

tight 4-design と tight 4-orthogonal array について

阪大教養 野田隆三郎

t -(v, k, λ) design と orthogonal array $OA(N, m, q, t)$ は
一定 別個に組合せ論的対象であるがこれら二つは associa-
tion scheme の観点から見ると 全く同種のものとみなすこ
とができることと最初に示したのは P. Delsarte [2] である。
つまり t -(v, k, λ) design の Johnson scheme $J(v, k)$ の部分
集合として存在位置と $OA(N, m, q, t)$ の Hamming scheme
 $H(m, q)$ の部分集合として存在位置は association scheme
の観点から見ると 全く共通の概念のものと同一のものと
みなすことができるというのである。このような観点からみる
時、従来 別個に不等式と考えられていた $2t$ -(v, k, λ) design
における Generalized Fischer's inequality $b \geq \binom{v}{t}$ と $OA(N, m,$
 $q, 2t)$ における Rao's inequality $N \geq 1 + m(q-1) + \binom{m}{2}(q-1)^2 + \dots$
 $+ \binom{m}{t}(q-1)^t$ は 全く同種のものとみなせられ 実際 associa-
tion scheme の観点から両者を統一的に同時に証明するこ
とができる。

ところで $\lambda \alpha = \gamma$ の不等式に等号が成り立つものはそれぞれ tight 2 α -design, また tight 2 α -orthogonal array と呼ぶことにすると 与えら tight 2 α -design, tight 2 α -orthogonal array の分類とよという問題が自然に生れてくる。 $\alpha \geq 4$ の場合について α に対して tight 2 α -design, tight 2 α -orthogonal array はあるとしても高々有限個しか存在しないことが坂内によって証明されている。また $\alpha = 3$ の場合について α は Peterson と Reuter によって分類は完成されている。ここでは $\alpha = 2$ の場合, つまり tight 4-design と tight 4-orthogonal array の分類に関する結果を報告する。

定理1 ([3]). tight 4- (v, k, λ) design (ここで $v \geq 2k$) が存在すれば

(1) $(v, k, \lambda) = (23, 7, 1)$ である。

(2) 不定方程式 $2Y^2 = 3 + X\sqrt{3X^2 - 2}$ は $(X, Y) = (3, 3)$ 以外の整数解をもたない。

定理2 ([4]). tight- $OA(N, n, 8, 4)$ が存在すれば次のいふものが成り立つ

(1) $(N, n, 8) = (2^9, 5, 2),$

(2) $(N, n, 8) = (3^5, 11, 3).$

(3) $(N, n, b) = (\frac{1}{2}q^2(q^2-1), \frac{1}{5}(q^2+1), 6)$ において q は
 $q \equiv 3 \pmod{6}$, $q \equiv \pm 1 \pmod{5}$, $q \equiv 5 \pmod{16}$ なる正
 整数.

定理1 における不定方程式はその後 A. Bremner [1] によ
 て解かれたので tight 4-design の分類は完全に終わっている。
 定理2 における $OA(2^4, 5, 2, 4)$ と $OA(3^5, 11, 3, 4)$ は実際に
 存在し存在は unique である。前者は自明な perfect code
 $2^5 \supset 2^1$ の。また後者は ternary Golay code $3^{11} \supset 3^6$ の dual
 code である。定理2 の (3) の parameter ともう orthogonal array
 が実際に存在するかどうかは知られていない。

定理1, 2 の証明には全く同様の議論が適用できる。どちら
 の場合もいろいろの parameter の整数性, とりわけ association
 matrix の固有値の整数性が重要な役割をはたす。

参 考 文 献

- [1] A. Bremner, to appear in Osaka J. Math.
- [2] P. Delsarte, "An algebraic approach to the association
 schemes of coding theory", Philips Res. Reports Suppl.
 1973, No 10.

- [3]. H. Enomoto, N. Ito and R. Noda "On tight 4-designs"
to appear in Osaka J. Math.
- [4]. R. Noda, "On orthogonal arrays of strength 4 achieving
Rao's bound", to appear in Jour. London Math. Soc.