

Instantons とその複素領域に於ける poles.

京大 数理研 村瀬 元彦

§. 1.

(Anti-)self-dual Yang-Mills 方程式の 1-instanton solution はこれまでに知られてゐる解ですべて尽くされることか様々な方法で証明されている。ここでは [4] に述べられた定理を用いてそれを示してみよう

Anti-self-dual Yang-Mills 方程式とは, $su(2)$ -値 vector potential A_μ ($\mu=0,1,2,3$) に対する方程式

$$(1) \quad F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad , \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -F_{\mu\nu}$$

のこゝである。 $\mathbb{R}^4$ の座標 x_0, x_1, x_2, x_3 を固定して,

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu dx_\mu, \quad F = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$$

と書けば, これは

$$(1) \quad F = dA + \frac{1}{2} [A, A]$$

$$(2) \quad *F = -F \quad (* \text{ は Hodge star operator})$$

とも表わされる。 x_0 を x_4 と書き直し、向きもこめて x_1, x_2, x_3, x_4 を座標にとれば、(1), (2) の解 A は self-dual 方程式 $F = *F$ の解になるので、以下では座標を fix し anti-self-dual 方程式のみを扱う。

物理学者達がこの方程式を解くときに用いた手法は次の通りである。 [5]

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{03} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & \bar{\sigma}_{13} &= -\bar{\sigma}_{02} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{01} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

を用いて

$$\bar{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} -i \sum_{\mu < \nu} \bar{\sigma}_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$$

を作る。 $\bar{\sigma}$ は constant $su(2)$ -valued self-dual 2-form である。今、実数値 1-form $a = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu dx_\mu$ によって

$$(3) \quad A = *(a \wedge \bar{\sigma})$$

と表わされる様な A を考えよう。このとき、先の (1), (2) と次の (4), (5) とは同値である：

$$(4) \quad *da = -da$$

$$(5) \quad d*a + a \wedge *a = 0.$$

(Self-dual solution かほしければ、 $\bar{\sigma}$ の定義を anti-self-dual になる様にかえれば、^(5.11) 同様に a によって (3) で作った A がちゃんと self-dual になる。つまりこの方程式も a のレベルでは anti-self-duality になおる訳である。)

$\rho \in$ 実数値函数とする. もし $a = d \log \rho$ と書かれるなら,

(4) は自動的に満たされ, (5) は次の様になる;

$$\begin{aligned} & d * d \log \rho + d \log \rho \wedge * d \log \rho \\ &= \frac{1}{\rho} d * d \rho - \frac{1}{\rho^2} d \rho \wedge * d \rho + \frac{1}{\rho^2} d \rho \wedge * d \rho \\ &= \frac{1}{\rho} d * d \rho \\ &= -\frac{1}{\rho} * (\Delta \rho). \quad \Delta \text{ はラプラシアン.} \end{aligned}$$

従って (5) は $\frac{1}{\rho} \Delta \rho = 0$ と同値.

1-instanton solution を得るには

$$\begin{aligned} (6) \quad \rho &= 1 + \lambda^2 / \sum_{\mu=0}^3 (x_\mu - y_\mu)^2 \\ \lambda &\in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad y = (y_0, \dots, y_3) \in \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

とすればよい.

$$(\partial_\mu)^2 \rho = -2\lambda^2 / (\sum_\nu (x_\nu - y_\nu)^2)^2 + 8\lambda^2 (x_\mu - y_\mu)^2 / (\sum_\nu (x_\nu - y_\nu)^2)^3$$

ゆえ $\Delta \rho = 0$ となる.

定理. 1-instanton solution は (6) の形の ρ を用いて

$$(7) \quad A = * (d \log \rho \wedge \bar{\sigma})$$

と表わされるものに限る.

