

グラフ方程式について

日本医大	秋山 仁
東京理大・理	浜田 隆資
日本医大	金子 紀美子

§1. 序

グラフ方程式の概念は、最初に Cvetković, Simić [14], [15] によって導入された。この概念は、グラフ理論の古くからある分野、たとえばグラフの特徴づけ、因子分解、同型性、種々のグラフの不変数(点、線の数から、難しいものはスペクトラム、染色数 etc.)等と深い関連をもつものである。このテーマの特殊性により、体系的な理論の発展は難しい。しかしながら、個々のグラフ方程式の興味は、グラフのどの不変数に着目し、いかに彩やかに解くか、または解グラフが面白いもの(Petersen Graph, Platonic Graph etc.)になるものを見つけることが、このテーマの最大の焦点であり、そのために、グラフのあらゆる性質を調べる必要が生ずる。ここに既に発表したものも含めて、いくつかのグラフ方程式を分類

して述べる。

§ 2. グラフ方程式の定義と分類

グラフの集合に関して種々のオペレーションが定義されている。これらのオペレーションを用いて、有限個のグラフの組 $G_1, G_2, \dots, G_n$ をもとに $f(G_1, G_2, \dots, G_n)$ によって表わされる合成グラフを作り、 $f(G_1, G_2, \dots, G_n)$ を $G_1, G_2, \dots, G_n$ を変数とする「代数式」とみなすことにする。ここで、同じ変数の集合をもつ二つの代数式を等しいとおくことにより、グラフ方程式という概念を導入することができる。一般にそれは形式的に次のように書き表わす。

$$(*) \quad f(G_1, G_2, \dots, G_n) = g(G_1, G_2, \dots, G_n)$$

この時、グラフ方程式(*)をみたすすべての n 組のグラフ $G_1, G_2, \dots, G_n$ を見つけることを「その方程式を解く」という。但し、グラフ G は多重線やループをもたないものとし、二つのグラフが「等しい」ということは、それらが同型であると定義する。(グラフ G が多重線やループをもつ場合のグラフ方程式もいくつか知られているが、ここでは扱わないことにする。)

グラフのオペレーションとして、ここでは complement $\bar{G}$ 、line graph $L(G)$ 、total graph $T(G)$ 、middle graph $M(G)$ 、

the n -th power graph G^n , the n -th repeated line graph $L^n(G)$, clique graph $K(G)$ を使う。また、記号については、 K_n (complete graph), $K_{m,n}$ (complete bipartite graph), C_n (cyclic graph), P_n (path) を用いる。その他の用語は Harary [19] にある。

ここでは、グラフ方程式と変数の個数、及び型によって次のように大別する。

(I) 1つの未知グラフを含むグラフ方程式

(I)-1 $\varphi(G) = C$

(I)-2 $\varphi(G) = G$

(I)-3 $\varphi(G) = \psi(G)$

(II) 2つの未知グラフを含むグラフ方程式

(II)-1 $\varphi(G) = H$, (H にある制約を加える。)

(II)-2 $\varphi(G) = \psi(H)$

(II)-3 $F = \varphi(G) = \psi(H)$

但し、 φ, ψ はグラフに関するあるオペレーションを表わし、 C はある与えられたグラフとする。

(I)-1 方程式 $\varphi(G) = C$

この方程式に関して次のような問題が考えられる。

(i) 解の存在と一意性. すなわち解が存在するための C の条件および解が一意的に決まるための C の条件を見つけること。

(ii) 具体的な C に対して, 方程式を解くこと。

この種の方程式の解の存在に関する C の条件を求めることは, 'グラフの特徴づけ' と一致する。

(I)-2 方程式 $\varphi(G) = G$

オペレーション φ に関して不変なグラフ G を求めることである。

(I)-3 方程式 $\varphi(G) = \psi(G)$

ある二つの異なるオペレーション φ と ψ をほどこして得られたグラフも等しくなるようなグラフ G を求める。

(II)-1 方程式 $\varphi(G) = H$ (H にある制約を加える。)

二つの未知グラフ G と H をもつ方程式 $\varphi(G) = H$ は一般的すぎるので, 解の集合をせばめるために, あるいは問題をさらに興味深いものにするために, H にいくつかの制約を与える。たとえば, H が planar, outerplanar, connected など。

(II)-2 方程式 $\varphi(G) = \psi(H)$

あるオペレーション φ と ψ をほどこして得られたグラフが等しくなるような G と H の組を求める。

(II)-3 方程式 $F = \varphi(G) = \psi(H)$

この連立グラフ方程式 $F = \varphi(G) = \psi(H)$ をみたすグラフ F の集合を求める。

§ 4 と § 5 で、以上の分類にしたがって、グラフ方程式の例を示す。

§ 3 グラフ方程式の proof techniques

グラフ方程式を解く方法は、グラフのあらゆる性質を駆使している。たとえば、グラフ方程式 $f(G_1, \dots, G_n) = g(G_1, \dots, G_n)$ について、それをいくつか上げると、

- (1) $f(G_1, \dots, G_n)$ と $g(G_1, \dots, G_n)$ の不変数を比較する方法
(点と線の個数などの簡単な不変数や、彩色数やスペクトラムなどの複雑な不変数を比較) (定理 6(1), 定理 21 など)
- (2) 線グラフなどのように禁断誘導部分グラフが知られているようなものは、それを使う方法 (定理 6(4), 定理 5, 定理 24 など)
- (3) 隣接行列を使う方法
- (4) 不動点定理を使う方法

などにより、解となりうるグラフの集合を小さくしていくのが主な手段である。また、

- (5) 置換群も応用する方法 (定理 4)

により、首尾よく解を得た例 [26] もある。今後さらに、新

しい手法を用い、グラフ方程式を解くことが期待される。

§4 1つの未知グラフを含む種々のグラフ方程式

(I)-1 $\varphi(G) = C$ のタイプ

任意の G に対して、方程式 $\varphi(G) = C$ をみたす C の条件を調べる。

1° $L(G) = C$

次の Beineke の定理 [11] により、 C は特徴づけられる。

定理 1 (Beineke) 次の4つの命題は互いに同値である。

- (1) C は線グラフである。
- (2) C の線全体をいくつかの完全部分グラフに分割して、それらの部分グラフの多くても2つと、 C の1点を共有するようにできる。[21]
- (3) C は $K_{1,3}$ を誘導部分グラフとしてもたず、かつもし G の2つの奇三角形が1つの線を共有すれば、それら2つの三角形の点によって誘導された部分グラフは K_4 である。[27]
- (4) 図1の9個のグラフは、すべて G の誘導部分グラフにはなり得ない。

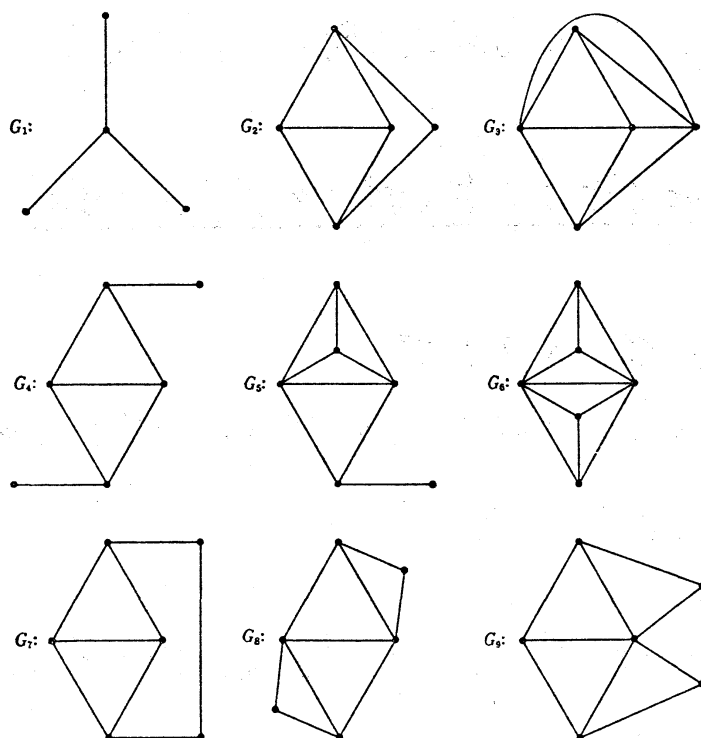


図 1.

