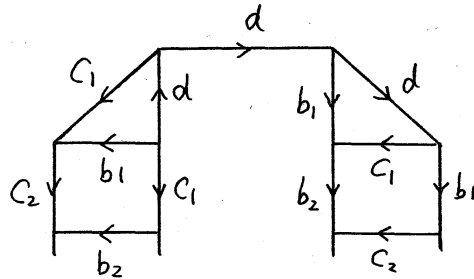
定理 2 $g = 1$ のとき (但し $p=2$ と $p=3$ は除く) Lens space $L(p, 1)$ の DS-diagram は $S = p-3$ とおけば



[証明] $p=4$ については [4] の p5 と同じ ($\xrightarrow{a}$ と $\xleftarrow{a}$ とみればよい) , $p=5$ についても [4] の p14 と同じ ($\xrightarrow{a}$ と $\xleftarrow{a}$ とみればよい) 。 $p > 5$ については次の図のように変形をおこなえば $\xrightarrow{a}$ と $\xleftarrow{a} \dots \xleftarrow{a}$ とすれば,

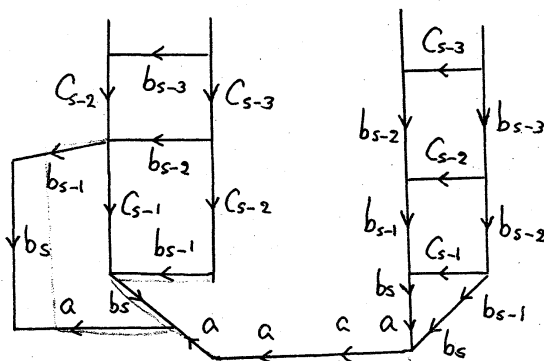
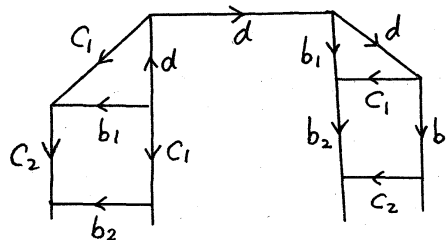
$p=5$ のときと同じ証明ができるので, p に関する帰納法で証明できる。

//

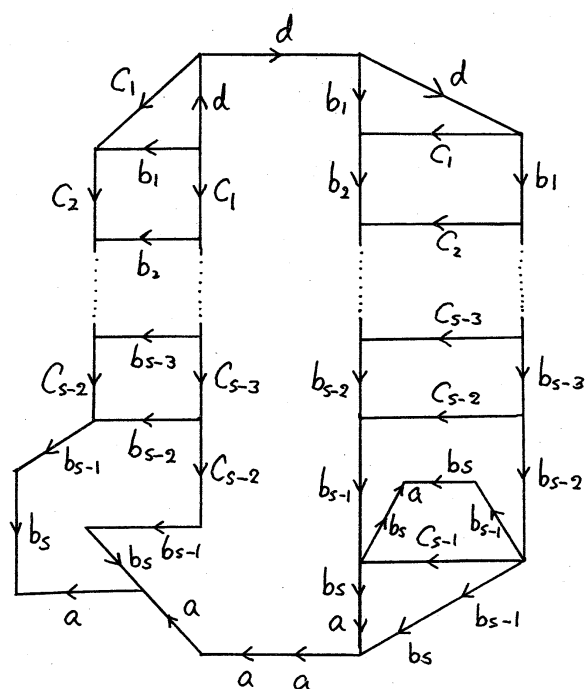


帰納法で ($c_{s-1} b_s$ について $\mathcal{Q}$ 変形, として, c_{s-1} について $\mathcal{Q}$ 変形, として c_{s-1} で $\mathcal{C}$ 変形 とすれば) 示される.
ゆんのために書いておくと

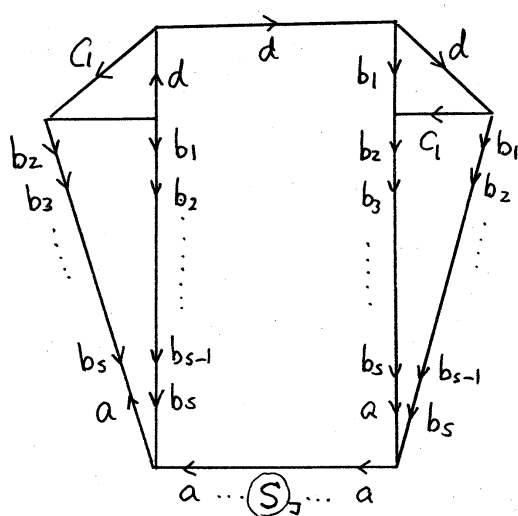
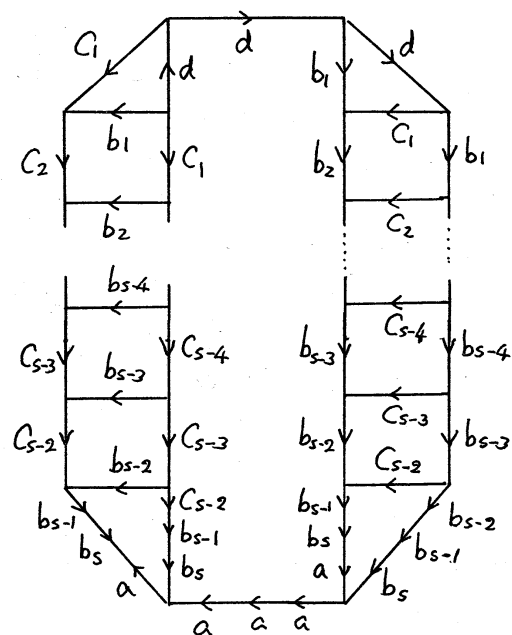
$\mathcal{Q}$ 変形



