

Resolvent density の Feller 型分解と 対応する Dirichlet space の直和分解

東京教育大学 福岡 正俊

§1. Resolvent density と Dirichlet space

D を R^n の任意の有界領域とす。

関数 $G_\alpha(x, y)$, $\alpha > 0$, $x, y \in D$, $x \neq y$ が

D 上の resolvent density であるとは

$$G_\alpha(x, y) \geq 0, \quad \alpha \int_D G_\alpha(x, y) dy \leq 1,$$

$$G_\alpha(x, y) - G_\beta(x, y) + (\alpha - \beta) \int_D G_\alpha(x, z) G_\beta(z, y) dz = 0$$

が満足されることを示す。

対称な Resolvent density $G_\alpha(x, y)$ に対し

$$(1.1) \quad G_\alpha f(x) = \int_D G_\alpha(x, y) f(y) dy, \quad f \in L^2(D)$$

とすれば (1.1) は $L^2(D)$ 上の norm $\leq \frac{1}{\alpha}$ の有界

線型作用素 G_α を定義する。 G_α は non-negative

definite である。実際 resolvent 方程式より

$$\forall f, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} (G_\alpha f, f)_D = - (G_\alpha^2 f, f)_D = - (G_\alpha f, G_\alpha f)_D$$

$$\leq 0 \quad \text{且つ} \quad |(G_\alpha f, f)_D| \leq \frac{1}{\alpha} (f, f)_D \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

であるから $(G_\alpha f, f)_D \geq 0$ 。

次に $f \in L^2(D) = \mathcal{H}_L$.

$$(1.2) \quad E_\beta^\alpha(f, f) = \beta(f - \beta G_{\beta+\alpha} f, f)_D$$

$$(1.3) \quad T_\beta^\alpha(f, f) = (f - \beta G_{\beta+\alpha} f, f - \beta G_{\beta+\alpha} f)_D$$

と $\alpha' < \infty$ resolvent equation f は容易に

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} E_\beta^\alpha(f, f) = T_\beta^\alpha(f, f) \geq 0, \quad \beta > 0$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} E_\beta^\alpha(f, f) \leq 0, \quad \beta > 0$$

が成り立つ。

定義 1. $f \in L^2(D) = \mathcal{H}_L$.

$$(1.6) \quad E(f, f) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} E_\beta^0(f, f),$$

$$(1.7) \quad \mathcal{F} = \{f \in L^2(D); E(f, f) < +\infty\}$$

と $\alpha' < \infty$. $(\mathcal{F}, E(\cdot, \cdot))$ は 対称な resolvent density $G_\alpha(x, y)$ は $\mathcal{H}_L$ の Dirichlet space である。

$f, g \in \mathcal{F} = \mathcal{H}_L$

である。

$$(1.8) \quad E^\alpha(f, g) = E(f, g) + \alpha(f, g)_D < \infty.$$

次の定理が成立する。

定理 1.

$$(i) \quad f \in \mathcal{F} = \mathcal{H}_L \quad E^\alpha(f, f) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} E_\beta^\alpha(f, f), \quad \alpha > 0.$$

$$(ii) \quad \mathcal{F} \text{ は 内積 } E^\alpha(\cdot, \cdot) \text{ による real Hilbertian.}$$

$$(iii) \quad f \in \mathcal{F} = \mathcal{H}_L \quad \alpha G_\alpha f \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} f \text{ strongly in } L^2(D)$$

(iv) $G_\alpha(L^2(D)) \subset \mathcal{F}$ 且 $f \in L^2(D) \Rightarrow f \in \mathcal{F}$

$$(1.8) \quad E^\alpha(G_\alpha f, g) = (f, g)_D, \quad \forall g \in \mathcal{F}.$$

(v) $B(D)$ を D 上、可算可測関数とす。

$R = G_\alpha(B(D))$ とす。 R は $\mathcal{F}$ に無限次元である

が R は $\mathcal{F}$ の $\mathcal{F}$ 2-dense (w.r. to metric

$E^\alpha(\cdot, \cdot)$ 且 $\alpha > 0$ は任意に固定)。

(vi) $(\mathcal{F}, E)$ には (2) の normal contraction

が operate する。即ち $|f(x)| \leq |g(x)|, \tilde{v}_x \in D$

$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|, \tilde{v}_x, y \in D \text{ 且}$$