$$2^{\circ} \quad M(G) = C$$

定理 2 (秋山・浜田・吉村 [7]) 任意のグラフ G に対して、 $M(G) = C$ となるための C の必要十分条件は、 C が次の二つの条件をみたすことである。

- (1) C の線全体をいくつかの完全部分グラフに分割して、これらの部分グラフの 3 個以上に共有されている点はない。
- (2) 各完全部分グラフは、ひとつにだけひとつの他の完全部分グラフには含まれない点をもつ。

$$3^\circ \quad L(G) = C$$

この方程式をみたす C が、図2の9個のグラフも誘導部分グラフとして含まないことは、定理1より明らかである。さらに、Cvetković と Simić は次の定理を示した [16]。

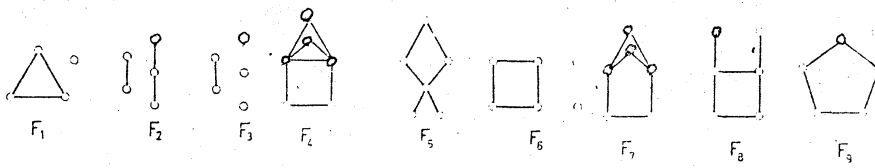


図2

定理3 グラフ C は三角形を含まないとする。このとき $L(G) = C$ をみたすための必要十分条件は、 C が次の3つのグラフの中のひとつの誘導部分グラフになっていることである。(図3)

(1) $K_1 \cup (K_{m,n} - pK_2)$ (2) $K_{3,n} - C_6$ (3) Peterson graph

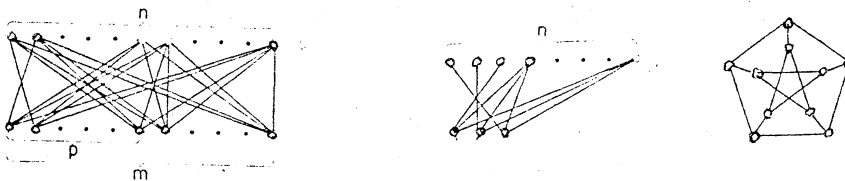
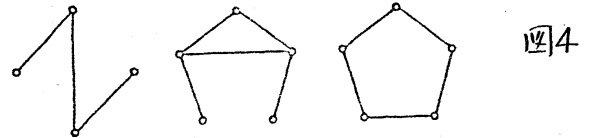


図3

(I)-2 $\varphi(G)=G$ のタイプ1° $\overline{G}=G$

グラフ G の点の数が $4n$ または $4n+1$ ($n=1, 2, \dots$) であれば、この方程式をみたす解は必ず存在する。この方程式をみたすグラフを自己補グラフといい、Ringel はこの構成法を示した [26]。(図4)



定理4 n 個の点からなる完全グラフ K_n の点を $1, 2, \dots, n$ で表わし、点 i と j とで決まる線 e を $e=(i, j)$ と書く。グラフの点の数は、 $4n$ または $4n+1$ とし、 σ を置換群 S_n の元で、そのサイクル表示への分解が長さ 1 または $4n$ ($n=1, 2, \dots$) 以外のものはむたず、長さ 1 のサイクルも高々 1 個しか現われないものとする。完全グラフ K_n から任意に線 e_1 をとり青にぬる。 $\sigma^2(e_1), \sigma^4(e_1), \sigma^6(e_1), \dots$ を青にぬり、 $\sigma(e_1), \sigma^3(e_1), \dots$ を赤にぬる。 K_n の中から任意にぬられていない線 e_2 をとり、再び $e_2, \sigma^2(e_2), \dots$ を青にぬり、 $\sigma(e_2), \sigma^3(e_2), \dots$ を赤にぬる。この操作をぬられていない線が存在する限り続ける。このとき、青色の線からなるグラフが自己補グラフであり、また逆に、ある自己補グラフはこの方法で得られる。

$$2^\circ \quad L^n(G) = G$$

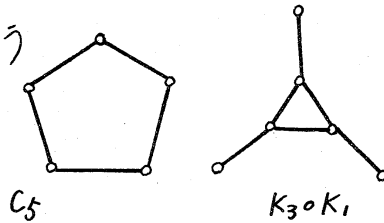
この解は次数2の正則グラフである。Menon [24], [25].

(I)-3 $\varphi(G) = \psi(G)$ のタイプ

$$1^\circ \quad L(G) = \overline{G}$$

Aigner [1] により、この解は図5のように C_5 と $K_3 \circ K_1$ だけである。

図5



$$2^\circ \quad L^n(G) = \overline{G}$$

Simić [29] は 1° の方程式を拡張して、次の定理を得た。

定理5 グラフ方程式 $L^n(G) = \overline{G}$ の解は次のようである。

(1) $n=1$ のとき、 $G = C_5$ または $G = K_3 \circ K_1$

(2) $n=2$ のとき、 $G = C_5$ または $G = K_3 \circ \overline{K_2}$

(3) $n \geq 3$ のとき、 $G = C_5$

$$3^\circ \quad L(G) = G^n$$

$$4^\circ \quad L(G) = \overline{G}^n$$

$$5^\circ \quad L(G) = (\overline{G})^n$$

上記 $3^\circ \sim 5^\circ$ のグラフ方程式の解は次の定理 (秋山、金子、Simić) [8] による。

定理6

(イ) $L(G) = G^n$ の解は mK_3 である。(但し、 m は任意の正整数である。)

(ロ) $L(G) = \overline{G}^n$ ($n \geq 2$) の解は C_{2n+3} である。

(ハ) $L(G) = (\overline{G})^n$ ($n \geq 2$) の解は存在しない。

(証明)

(イ) あるグラフ H の最大クリークに含まれる点の数を $c(H)$ で表わすと、次の二つの関係式が導びかれる。

$$(a) \quad c(L(G)) = \begin{cases} \Delta(G) & \Delta(G) \geq 3 \quad \text{or} \quad \Delta(G) \leq 1 \\ 3 & \Delta(G) = 2 \quad \text{and} \quad K_3 \subseteq G \\ 2 & \Delta(G) = 2 \quad \text{and} \quad K_3 \not\subseteq G \end{cases}$$

$$(b) \quad c(G^n) \geq \Delta(G) + 1$$

但し、 Δ はグラフ G の点の次数の極大なものとし、 $\subseteq$ は誘導部分グラフとして含むという関係を示すものとする。(a) は線グラフに関する Whitney の定理[30]よりすぐ導びかれ、(b) も明らかである。二つのグラフが同型であるためには二つのグラフの不変数も等しくなければならないので、 $c(L(G)) = c(G^n)$ となり、 $G = mK_3$ が得られる。

(ロ) まずいくつかの性質を示す。

(1) $\overline{L(G)} = \overline{G}^n$ の方程式と同値である。

(2) G は連結グラフである。；さもなくば、任意の非負整数 i に対し、 G_i を少なくとも1つ線を含む連結グラフとし、 m を

任意の非負整数とし、 $G = (\bigcup_{i \in I} G_i) \cup mK_1$ とおく。 $|I| > 1$ とすると、 $\overline{L(G)}$ は連結だが、 G^n は非連結なので矛盾となり、やえに $|I| = 1$ 。すなわち、 $G = G_1 \cup mK_1$ ($m \geq 0$)。今、 $m \neq 0$ とする。 $G_1 = K_2$ ならば方程式をみたさないことは容易にわかる。また、 G_1 が二本以上の線を含めば、 $G^n \supseteq K_3 \cup K_1$ となるが、Beineke の定理 [11] より、 $K_{1,3} \not\subseteq L(G)$ なので矛盾する。やえに、 $m = 0$ すなわち、 G は連結グラフでなければならない。