$\mathcal{Q}$ 変形

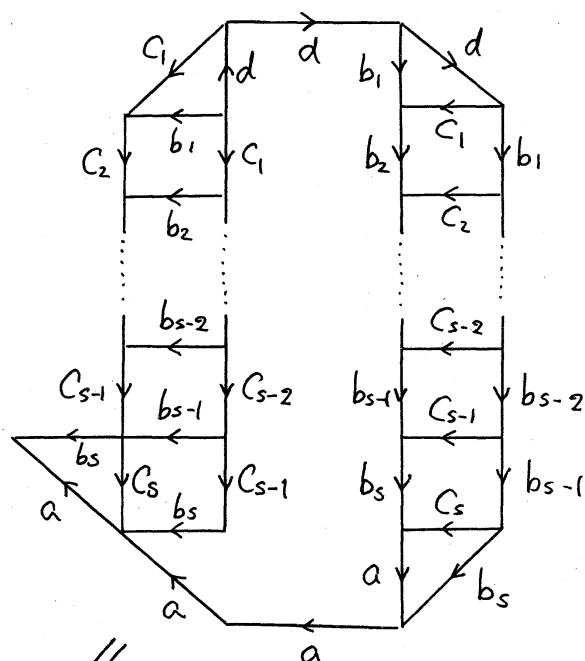


C 変形 $[C_{s-1}]$

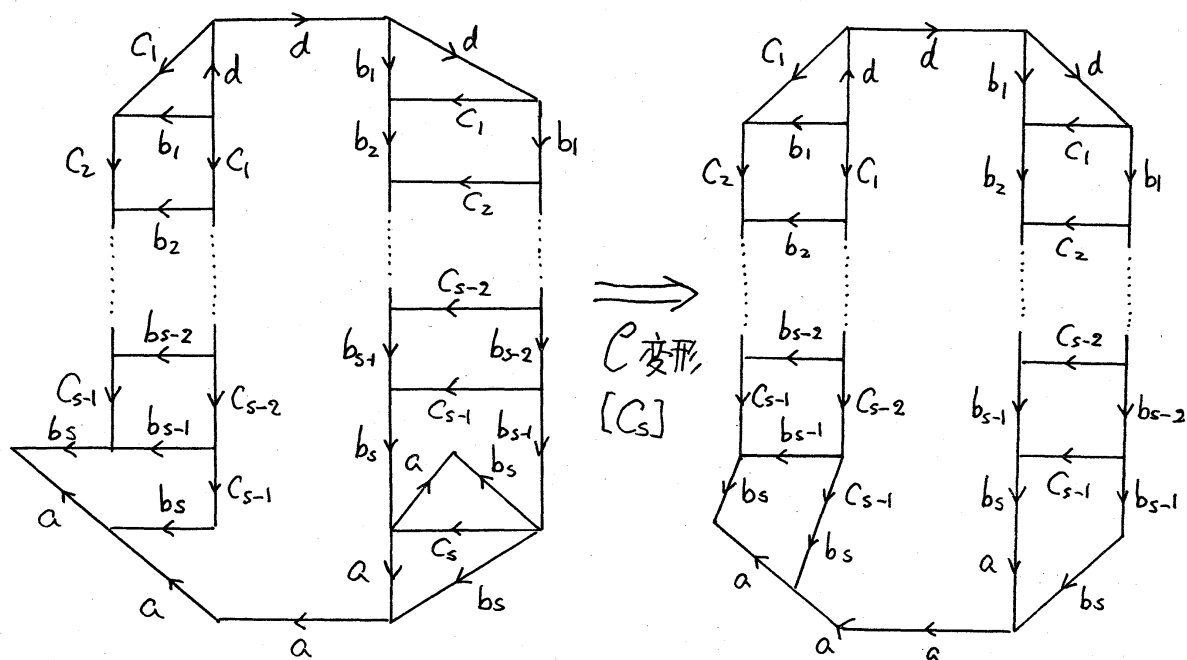


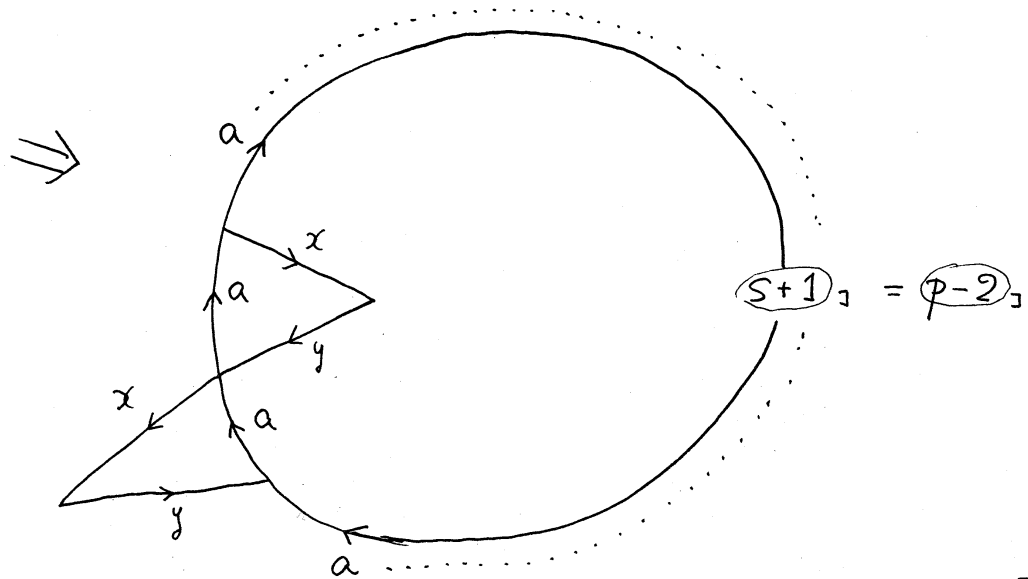
あとは $p=5$ の場合と
同様にして

$\Downarrow G$ 变形



$\Downarrow G$ 变形



Q.E.D. $\square$

命題 3 $L(2,1)$ と $L(3,1)$ は例外で [4] の p5 あるいは [2] の (2-4) が $L(2,1)$ の DS-diagram であり。[4] の p9 (or p12) あるいは [2] の (2-5) (or (2-10)) が $L(3,1)$ の DS-diagram である。

さて残った $p > g \geq p/2$ のときであるが lens space $L(p, g)$ と $L(p, p-g)$ は orientation が反対であるだけで、位相同型だから $L(p, p-g)$ に対して定理 1, 2, 命題 3 を ($p/2 \equiv p-g$ となる) DS-diagram を構成して、それとうらがえせば (mirror image とすれば) よい。(向きをきにしなれば、そのままでもよい)。

実際は向きがつかっているときには、同調する所をかえる
 1) ように、基本変形 ℓ の (1) のとき矢印の向きをかえる
 2) 、基本変形 δ , δ のとき向きもそのままに保つよう
 にすれば、向きを保つ位相同型写像も 3次元多様体にと
 えるので、orientation preserving homeomorphism でこの
 Note では Lens space の polygram の変形は全て
 orientation preserving なものしか使っている。

さて次に $S_3(P)$ であるが、これは実際に計算してみる
