

## 可算離散空間の積への $C^*$ -, $C$ - および $P$ -埋め込み

神奈川大学・工学部

平田 康史 (Yasushi Hirata) 矢島 幸信 (Yukinobu Yajima)

Faculty of Engineering, Kanagawa University

空間は regular  $T_1$  とする.  $\mathbb{R}$  は実数直線,  $\mathbb{I} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  は可算離散空間とする.

**定義 1.**  $E$  は空間  $X$  の部分集合とする. 連続関数  $f: E \rightarrow Y$  が  $X$  上の連続関数に拡張できるとは, 連続関数  $\hat{f}: X \rightarrow Y$  で,  $\hat{f}|_E = f$  となるものが存在することである.  $E$  が  $X$  において  $C^*$ - (resp.  $C$ -,  $P$ -) **embedded** であるとは,  $E$  から  $\mathbb{I}$  (resp.  $\mathbb{R}$ , バナッハ空間) への任意の連続関数が,  $X$  上の連続関数に拡張できることである.

cozero cover を使った次のような特徴づけもある.

**事実 1** (see [1]).  $E$  は空間  $X$  の空でない部分集合とする.  $E$  が  $X$  において  $C^*$ - (resp.  $C$ -,  $P$ -) **embedded** であるためには,  $E$  の任意の有限 (resp. 可算, 局所有限) cozero 被覆  $\mathcal{U}$  に対して,  $X$  の有限 (resp. 可算, 局所有限) cozero 被覆  $\mathcal{V}$  で,  $\mathcal{V}|_E = \{V \cap E : V \in \mathcal{V}\}$  が  $\mathcal{U}$  を細分するものが存在することが必要十分である.

閉集合については Tietze の拡張定理がよく知られている.

(**Titze の拡張定理**) 空間  $X$  に対して, 以下は同値な条件である.

- $X$  は正規空間.
- $X$  の任意の閉集合は  $X$  において  $C^*$ -embedded.
- $X$  の任意の閉集合は  $X$  において  $C$ -embedded.

$P$ -embedded についても同様の定理が知られている. [2]

(**Dowker の拡張定理**) 空間  $X$  に対して, 以下は同値な条件である.

- $X$  は族正規空間.
- $X$  の任意の閉集合は  $X$  において  $P$ -embedded.

一般に次の implication が成り立つ.

$$P\text{-embedded} \Rightarrow C\text{-embedded} \Rightarrow C^*\text{-embedded}$$

逆が成り立つのはどのようなときであろうか。矢島は最近の研究で、次のような結果を得た。

**定理の概略.**  $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  は一般化された距離空間の積で、各有限 subproduct がパラコンパクトなものとする。  $F \subset X$  がある種の条件をみたす閉集合のとき、  $F$  が  $X$  において  $C$ - ( $C^*$ -)embedded in  $X$  ならば、  $F$  は  $X$  において  $P$ -embedded である。

ここで、一般化された距離空間とは、  $p$ -空間、  $\Sigma$ -空間、 semi-stratifiable 空間を、ある種の条件をみたす閉集合とは正則閉集合、  $G_\delta$  な閉集合、近傍レトラクトを意味し、これらのいくつかの組み合わせのもとで、  $C = P$  もしくは  $C^* = P$  が成り立つという結果である。どの組み合わせのときに成り立つかについては、また別の機会に述べることにして、ここでは詳細は省略する。“ある種の条件を満たす閉集合”のところを、一般の閉集合にできないか、という疑問が自然に生じる。 $\mathbb{N}^\omega$  は距離付け可能、 $\{0, 1\}^\kappa$  はコンパクトであり、いずれも族正規であるから、任意の閉集合は明らかに  $P$ -embedded である。そこで、(一般化された) 距離空間の正規でない積で最もシンプルなものとして、 $\mathbb{N}^{\omega_1}$  に興味をもった。

**Question.**  $\mathbb{N}^{\omega_1}$  において、

- (1)  $C$ -embedded な閉集合は、 $P$ -embedded か?
- (2)  $C^*$ -embedded な閉集合は、 $C$ -embedded か?

(1) については、次のような結果が得られた。

**定理 1.**  $\mathbb{N}^{\omega_1}$  において、 $C$ -embedded な部分集合は  $P$ -embedded である。

$f, g \in \mathbb{N}^\omega$  に対して、

$$f \leq^* g \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists m \in \omega \forall n \in \omega (m \leq n \rightarrow f(n) \leq g(n))$$

として  $\leq^*$  を定義する。  $B \subset \mathbb{N}^\omega$  が **bounded** とは、  $f \leq^* g$  for all  $f \in B$  となる  $g \in \mathbb{N}^\omega$  が存在することである。  $C \subset \mathbb{N}^\omega$  が **unbounded** であるとは、それが bounded でない、ということである。基数  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{c}$  は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{\kappa : \text{MA}(\kappa) \text{ fails}\}, \\ \mathfrak{b} &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{|C| : C \subset \mathbb{N}^\omega \text{ is an unbounded family}\}, \\ \mathfrak{c} &\stackrel{\text{def}}{=} 2^\omega. \end{aligned}$$

よく知られているように、

- $\omega_1 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$ . 特に、連続体仮説を仮定すると  $\mathfrak{b} = \omega_1$  である。(see [3])

- ZFC が無矛盾ならば,  $\text{ZFC} + “\omega_1 < \mathfrak{m} = \mathfrak{c}”$  も無矛盾である [5]. 特にそのようなモデルにおいては  $\mathfrak{b} > \omega_1$  となる.

Question の (2) については, 次の結果が得られた.

**定理 2.**  $\mathfrak{b} > \omega_1$  を仮定する.  $\mathbb{N}^{\omega_1}$  において,  $C^*$ -embedded な部分集合は  $C$ -embedded である.

一方で, 次のことが知られている.

**定理 3** ([4]).  $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$  の *closed discrete* な可算部分集合で,  $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$  において  $C^*$ -embedded であるが  $C$ -embedded ではないものが存在する.

このことから, 連続体仮説を仮定すると,  $\mathbb{N}^{\omega_1}$  において  $C^*$ -embedded であるが  $C$ -embedded ではない閉集合が存在することがわかる.

定理 2, 3 から, 次の系が得られる.

**系 1.**  $\mathbb{N}^{\omega_1}$  において,  $C^*$ -embedded であるが  $C$ -embedded ではない (閉) 部分集合が存在するかどうかは, ZFC のみでは決定できない.

## 参考文献

- [1] R. A. Alo and H. L. Shapiro, *Normal topological space*, Cambridge University Press, London (1974).
- [2] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Ark. Mat. **2** (1952), 307–313.
- [3] K. Kunen, *Set theory*, Studies in Logic **34**, College Publications, London (2011).
- [4] E. Pol and R. Pol, *Note on countable closed discrete sets in products of natural numbers*, Topol. Appl. **175** (2014), 65–71.
- [5] R. M. Solovay and S. Tennenbaum, *Iterated Cohen extensions and Souslin’s problem*, Ann. of Math. **94** (1971), 201–245.