(3) G はユニサイクルグラフである。 $|V(G)| = |V(\overline{G}^n)| = |V(L(G))| = |E(G)|$ より、 G はユニサイクルグラフである。

(4) G の任意の点 v に対し、 $d(u, v) \geq n+1$ をみたす点 u が少なくとも v とつ存在する。 $\therefore$ もしなくば、 G のある点 v に対して、 G のすべての点が距離 n 以下となり、 v は $\overline{G}^n$ において孤立点となり (2) に反するからである。

(5) G には、条件 (*) をみたす 4 点 v_0, v_i, v_j, v_k は存在しない。

$$(*) \quad d(v_0, v_s) \geq n+1 \quad (s=i, j, k) \quad \text{かつ} \quad d(v_s, v_t) \leq n \\ (s, t = i, j, k)$$

もしなくば、 $\overline{G}^n$ において、線グラフの禁断誘導部分グラフ $K_{1,3}$ と、これら 4 点で誘導してしまうからである。

よて、 G をサイクルと、サイクルとは異なるユニサイクルグラフの 2 通りの場合に分けて考える。

Case 1. G がサイクルのとき ($G = C_p$ とおく。)

$2n \geq p-1$ とすると、 $\overline{G^n} = N_p$ となり (2) に反するので、

$2n < p-1$ 。この時、 G の各点は距離 n 以下の点をそれぞれ $2n$ 個ずつもっているので、 $|E(G^n)| = np$ となる。一方、 $|E(\overline{L(G)})| = {}_pC_2 - p$ なので $p = 2n+3$ 。やえに、 $G = C_{2n+3}$ が解となり得て、実際これが解となることは容易に確かめられる。

Case 2. G がサイクルとは異なるユニサイクルグラフのとき。

G に含まれるサイクルを C_k 、但し、 k はサイクルの長さとし、 k を場合分けして考える。

(a) $k \geq 2n+2$ のとき。

G において、 $\deg v = 1$ なる点 v が少なくともひとつ存在し、 v と v^* をみたす C_k 上の 3 点からなる通路 P_3 が存在し、

(5) に反す。

(b) $k = 2n-2\ell$ ($\ell=0, 1, \dots, n-2$), $k = 2n-2\ell+1$ ($\ell=0, 1, \dots, n-1$) のとき。

(α) 任意の端点とサイクルとの距離は高々 $\ell+1$ である。；さもなくば、サイクルからの距離が $\ell+2$ の点 v が存在し、サイクル上の通路 P_3 で、 v から P_3 の各点への距離が n より大いものが存在し、これら 4 点 v, v^* をみたし、(5) に反すからである。

(β) サイクル上の任意の点から長さ $\ell+1$ の枝が少なくともひとつ出ている。；さもなくば、長さ $\ell+1$ の枝が出ていないサイクル上の点を v とすると、 v とサイクルで向かい合う点 u_0 (

k が奇数の場合は向かいあう2点のうちの1点)から、距離 n より大なる G の点は存在せず、(4)に反するからである。

したがって、サイクル上の任意の点 v_0 から、長さ $\ell+1$ の枝の1つに、順次 $v_1, \dots, v_{\ell+1}$ と名づける。また、 v_0 とサイクルに関して向かいあった点を u_0 とし、 u_0 からでる長さ $\ell+1$ の枝の1つに、順次 $u_1, u_2, \dots, u_{\ell+1}$ と名づける。(図6.)

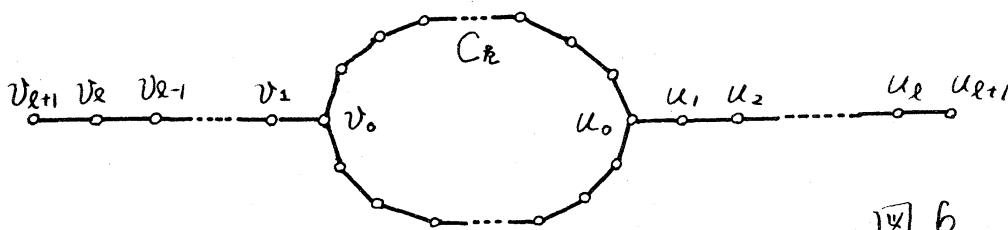


図6.

(i) $\ell \geq 1$ のとき、 $\times$ 点 $v_{\ell+1}, u_0, u_1, u_2$ は(+)をみたし(5)に反す。

(ii) $\ell = 0$ のとき、

(1) $k = 2n+1$ のとき、サイクル上で u_0 とは異なる、 v_0 と向かいあった点を u'_0 とおけば、4点 u_0, u'_0, u_1 及び $v_{\ell+1} = v_1$ とで(+)をみたし、(5)に反す。

(2) $k = 2n$ のとき、(β)よりサイクル上の任意の点から、距離1の枝が少ばかりともひとつは出ているが、サイクル上の任意の点から2本以上の距離1の枝が出ていることはない。さもなくば、サイクル上のある点 w_0 から2本以上の距離1の枝が出ていて、それらのうちの任意の2本の線の端点を w_1, w'_1 と

し、 w_0 とサイクルに関して向かいあった点から出る任意の距離1の枝の1つの端点を v_0 とすれば、4点 v_0, w_0, w_1, w'_1 は(*)をみたし、(5)に反す。

よって考えられるグラフは $C_k \circ K_1$ であるが、 $L(C_k \circ K_1)$ と $(\overline{C_k \circ K_1})^n$ の次数1の点の数を比較することにより、これが解になり得ないことがわかる。

したがって、方程式の解は C_{2n+3} だけである。

(ii) 前と同様に、 $G = (\bigcup_{i \in I} G_i) \cup mK_1$ とする。但し、 G_i は線を含む連結グラフで、 m を任意の非負整数とおく。 $m \neq 0$ とすると $(\overline{G})^n$ は完全グラフになるが、 $L(G)$ は $|I| = 1$ かつ G_1 がスターグラフかまたは K_3 のときに完全グラフとなる。しかし両方の場合とも、 $L(G)$ と $(\overline{G})^n$ の点の数が異なるので同型にはなり得ない。 $m = 0$ ならば成分の数を比較することにより、 $|I| = 1$ が成り立つ。やえに G は連結グラフでなければならない。さらに、 $L(G)$ と $(\overline{G})^n$ の点の数を比較することによって、 G はユニサイクルグラフであることがわかる。

G が次の条件の場合を除くと、 $(\overline{G})^n$ は完全グラフとなる。

(*) G で互いに隣接している2点があって、残りの点もすべてその2点の少なくともいずれか一方に隣接している。なぜならば、 G の任意の2点 u と v が隣接していないとすると、この2点は $(\overline{G})^n$ では隣接している。また u と v は隣接していて

u と v とともに隣接していない点 w が存在すれば $(\bar{G})^n$ では u と v は隣接するからである。

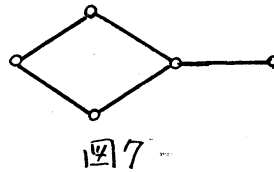
$(\bar{G})^n$ で完全グラフで、 $L(G)$ も完全グラフのときは、 K_3 または $K_{1,n}$ のときしかないが、いずれも方程式の解ではない。したがって (※) の場合を考える。このとき考えられるグラフは、三角形にそのうちの多くとも2点から距離1の枝が出ているグラフかまたは四角形に多くともそのうちの隣接した2点から距離1の枝が出ているグラフのいずれかである。

(i) K_3 または C_4 は、解でないことが容易に確かめられる。

(ii) K_3 の1点から枝が出ているときは、 $(\bar{G})^n$ は非連結だが、 $L(G)$ は連結なので解にはなり得ない。

(iii) K_3 の2点から枝が出ているとき、 $n \geq 3$ ならば $(\bar{G})^n$ は完全グラフとなり、 $n=2$ ならば、線グラフの禁断誘導部分グラフ $K_5 - x$ を含む。