証明. [4] によれば, instanton solution はその複素領域に於ける poles の場所だけによって unique に定まる. 但し: ここで扱う singularity は gauge 変換で消すことの出来ないも

のみである。

そこで、まづ領域を複素化しよう。(1), (2) は conformal invariant なので方程式は $S^4 \supset \mathbb{R}^4$ で定義されておいてよい。但し $S^4 = \{ t = (t_1, \dots, t_5) \in \mathbb{R}^5 \mid t_1^2 + \dots + t_5^2 = 1 \}$ 。

このとき、

$$Gr \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z = (z_0 : \dots : z_5) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5 \mid z_0^2 = z_1^2 + \dots + z_5^2 \right\}$$

と定めれば、 Gr は S^4 の自然な複素化と見做せるであろう。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^4 & & \hookrightarrow & S^4 & \hookrightarrow & Gr & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5 \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) & & & & & & & (z_0 : z_1 : \dots : z_5) \end{array}$$

による $\mathbb{R}^4$ の $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ への埋め込みは、

$$(8) \quad \begin{aligned} x_0 &= z_4 / (z_0 + z_1), & x_1 &= z_5 / (z_0 + z_1) \\ x_2 &= z_2 / (z_0 + z_1), & x_3 &= z_3 / (z_0 + z_1) \end{aligned}$$

によ、与えられる。

さて、(7) の pole で gauge 変換で消せなものは、方程式 $p=0$ で定義される Gr の divisor であることが判るから、それを $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ の divisor と Gr との intersection として表そう。その $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ の divisor の定義方程式は

$$\begin{aligned} (9) \quad & (y^2 + \lambda^2 + 1) z_0 + (y^2 + \lambda^2 - 1) z_1 \\ & - 2y_2 z_2 - 2y_3 z_3 - 2y_4 z_4 - 2y_5 z_5 = 0 \\ & y^2 = \sum_{\mu=0}^5 y_{\mu}^2. \end{aligned}$$

である。

(この様に, 1-instanton には degree 1 の divisor が対応する. 一般に, k -instanton には degree k の reduced divisor が対応する. 但し $\text{Pic}(Gr) \cong \mathbb{Z}$ に注意.)

12, $\sum_{l=0}^5 c_l z_l = 0$ なる hyperplane $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ による section が instanton の pole であるとするとき,

$$\textcircled{1} \quad c_l \in \mathbb{R} \quad l=0, \dots, 5.$$

$$\textcircled{2} \quad H \cap S^4 = \emptyset$$

が成り立つ. ([4].) この条件を少し書きかえてみよう.
二次形式 $z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - z_5^2$ により同型

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5 \cong (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5)^*$$

を定めれば, hyperplane は次のよう

に点に対応する;

$$H = \{ z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5 \mid \sum c_l z_l = 0 \} \longleftrightarrow (c_0, c_1, -c_1, -c_3, -c_4, -c_5) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5.$$

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ の同次座標 $(z_0, \dots, z_5)$ に関する complex conjugation による fixed point set を $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ で表わせば, $S^4 = \text{Gr} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$.
したがって, 条件 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ は

$$\textcircled{1}' \quad c = (c_0, -c_1, \dots, -c_5) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$$

$$\textcircled{2}' \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 < c_0^2$$

と同値である: とか計算により確かめられる. これは $\mathbb{R}^5$ の単位球面の内側を表わしている.

一方, (9) なる hyperplane に対応する点

$$(y^2 + \lambda^2 + 1; -y^2 - \lambda^2 + 1; 2y_2; 2y_3; 2y_0; 2y_1)$$

により、①', ③' も満たすすべての C が得られるから、
これより、すべての 1-instanton solution が (7) により得られることが判る。□

§.2.