$g \in \mathcal{F}$ と仮定する。 $f \in \mathcal{F}$ 2 $E(f, f) \leq E(g, g)$

が成立する。

定理 1 (iii) は (1.4) (1.5) から従う。 (iv) の証明には (iii) を使う。 (v) は (iv) から従う。 (vi) は定義 (1.7) より従う。

D 上の吸収壁 Brown 運動の resolvent density を $G_\alpha^\circ(x, y)$ と表す。 $G_\alpha^\circ(x, y)$ は正値である。

$$(1.9) \quad \widetilde{BLD} = \{f \in L^2(D), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(D), i=1, 2, \dots, n\}$$

f は capacity zero の場合を除き fine continuously とす。 且 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ は distribution の意味で

の微分, $f \in BLD = j\mathbb{R}$

$$(1.10) \quad (f, f)_{D,1} = \sum_{i=1}^N \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 dx$$

と可. $C_0^\infty(D)$ は無限回可微分な compact 関数集合体とすると

$$(1.11) \quad BLD_0 = \overline{C_0^\infty(D)}$$

と可. 但し closure は $(\cdot, \cdot)_{D,1}$ に関して. 次の定理が成立つ.

定理 2. $G_\alpha^0(x, y)$ は対応する Dirichlet space $\mathcal{E}^{(0)}$ $(F^{(0)}, E^{(0)}(\cdot, \cdot))$ とすると, 空間 $(F^{(0)}, E^{(0)})$ は空間 $(BLD_0, (\cdot, \cdot)_{D,1})$ と一致する.

§2. Resolvent density の Feller 型分解

対応する resolvent density に次の条件を課す.

$$(G.a) \quad G_\alpha(x, y) = G_\alpha^0(x, y) + R_\alpha(x, y)$$

と書く, $R_\alpha(x, y)$ は 非負で x に関して

$$\alpha - \text{harmonic} \quad \left(\left(\alpha - \frac{1}{2} \Delta_x \right) R_\alpha(x, y) = 0 \right),$$

(G.b) D の任意の compact subset K に対して

$$\sup_{x \in K, y \in D} R_\alpha(x, y) < +\infty.$$

$M \in D$ a Martin 境界, $K(x, z)$, $x \in D$, $z \in M$
 is Martin-K-function, $\mu \in M$ is a $(D \rightarrow$
 固定点 μ の) harmonic measure μ on M . $\alpha > 0$ is

is $\mathbb{R}^1$

$$(2.1) \quad K_\alpha(x, z) = K(x, z) - \alpha \int_D G_\alpha^\circ(x, y) K(y, z) dy$$

is $\mathbb{R}^1$. $\alpha > 0$, $z, \eta \in M$ is $\mathbb{R}^1$

$$(2.2) \quad U_\alpha(z, \eta) = \alpha \int_D K(x, z) K_\alpha(x, \eta) dx$$

is $\mathbb{R}^1$. M is a domain ψ , ψ is $\mathbb{R}^1$

$$(2.3) \quad (\psi, \psi)'_M = \int_M \psi(z) \psi(z) \left(\int_M U_\alpha(z, \eta) \mu(d\eta) \right) \mu(dz)$$

is $\mathbb{R}^1$. $\psi \in L^2(M) = \{ \psi; (\psi, \psi)'_M < +\infty \}$

is $\mathbb{R}^1$

$$(2.4) \quad H_\alpha \psi(x) = \int_M K_\alpha(x, z) \psi(z) \mu(dz) = H_\alpha^\alpha \psi$$

is $\mathbb{R}^1$

$$(2.5) \quad \hat{H}_\alpha^\alpha(z) = K_\alpha(x, z) / \int_M U_\alpha(z, \eta) \mu(d\eta)$$

is $\mathbb{R}^1$

$$(2.6) \quad \hat{H}_\alpha^\alpha f(z) = \int_D \hat{H}_\alpha^\alpha(z) f(x) dx$$

is operator is defined. $\hat{H}_\alpha^\alpha$ is $B(D)$ is

$B(M)$ is a bounded operator is

$$(2.7) \quad H_\alpha \psi(x) = (\hat{H}_\alpha^\alpha, \psi)'_M, \quad \psi \in L^2(M)$$