(iv) C_4 に多くともそのうちの隣接した2点から枝が出ているとき、図7のグラフの場合



を除いて、 $(\bar{G})^n$ は $n=2$ ならば $K_5 - x$ を含み、 $n \geq 3$ ならば完全グラフとなる。したがって考えうるグラフは図7のグラフだけだが、このグラフも方程式の解にならないことはすぐわかる。

したがって方程式をみたすグラフは存在しない。 □

6° $L(G) = L(\bar{G})$ 解は自己補グラフ、及び $K_{1,3}$ 、 $K_1 \cup K_3$ 。

7° $(L(G))^n = L(G)$ ($n \geq 2$) 解は $\ell K_{1,p} \cup m K_3 \cup n K_1$ である。但し ℓ, m, n は任意の非負整数である。

8° $L(G^n) = G^n$ ($n \geq 2$) 解は $m K_3 \cup n P_2$ 。

6°~8°の方程式については、秋山 金子 Simić [9]。

9° $L(G) = K(G)$

定理 7 $L(G) = K(G)$ をみたすグラフは三角形を含まないグラフである。

(証明)

$G = \bigcup_{i \in I} G_i \cup m K_1$ (m は任意の非負整数、 G_i は連結成分とする) とおき、 $L(G)$ と $K(G)$ の連結成分の個数を比較することにより $m=0$ となる。したがって G は孤立点をもたない。今、3つの場合に分けて考える。

(1) G がサイクルを含まないとき。

(2) G の内周が4以上のとき。

(1)(2) とともに、誘導部分グラフが完全グラフとなるものは K_2 だけである。ゆえにクリークグラフは、線と点に対応させた交グラフとなり、線グラフの定義に一致する。

(3) G の内周が3に等しいとき。

G を $(p, 8)$ グラフとし、このとき $L(G) = K(G)$ の解は存在

しないことを示す。 $|V(L(G))| = f$ なので $|V(K(G))| = f$ 。今、 G より、 K_2 ($2 \geq 3$) を作っている線以外の線を除き、 G' なるグラフを作る。このとき除去した線の数を m 本とする。 G' のすべての線は K_2 ($2 \geq 3$) に含まれているので、 G' のクリークの数 k' は G' のサイクル階数以下である。 G' の連結成分の個数を p とすれば、 G' のサイクル階数は $(f-m) - p + k'$ で表わされる。 $|V(L(G))| \leq (f-m) - p + k' + m = f - p + k'$ となり、 $f \leq f - p + k'$ すなわち $p \leq k'$ を得る。 G' で連結成分の個数が点の数より多いということは、 G' は全非連結グラフになり、 G の線はすべて K_2 にのみ含まれることになり、内固がるの仮定に反する。□

§5 2つの未知グラフを含む種々のグラフ方程式

(II)-1 $\varphi(G) = H$; H にある条件を課したタイプ。

グラフ H にある条件 (平面性、外平面性等) を課したときに、それぞれのグラフ方程式をみたすグラフ G の特徴を調べる。

1° $L(G) = H$; H : 平面的

この特徴づけは、Sedláček [28] によって与えられた。その後、Greenwell と Heminger [18] は、この特徴づけを禁断

部分グラフとして表わした。

定理8 (Sedlacek) G の線グラフが平面的であるための必要十分条件は、 G が平面的でかつ $\Delta(G) \leq 4$ 、かつ、もし $\delta(v) = 4$ ならばそのとき v は切断点である。

定理9 (Greenwell, Heminger) グラフ G が平面的線グラフをもつための必要十分条件は、 G が $K_{3,3}$, $K_{1,5}$, $P_4 + K_1$, $K_2 + \overline{K}_3$ と同相な部分グラフをもたないことである。(図8)

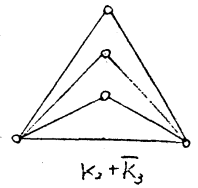
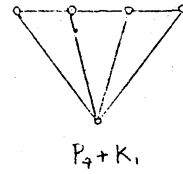
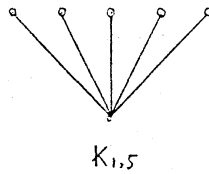
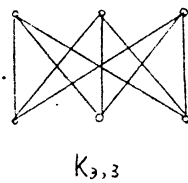


図8

2° $M(G) = H$; H : 平面的グラフ

秋山、浜田、吉村[6]は、この方程式をみたす G は $\Delta(G) \leq 3$ であることを示し、秋山[2]は禁断部分グラフで表した。

定理10 (秋山) グラフ G が平面的中間グラフをもつための必要十分条件は、 G が $K_{3,3}$ または $K_{1,4}$ に同相な部分グラフをもたないことである。

(証明)

必要性: G が平面的中間グラフをもつならば, G の任意の部分グラフ G' も平面的中間グラフをもつ。それゆえ, $K_{3,3}$ または $K_{1,4}$ に同相な任意のグラフは, 平面的中間グラフを持たないことを示せばよい。 $K_{3,3}$ に同相なグラフは, 非平面的であり, $K_{1,4}$ に同相なグラフは $\Delta(G) > 3$ となり, 平面的中間グラフの特徴づけに反する。

十分性: G を $K_{3,3}$ または $K_{1,4}$ に同相な部分グラフを含まないグラフとする。 G は $K_{1,4}$ に同相な部分グラフを含まないので, K_5 と同相な部分グラフを含みえない。それゆえ G は $K_{3,3}$ に同相な部分グラフを含まないので Kuratowski の定理から G は平面的でなければならない。さらに, $\Delta(G) \leq 3$ 。なぜならさもなくば G は部分グラフとして $K_{1,4}$ を含むからである。 $\square$

3° $T(G) = H$; H : 平面的グラフ

この特徴づけは Behzad [10] によって与えられ, 秋山 [7] はこれを禁断部分グラフで表わした。

定理 11 (Behzad) グラフ G が平面的全グラフをもつための必要十分条件は, G の各点の次数は高々 3 であり, v が次数 3 の点ならば切断点である。

定理12 (秋山) グラフ G が平面的全グラフをもつための必要十分条件は、 G が $P_3 + K_1$ または $K_{1,2}$ と同相な部分グラフを含まないことである。

(証明)

必要性: G が平面的全グラフをもつならば、 G の任意の部分グラフ G' も平面的全グラフをもつ。それゆえ、 $P_3 + K_1$ または $K_{1,2}$ に同相なすべてのグラフが平面的全グラフを含まないことを示せばよい。 $P_3 + K_1$ に同相なグラフは切断点でない次数3の点をもつ。また $K_{1,2}$ と同相なグラフは $\Delta(G) > 3$ となるので、定理11よりこれが示される。

十分性: G が $P_3 + K_1$ または $K_{1,2}$ に同相な部分グラフを含まないとする。 $\Delta(G) \leq 3$ 。なぜなら、さもなくば G は部分グラフとして $K_{1,2}$ を含む。 G が切断点でない次数3の点をもつと仮定する。この仮定が矛盾を導くことと示すことによって証明が完結する。

a, b, c を v に隣接する点とする。 v は切断点でないので、 v を含まない a から b にいたる通路 P が存在する。 c と P の接続性に依存して、2つの場合に分ける。

Case 1: c が P 上にある場合。このとき G は $P_3 + K_1$ と同相な部分グラフを含む。

Case 2: c が P 上でない場合。 v は切断点でないので c が

ら a に至る通路 P' が存在する。 y を P と P' の (c から始めて) 最初の共通点としよう。このとき P 上の y の位置に依存してさらに2つの場合に分けられる。

Case 2.1: $y = a$ または b 。どちらの場合にも G は $B + K_1$ と同相な部分グラフをもつ。

Case 2.2: $y \neq a$ かつ b 。このとき y を P 上の a と b の間にある点と仮定できる。よって G は $B + K_1$ と同相な部分グラフをもつ。