A は、底空間を S^4 , fibre を $SU(2)$ に持つ C^∞ -principal bundle P の connection としても解釈出来る。このとき F は curvature であり、gauge 変換とは bundle automorphism による connection form の引き戻しを指している。

P に associate した rank 2 - vector bundle を E で表わす。
 $E = P \times_{SU(2)} \mathbb{C}^2$ [4] に示した様に E は S^4 から Gr に「解析接続」出来る。その証明には Atiyah-Ward [1] によって作られた $\mathbb{P}^3$ 上の algebraic vector bundle を full に用いたのだから、実はそのことは本質的ではない。実際、M. Maruyama [2] による elementary transform を用いて、 E から直接に $Gr \setminus \{1\text{点}\}$ 上の「解析接続された」^{alg.} vector bundle を構成出来る場合がある。しかし [4] でこの構成法を用いたかったのは、ひとつには次の問題が解決されたことによる；

問題. $S^4 = \{t \in \mathbb{R}^5 \mid t_1^2 + \dots + t_5^2 = 1\}$ により

実4次元球面 S^4 に自然な real algebraic structure を入れるとき, 底空間を S^4 , fibre を $\mathbb{C}^n$ とする real algebraic bundles E, F が real analytic に同型ならば, real algebraic に同型か?

これは次の様に言いかえてもよい.

問題. S^4 上の real algebraic vector bundle で同じ Second Chern class を持つものは unique か?

±2, Instanton A に対応して定まる $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ 上の algebraic vector bundle of rank 2 を $E(A)$ で表わすとき, $E(A)|_{\ell} \neq 0$ となるような projective line $\ell \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ を A の jumping line と呼ぶ.

§1 で定義した Gr は実は $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ の lines を分類するグラマン多様体であり, したがって A の jumping line たゞは $Gr = Gr(1,3)$ の subset を為す. それを $J(A)$ と書くと, $J(A)$ は $Gr(1,3)$ の divisor であり, E は $Gr \setminus J(A)$ 上の (affine)-algebraic vector bundle $\widehat{E}_A$ に解析接続出来る, それにとり, A も $\widehat{E}_A$ の $(1,0)$ -型解析的接続に解析接続出来るのであった. このとき, $\widehat{A}$ は $J(A)$ には $\widehat{A}$ 解析接続出来ない

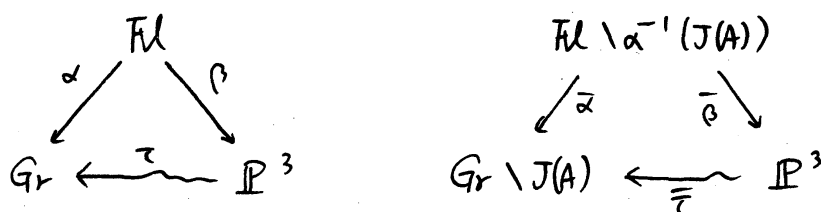
11. ことを言える;

$Fl = Fl(0, 1, 3) \hookrightarrow Gr(1, 3) \times \mathbb{P}^3$ は flag 多様体,

$\alpha: Fl \rightarrow Gr, \beta: Fl \rightarrow \mathbb{P}^3$ は natural projection である.

また $\bar{\alpha} = \alpha|_{Fl \setminus \alpha^{-1}(J(A))}, \bar{\beta} = \beta|_{Fl \setminus \alpha^{-1}(J(A))}$

とおく. $\tau = \alpha \circ \beta^{-1}, \bar{\tau} = \bar{\alpha} \circ \bar{\beta}^{-1}$ は flag と graph には τ algebraic correspondence である.



[3] の命題 3 は, $\forall \zeta \in \mathbb{P}^3$ に対し,

$\tilde{A}|_{\bar{\tau}(\zeta)}$ か $\tilde{E}_A|_{\bar{\tau}(\zeta)}$ の flat connection である
ことを主張している. 更に, もし $\tilde{A}|_{\bar{\tau}(\zeta)}$ か, $J(A) \cap \tau(\zeta)$ の
ある component X まで拡張されたとき, $\tilde{E}_A|_{\bar{\tau}(\zeta)}$ の flat
section は X 上に flat に拡張される. $\tilde{E}_A = \alpha_* (\beta^* E(A))|_{Gr \setminus J(A)}$
により $\tilde{E}_A$ を作ったことを思い出せば ([4]), X に対応
する $\mathbb{P}^3$ の line は jumping line ではない. これは矛盾.