存在等式即成立。

定理 3.

$$G_\lambda(x, y) = G_\lambda^0(x, y) + R_\lambda(x, y)$$

若 (G, a) (G, b) 满足 $\exists$ 非平凡 resolvent density

条件, 则 $\exists \lambda > 0$ $\exists \tilde{R}^\lambda : B(M)$ 上有限秩

映射 such that $\forall x, y \in D, \lambda > 0,$

$$(2.8) \quad K_\lambda(x, y) = H_\lambda^\lambda \tilde{R}^\lambda \hat{H}_\lambda^\lambda,$$

且

$$(2.9) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (1_M, \tilde{R}^\lambda 1_M)' = 0.$$

且 1_M 在 M 上恒等于 1 的函数。

§ 3. Dirichlet space 的直接分解.

$G_\lambda(x, y)$ 若 (G, a) (G, b) 满足 $\exists$ 非平凡

resolvent density 条件, $G_\lambda(x, y)$ 满足 $\exists$

Dirichlet space $(\mathcal{F}, E)$ 条件, $(\mathcal{F}^{(0)}, E^{(0)})$

由定理 2 给出, 且 $\mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}$ 且

定理 4.

$$(i) \quad \mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F} \quad \text{且}$$

$$E(u, u) = E^{(0)}(u, u) \quad \text{for } u \in \mathcal{F}^{(0)}.$$

(ii) 若 $\lambda > 0$ 满足, 则 $(\mathcal{F}, E^\lambda)$ 是 λ 的

様に直和分解できる.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} \oplus \mathcal{H}_\alpha$$

但し $\mathcal{H}_\alpha$ は $R_\alpha(B(D))$ の $\|\cdot\|_\alpha$ での closure.

定理 4 の証明のために, 定理 1 を考慮に入れ, 次の補題を示せば充分である.

補題. $\mathcal{F}^* = \mathcal{G}_\alpha^0(B(D)), \mathcal{H}_\alpha^* = R_\alpha(B(D))$

とある.

(i) $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ 且 $E(u, u) = E^{(0)}(u, u)$ for $u \in \mathcal{F}^*$.

(ii) $\mathcal{F}^* \perp \mathcal{H}_\alpha^*$ w.r. to $E^\alpha(\cdot, \cdot)$.

この補題は定理 3 を用いて次の様に証明出来る.

補題の証明. (i) $u = G_\alpha^0 f, f \in B(D)$

とすると $E_\beta^0(u, u) = E_\beta^{(0),0}(u, u) - \beta^2(R_\beta u, u)_D$.

と $\beta \rightarrow +\infty$ 定理 1 より

$$\beta^2(R_\beta u, u)_D = \beta^2(H_\beta \tilde{R}^\beta(\hat{H}_\beta G_\alpha^0 f), G_\alpha^0 f)_D$$

$$= \beta^2(\tilde{R}^\beta(\hat{H}_\beta G_\alpha^0 f), \hat{H}_\beta G_\alpha^0 f)_M' = \frac{\beta^2}{(\beta-1)^2} (\tilde{R}^0 \varphi_\beta, \varphi_\beta)_M'$$

$$\xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{即ち} \quad \varphi_\beta = (\hat{H}_1 - \hat{H}_\beta)f.$$

(ii) $f, g \in \mathcal{B}(M) \subset \mathcal{F}$. 簡単な計算で

上の (i) の結果より

$$E^\alpha(G_2^\alpha f, R_2 g) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \beta(G, R_{\beta+\alpha} G_2^\alpha f)_0$$

がわかる。 再び 定理 3 を使う。

$$\beta(G, R_{\beta+\alpha} G_2^\alpha f)_0 = (\hat{H}_2 g, \hat{R}^{\beta+\alpha} (\hat{H}_2 - \hat{H}_{\beta+\alpha}) f)_M'$$

$$\leq (I_M, \hat{R}^{\beta+\alpha} I_M)_M' \sup_{z \in M} |\hat{H}_2 g(z)| \cdot \sup_{z \in M} |\hat{H}_2 f(z)|$$

$$\xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0.$$