これですべての場合がつかされたが、どの場合においても G が $B + K_1$ と同相な部分グラフを含むことがわかる。よって v が G の次数3の点ならば切断点である。それゆえ定理11より平面的全グラフをもつ。 $\square$

4° $L(G) = H$; H : 外平面的グラフ

Chartrand, Geller, Hedetniemi [13] によって、次の定理が示された。

定理13 $L(G)$ が外平面的線グラフをもつための必要十分条件は、 G が $B + K_1$ または $K_{1,2}$ と同相な部分グラフをもたないことである。

5° $M(G) = H$; H : 外平面的グラフ

定理14 (秋山[2]) グラフ G が外平面的中間(全)グラフをもつための必要十分条件は、 G が $K_{1,3}$ (K_3 または $K_{1,3}$) と同相な部分グラフをもたないことである。

6° $L^n(G) = H$; H : 平面的グラフ ($n \geq 2$)

この特徴づけは次の3つの定理に示されている。Kulli, Sampathkumar [22] による。

定理15 グラフ G が平面的2階線グラフをもつための必要十分条件は、 G が次の4条件をみたすことである。

- (i) G は平面的である。
- (ii) $\Delta(G) \leq 4$
- (iii) 任意の線 (v_1, v_2) に対し、 $\varphi(v_1) + \varphi(v_2) \leq 6$
- (iv) $\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 6$ なる線 (v_1, v_2) はすべて G の橋である。

定理16 グラフ G が平面的3階線グラフをもつための必要十分条件は、 G が次の2条件をみたすことである。

- (i) $\Delta(G) \leq 3$

(ii) G の $\delta(v)=3$ となる点 v に隣接する点の次数の和は高々 4 である。

定理 17 グラフ G が平面的 n 階線グラフ ($n \geq 4$) をもつための必要十分条件は、 G が次の 2 条件をみたすことである。

- (i) $\Delta(G) \leq 3$
 (ii) G のある点 v が $\delta(v)=3$ ならば、点 v を含む成分は $K_{1,3}$ である。

上記の 3 つの定理を、秋山 [3] はそれぞれ禁断部分グラフで表わした。

定理 18 グラフ G が平面的 2 階線グラフをもつための必要十分条件は、 G が図 9 に示された $K_{1,5}$, $K_{3,3}$ または A と同相な部分グラフを含まないか、 $P_3 + K_1$, B または C と e -疑似同相な部分グラフを含まないことである。但し、 G' が G の線 e 以外の任意の線を有限回細分をくり返して得られる時、 G' が G と e -疑似同相であるという。

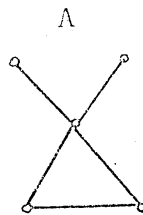
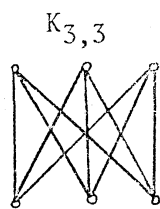
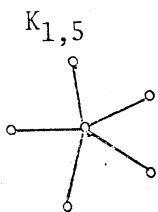


図 9(a)

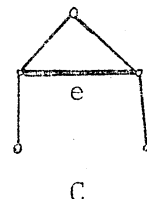
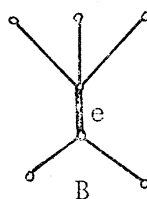
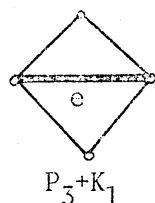


図9(b)

(証明)

必要性: G が平面的2階線グラフをもつならば、 G の任意の部分グラフ G' も平面的2階線グラフをもつ。それゆえ $K_{1,5}$, $K_{3,3}$, A に同相なグラフ、あるいは P_3+K_1 , B , C に e -疑似同相なグラフが平面的2階線グラフを含まないことを示せばよい。 $K_{1,5}$ に同相なグラフは定理15より $\Delta(G) > 4$ となり、 $K_{3,3}$ に同相なグラフは平面的でない。 A に同相なグラフや、 C や P_3+K_1 に e -疑似同相なグラフは定理15の条件 (iv) をみたさず、 B に e -疑似同相なグラフは条件 (iii) をみたさない。したがって、 $K_{1,5}$, $K_{3,3}$, A に同相なグラフや、 P_3+K_1 , B , C に e -疑似同相なグラフは平面的2階線グラフを含まない。

十分性: G が $K_{1,5}$, $K_{3,3}$, A に同相な部分グラフ、または P_3+K_1 , B , C に e -疑似同型な部分グラフを含まないとする。 G は A に同相な部分グラフを含まないので K_5 に同相な部分グラフを含まない。 $K_{3,3}$ に同相な部分グラフを含まないので、Kuratowskiの定理[23]から、 G は平面的でなければならない。さらに $\Delta(G) \leq 4$ である。なぜなら、さもなくば G は $K_{1,5}$ を部分グラ

フとして含むからである。GはBにe-疑似同型な部分グラフと含まないので、Gの任意の線 (v_1, v_2) に対して、

$\delta(v_1) + \delta(v_2) \leq 6$ が成り立つ。やえに、Gが $\delta(v_1) + \delta(v_2) = 6$ をみたす、橋ではない線 (v_1, v_2) をもつとしたときに、矛盾を導くことによって、証明が完結する。

v_1 または v_2 のどちらかに接合するe以外の線は全部で4本存在する。 v_1 に接合する線の個数によって2つの場合に分ける。

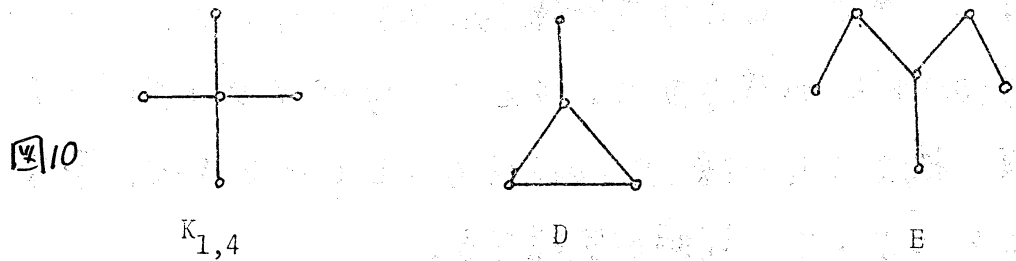
Case 1: e以外の線で、 v_1 に接合する線が3本あるとき。eはサイクル上の線なので、GはAに同相な部分グラフをもつ。

Case 2: e以外の線で、 v_1 に接合する線が2本あるとき。eがただ1つのサイクル上にあるときは、GはCにe-疑似同型な部分グラフをもつ。またeが2つ以上のサイクル上にあるときは、Gは $P_3 + K_2$ にe-疑似同型な部分グラフをもつ。

これですべての可能性がつくされたが、どの場合においても、Gは図9の6つのグラフに同相なグラフかあるいはe-疑似同相なグラフを含む。よって定理15より、Gは平面的2階線グラフをもつ。 $\square$

定理19 グラフGが平面的3階線グラフをもつための必要十分条件は、Gが図10に示された3つのグラフ $K_{1,4}$, D , E

と同相な部分グラフを含まないことである。



定理20 グラフ G が平面的線グラフ $L^n(G)$ ($n \geq 4$) をもつための必要十分条件は、 G が図10と図11の3つのグラフ、 $K_{1,4}$ 、 D 、 F と同相な部分グラフを含まないことである。

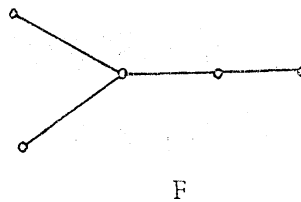


図11.