$\tilde{E}_A$ を $\bar{\alpha}$ で持ち上げた bundle $\bar{\alpha}^* \tilde{E}_A$ は, 自然に

$\beta^* E(A)|_{Fl \setminus \alpha^{-1}(J(A))}$ と同型である. 従って $\bar{\alpha}^* \tilde{A}$ は
 $\beta^* E(A)$ の connection と思うと, singularity を有している.
しかし $\forall \zeta \in \mathbb{P}^3$ に対して $\bar{\alpha}^* \tilde{A}|_{\beta^{-1}(\zeta)}$ が flat である

ることには変わりない. ここで $\beta^*E(A)|_{\beta^{-1}(\zeta)}$ は trivial bundle だから, $\beta^{-1}(\zeta) \cong \tau(\zeta) \cong \mathbb{P}^2$ 上の方程式

$$dY + (\alpha^* \hat{A}|_{\beta^{-1}(\zeta)}) \cdot Y = 0$$

$\Leftrightarrow dY + (\hat{A}|_{\tau(\zeta)}) \cdot Y = 0$ は integrable で, monodromy を持たない線型微分方程式である.

従って, $\tau(\zeta) \subset Gr$ から $\zeta \in \mathbb{P}^3$ に holomorphic によることも考えれば, $(\hat{E}_A, \hat{A})$ は, integrable な線型微分方程式

$$(10) \quad dY + B(\zeta) \cdot Y = 0, \\ B(\zeta) = \hat{A}|_{\tau(\zeta)},$$

の monodromy preserving deformation と考えられる. しかし total space Gr 上で $\hat{A}$ は flat にはなっていないことに注意. $\tau(\zeta)$ に制限したときだけ flat (integrable) なのである. また, monodromy も $\tau(\zeta)$ に制限したときだけ出て来るという点である.

$E(A)$ の ζ に於ける fibre は, 方程式 (10) の解空間と自然に同一視出来る.

$B(\zeta) = \hat{A}|_{\tau(\zeta)}$ は $\tau(\zeta) \cap J(A)$ の generic point ではない simple pole になっている. これは, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の変形 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell))$, $\ell \equiv 0 \pmod{2}$ (ここは,

vector bundle $E \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対して各 fibre を projectify して作った $\mathbb{P}^{n-1}$ -bundle を $\mathbb{P}(E)$ で表わす, γ を general に変形して $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に持ってゆくと, 必ず途中で

$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ を経過する, ということ, この $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ の universal family が 1 次元であるということに対応している.

こういった complex manifold ^{の変形} との関係については, 「線型微分方程式の超局所解析, 1979年1月」の報告集で詳しく論ずることにする.

$\text{Gr}(1,3)$ のどんな divisor が instanton の pole になり得るのか, は残念ながらよく判らない. 1-instanton の時には容易だった計算も, 一般にたるとたんに面倒になり, 今のところよい必要条件が求められなっている. 次数 k の divisor 全体の次元から見れば, k -instanton の次元 $8k-3$ は随分小さい. とうとう制限が効いてこうなるのか, はこのような方法では今の所さっぱり判らない.

(1979年早春. Do A.K.m.p!)

文献

- [1] Atiyah, M.F. & Ward, R.S. : Instantons and Algebraic Geometry . Commun. Math. Phys. 55, 117-124 (1977)
- [2] Maruyama, M. : On a family of algebraic vector bundles. Akizuki Volume . Kinokuniya, 95-146 (1973)
- [3] 村瀬元彦 : Classical Euclidean Yang-Mills 場に於ける Self-Duality の幾何学的意味について . 数理研究発表録 324 . 64-96 (1978)
- [4] — : Yang-Mills 方程式の解の空間について . 城崎代数幾何 symposium, 1978 年 12 月 .
- [5] Jackiw, R., Kohl, C., & Rebbi, C. : Conformal properties of pseudoparticle configurations . Phys. Review D. 15, 1642-1646 (1977).