 と分かるように ($g=1$ も $(\otimes)$ も行なう)

定理 4 上に与えられた Lens space $L(p, g)$
 の DS-diagram に対応する fake surface P の $S_3(P)$
 は次の式で求められる。($L(2, 1), L(3, 1) (\simeq L(3, 2))$
 は例外)

$$\#_3 = g_0 + g_1 + g_2 + \dots + g_n - 3$$

予想 Lens space $L(p, g)$ に対する $S_3(L(p, g))$
 も上の式で与えられる ?

命題 5 ($p=2, g=1$ と $p=3, g=1, p=3, g=2$ を除く)
 $S_3(L(p, g)) \leq \#_3(p, g)$

命題 6 $S_3(L(p, g)) \leq 3$ までは上の予想は正しい。 ([2] と [4] と [5])

参 考 文 献

- [1] H. Ikeda : Acyclic fake surfaces, *Topology* 10 (1971) 9-36
- [2] H. Ikeda & Y. Inoue 「3次元多様体, Fake surfaces, D-S graphs」 京都大学数理解析研講究録 524 『多様体と Fake surfaces』 21-45 (1984年5月)
- [3] M. Yamashita & K. Yokoyama 「DS-diagram の基本変形」 京都大学数理解析研講究録 524 『多様体と Fake surfaces』 46-83 (1984年5月)
- [4] M. Yamashita & K. Yokoyama 「DS-diagram の基本変形 II」 京都大学数理解析研講究録 542 『低次元多様体の幾何構造と位相構造』 81-96 (1985年1月)
- [5] H. Ikeda, M. Yamashita & K. Yokoyama 「polygram とその基本変形」 (当講究録)