$G^2 = H$; H : 平面的グラフ

定理21 (Harary, Karp, Tutte [20]) 平面性をみたすグラフ H に対して、グラフ方程式 $G^2 = H$ をみたす解 G は次の性質をみたす。

- (1) $\Delta(G) \leq 3$
- (2) 次数3の点はすべて切断点である。
- (3) 4点以上をもつ G のブロックはすべて偶サイクルである。

(II)-2 $\varphi(G) = \psi(H)$ のタイプ°

1° $L(G) = T(H)$

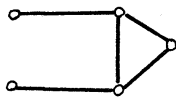
この方程式は Cvetković と Simić [14] によって解かれた。

定理 21 G, H が連結グラフならば、グラフ方程式

$L(G) = T(H)$ の解 G, H は次のグラフの対である。

$(K_{n+1}, K_n) \quad (n=1, 2, \dots), (K_{1,3}, K_2), (S, P_3)$ 。

但し S :



G, H が非連結ならば、 $G = (\bigcup_{i \in I} G_i) \cup nK_1, H = \bigcup_{i \in I} H_i$
 (但し、 n は任意の非負整数でかつ各 i に対して $L(G_i) = T(H_i)$)
 がグラフ方程式の解である。

2° $\overline{L(G)} = T(H)$

Cvetković, Simić [14] による。

定理 22 グラフ方程式 $\overline{L(G)} = T(H)$ の解 (G, H) は次の
 グラフの対である。 $(K_{1,n}, nK_1) \quad (n=1, 2, \dots), (K_3, 3K_1),$
 $(3K_2, K_2), (3K_{1,2}, K_3), (K_2 \cup P_3, K_{1,2}),$ 及び
 $((K_3 \circ K_1) \cup K_2, K_{1,3})$ 。

$$3^\circ \quad \underline{L(G) = M(H)}$$

$$4^\circ \quad \underline{M(G) = T(H)}$$

$$5^\circ \quad \underline{\overline{M(G)} = T(H)}$$

$3^\circ \sim 5^\circ$ は秋山、浜田、吉村[5]の次の定理による。

定理23 任意のグラフ G, H に対して、

- (i) $L(G) = M(H)$ の解は $(G, H) = (H^+, H)$
- (ii) $M(G) = T(H)$ の解は $(G, H) = (nK_1, nK_1) \ (n=1, 2, \dots)$
- (iii) $\overline{M(G)} = T(H)$ の解は $(G, H) = (3K_1, K_2), (G, H) = (K_3 \cup K_1, K_{1,3})$ である。

(証明)

以降、常に $M(H) = L(H^+)$ 、 $M(G) = L(G^+)$ とおく。([3][9])

$$(i) \quad L(G) = M(H) \quad \text{i.e.} \quad L(G) = L(H^+)$$

任意のグラフ H に対し、 H^+ は nontrivial で $K_{1,3}$ でも K_3 でもない。定理[14]の8.3より、解 $(G, H) = (H^+, H)$ を得る。

$$(ii) \quad M(G) = T(H) \quad \text{i.e.} \quad L(G^+) = T(H)$$

$L(G) = T(H)$ の解が定理21ですべて得られている。それらの組の中で、 (G^+, H) の形をしているのは、 (K_2, K_1) だけである。やえに(ii)の解は $(G, H) = (K_1, K_1)$ 。一般には、 $(G, H) = (nK_1, nK_1) \ (n=1, 2, \dots)$ 。

$$(iii) \quad \overline{M(G)} = T(H) \quad \text{i.e.} \quad \overline{L(G^+)} = T(H)$$

$\overline{L(G)} = T(H)$ の解は定理22で求められているが、これらの組の中で、 $(3K_2, K_2)$, $((K_3 \circ K_1) \cup K_2, K_{1,3})$ だけが (G^+, H) の形をしている。ゆえに(iii)の解は、 $(3K_1, K_2)$, $(K_3 \cup K_1, K_{1,3})$ である。 $\square$

6° $\overline{L(G)} = M(H)$

定理24 (秋山, 浜田, 吉村[5]) $\overline{L(G)} = M(H)$ をみたすすべてのグラフの組は次のものである。 $(K_{1,n}, nK_1)$ ($n=1, 2, \dots$), $(K_3, 3K_1)$, $(K_2 \cup K_{1,2}, K_2)$, $(K_{1,2}^+, K_{1,2})$, $(S(K_{1,3}), K_3)$, $(Y, K_1 \cup K_2)$, $(Z, 2K_1 \cup K_2)$ 。(図12)

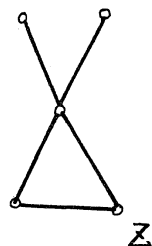
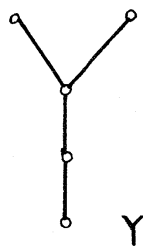
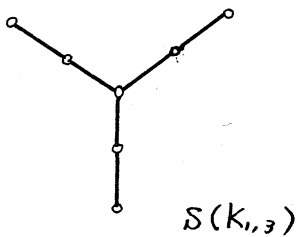


図12

(証明)

定理1で、 G が線グラフである必要十分条件は、ある9個のグラフのいずれも G の誘導部分グラフとして含まないことが示されている。ここでその9個のうちの3個のグラフとその補グラフを示す。(図13)。線グラフ $L(H)$ がこれら3つのグラフ $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}$ の少なくとも一つもその誘導部分グラフ

として含むならば、 $L(H)$ は $\overline{L(G)}$ であり得ない。

次にグラフ方程式 $\overline{L(G)} = M(H)$ i.e. $\overline{L(G)} = L(H^+)$ の解を求める。

(I) H が連結グラフの場合

(i) H が次数 $\varphi(v) \geq 3$ なる点 v をもつと仮定。

中心 v をもつ星状グラフ (v, a, b, c) を S で表わし、 S^+ は S に破線 $\{v, v'\}$, $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$, $\{c, c'\}$ を加えて得られるグラフとする。(図14)。線グラフ $L(S^+)$ は図14において、太線で示されるグラフである。このとき、 $L(S^+)$ は $\overline{F_1}$ を誘導部分グラフとして含むので、 $L(H^+)$ は $\overline{L(G)}$ であり得ない。よって H の各点の次数は2以下であることがわかる。

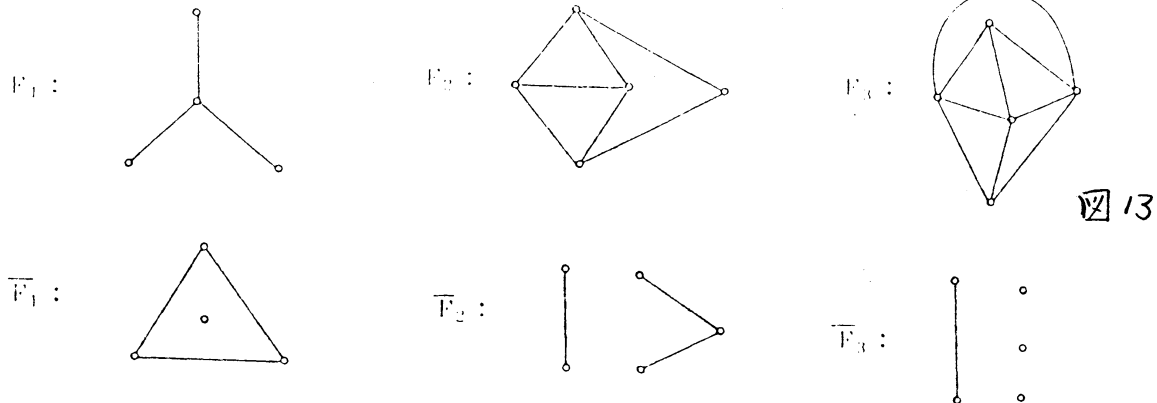


図13

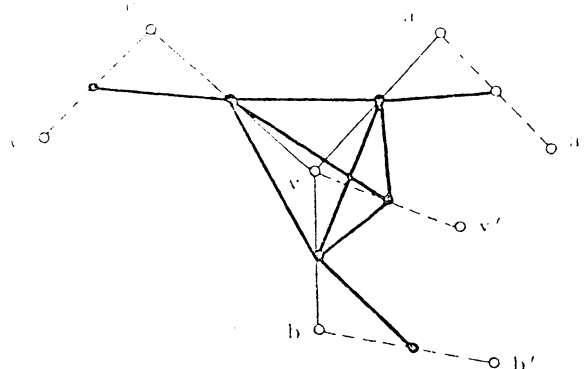


図14

(ii) H が通路 P_4 , v_1, v_2, v_3, v_4 を含むと仮定。

このとき $L(P_4^+)$ は、 $\overline{H}$ をその誘導部分グラフとしてもつ(図15)から、 $L(H^+)$ の直径は3より小であることがわかる。

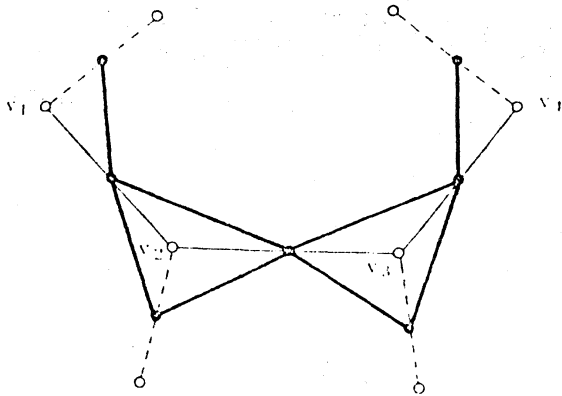


図15

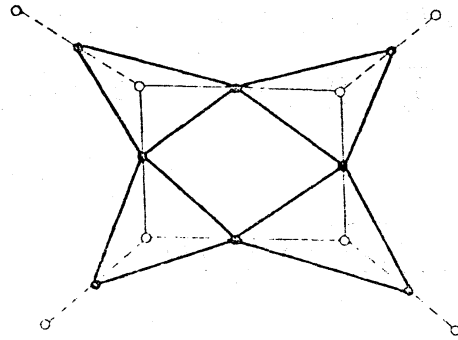


図16

(iii) H がサイクル C_4 を含むと仮定。

このとき $L(C_4^+)$ (図16) は $\overline{H}$ をその誘導部分グラフとして含む。(i)(ii)(iii) より、連結グラフ H は $K_1, K_2, P_3=K_{1,2}, K_3$ のいずれかである。これらのグラフに関して、グラフ方程式 $L(G)=M(H)$ をみたすグラフ G は、それぞれ $K_2, K_{1,2} \cup K_2, K_{1,2}^+, S(K_{1,3})$ (図12) である。

(IV) H が非連結グラフの場合

(i) H が全非連結のとき、即ち、 $H=nK_1$ ($n=1,2,\dots$) このとき $G=K_{1,n}$ ($n=2,3,\dots$), 但し、 $n=3$ は除く、 $H=3K_1$ のとき、 $G=K_{1,3}$ または K_3 。

(ii) $H=K_1 \cup K_2$ のとき、 $\overline{L(H^+)}=K_3 \circ K_2$ であり、 G は図12の Υ のグラフである。

(iii) $H = 2K_1 \cup K_2$ のとき。 G は図12のグラフ Σ である。

(iv) $H = 3K_1 \cup K_2$ のとき。 $L(H^+)$ は $\overline{H_3}$ をその誘導部分グラフとして含むので解は存在しない。

(v) $H = 2K_2$ のとき。 $L(H^+) = 2K_{1,2}$ はその誘導部分グラフとして $\overline{H_2}$ を含むので、解は存在しない。 $\square$

$$7^\circ \quad \overline{L(G)} = L(H)$$

定理25 (秋山、浜田、吉村[4]) 2つのグラフ G, H において、 H はトリビアル($\square$ を1個とみなす)でない連結グラフとし、グラフ方程式 $\overline{L(G)} = L(H)$ の解 (G, H) は次の $\square \square \square \square \square \square$ なる6個の解と、それらの解グラフの適当な部分グラフの対17個、あわせて23個である。

① $(nK_2, K_{1,n}), (n=1, 2, \dots) \quad (\text{図17})$

② $(C_6 \cup K_2, \overline{K_3 \cup 2K_1}) \quad (\text{図18})$

③ $(3K_{1,2}, K_4) \quad (\text{図19})$

④ $(S(K_{1,3}), K_3^+) \quad (\text{図20})$

⑤ $(K_{3,3}, K_{3,3}) \quad (\text{図21})$

⑥ $(C_5, C_5) \quad (\text{図22})$

(証明)

(第一段) $\overline{L(G)} = L(H) \cdots (*)$ とおく。

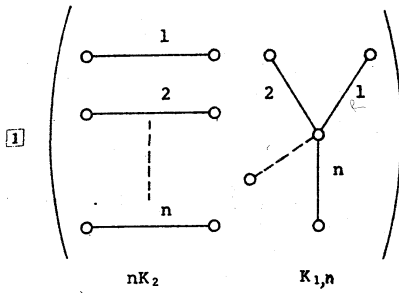


図17

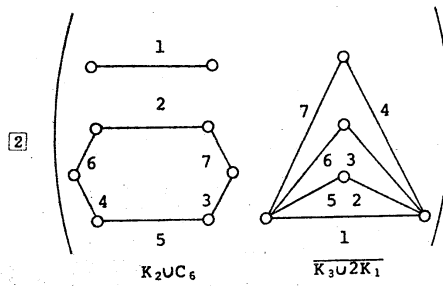


図18

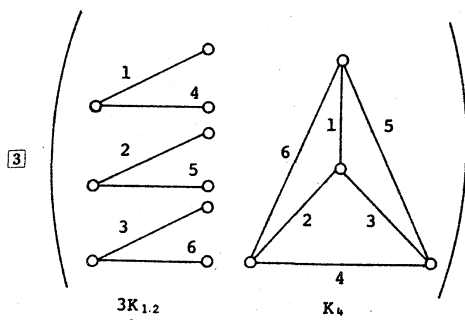


図19

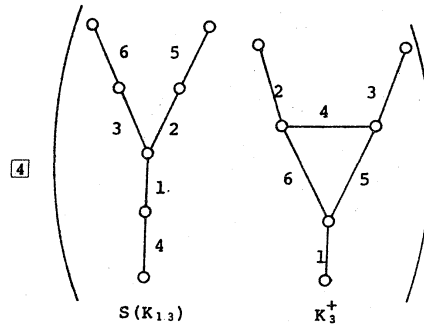


図20

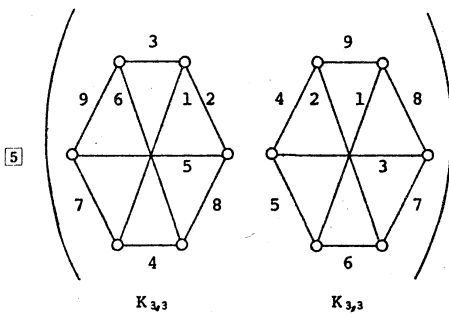


図21

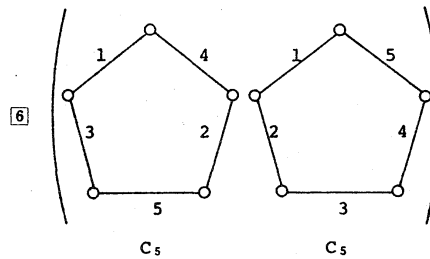


図22

(i) (*) より、 $L(H) = L(G)$ を得るから、 (G, H) が (*) の解ならば (H, G) も (*) の解である。

(ii) $P = L(H)$ とおくと (*) から $\overline{P} = L(G)$ となる。 $P, \overline{P}$ のうち少なくともひとつは連結である。(たとえば P が連結とする。) $P = L(H)$ が連結だから H も連結である。

(iii) (*) より $|V(\overline{L(G)})| = |V(L(H))|$ 、一方 $|V(L(G))| = |V(L(H))|$ より、 $|V(L(H))| = |V(L(G))|$ 。ところが線グラフの性質から $|V(L(H))| = |X(H)|$, $|V(L(G))| = |X(G)|$ 、よってこれらの等式より、 $|X(H)| = |X(G)|$ を得る。即ち、(*) の解 (G, H) の二つのグラフ G, H は等しい線数を持つ。

$|X(H)| = |X(G)| = f (\geq 1)$ としよう。同型対応 φ によって対応する $\overline{L(G)}, L(H)$ 上の対応点をそれぞれ u, w とし、 u, w を生ずる G, H の線をそれぞれ x, y とする。 x, y は φ によって対応する 2 線である。今、 G から x を、 H から y を除去すると φ によって対応する中心 u の星形と、中心 w の星形も同時に除去されて残るグラフ $\overline{L(G-x)}$ と $L(H-y)$ はやはり同型である。

今、 φ によって対応する G, H の線を f' 個 ($0 \leq f' \leq f-1$) まですべて除去し、その際孤立点を生じた時は、これらも除去することにして、 G, H から得られる部分グラフをそれぞれ G', H' とすれば、 $\overline{L(G')} = L(H')$ が成立し、 (G', H') も (*) の解である。

(iv) 線グラフのための q 個の禁断誘導部分グラフ (定理 1) の中の 2 個を F_1, F_2 と名づけ、かつそれらの補グラフをそれぞれ $\overline{F_1}, \overline{F_2}$ とし、図 23 に示す。グラフ $L(H)$ が $\overline{F_1}, \overline{F_2}$ のどちらをも含まぬことが、 $L(H)$ が $\overline{L(G)}$ であるための必要条件である。

(v) (*) の解 (G, H) において解グラフ H はトリビアルでない連

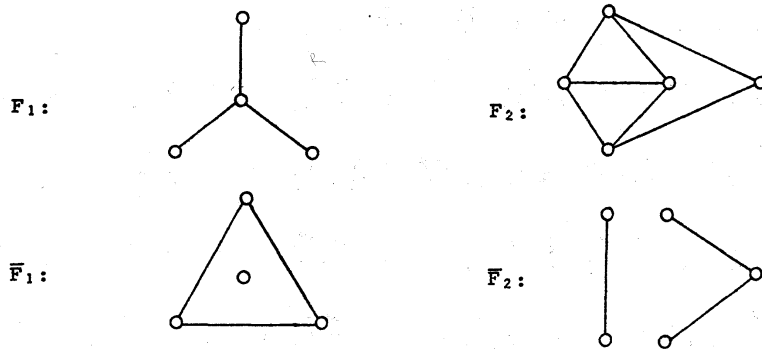


図23

結グラフとする。(ii) 参照.)

(a) K_3 が H の固有の部分グラフのとき、 K_3 の頂点に接合しない線があれば $L(H) \supset \overline{F_1}$ である。(図24 参照) よって、 H が K_3 を固有の部分グラフとしてもつとき、 H が (*) の解グラフであるためには H のすべての線が、その K_3 と少なくとも1点を共有することが必要である。

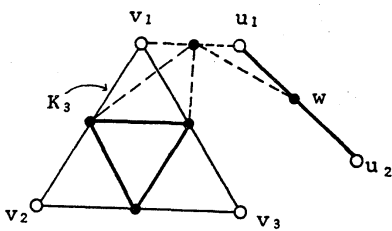


図24

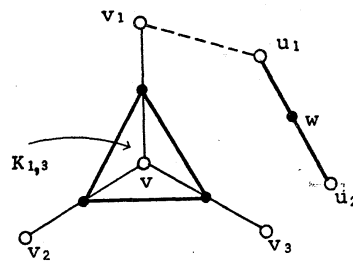


図25

(b) H が $K_{1,3}$ を誘導部分グラフとして含むとき、 $K_{1,3}$ に接合しない線があれば $L(H) \supset \overline{F_1}$ である。(図25 参照) よって H が $K_{1,3}$ を誘導部分グラフとして含むとき、 H が (*) の解

であるためには、 H のすべての線がその $K_{1,3}$ と少なくとも 1 点を共有することが必要である。

(vi) (補題) 連結グラフ H が、点の最高次数 3 で、 K_3 を部分グラフにもたず、各線は H の誘導部分グラフ $K_{1,3}$ のすべてと少なくとも 1 点を共有するという性質をもつものとする。これらの性質を持ち、かつ最大の線数をもつグラフは $K_{3,3}$ である。

(証明) H に含まれる次数 3 の 1 点を取り、これを v とする。 v を中心とする $K_{1,3}$ の端点を v_1, v_2, v_3 とし、線数を大にするため $\rho(v_i) = 3$ ($i=1, 2, 3$) とし、この時生ずる新線を、 $\{v_i, u_i\}, \{v_i, w_i\}$ ($i=1, 2, 3$) とする。 H は K_3 を含まぬから u_i, w_i ($i=1, 2, 3$) のうちのどの点も v_1, v_2, v_3 と一致することはない。(図 26) u_i, w_i ($i=1, 2, 3$) がすべて異なるとすれば、たとえば線 $\{v_1, u_1\}$ は v_2, v_3 をそれぞれ中心とする 2 つの $K_{1,3}$ のいずれとも共有点をもたない。このことを避けるには、 u_1 が u_2, w_2 のどちらかと一致し、かつ u_3, w_3 のどちらかと一致することが必要十分条件である。そこで $u_1 \equiv u_2 \equiv u_3$ としてこの点を u とする。同様にして、 $w_1 \equiv w_2 \equiv w_3$ としてこの点を w とする。ここに得られたグラフは $K_{3,3}$ であって $K_{3,3}$ は K_3 を含まず、その各線はすべての誘導部分グラフ $K_{1,3}$ と少なくとも 1 点を共有する。

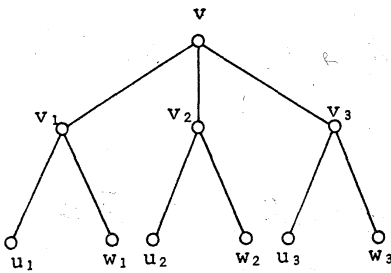


図26.

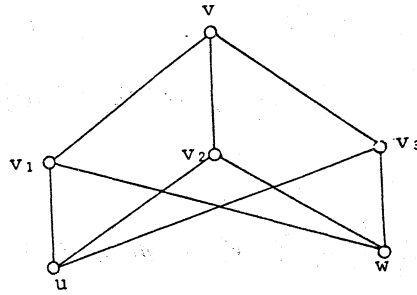


図27.

グラフ $K_{3,3}$ にもはや 1 点も加えることはできない。何故なら、もし新しい線を加えうるものとすれば、それは図26における u_i, w_i ($i=1, 2, 3$) の中の 1 点を 1 端点とするものである。 u_i, w_i のうちのどれを取っても同じことであるから、 u_1 を取って図26において $\{u_1, t\}$ なる新線を加えてみよう。このとき、

- (i) t は勿論 v_1 と一致せず、点の次数 3 以下という仮定により t は v_1, v_2, v_3 と一致しない。求めるグラフが K_3 を含みぬことから、 t は w_1 と一致しない。
- (ii) t は u_j, w_j ($j=1, 2, 3$) のどれかと一致するか、 $\{u_1, t\}$ が新しい 1 本の終線である。この場合、前と同様の推論により得られるグラフは $K_{3,3}$ (図27) に 1 線 $\{u, w\}$ を加えたものか、 $K_{3,3}$ に u から出る終線を加えたものであるが、この両グラフは $\rho(v)=4$ であって、ともに点の最大次数 3 という仮定に反する。やえに $K_{3,3}$ が条件を満たし、かつ最大の線数をもつグラフである。

(第二段)

第一段の(i)~(vi)を用いて、具体的に解 (G, H) を求めよう。

H が星形 $K_{1,n}$ のときは $G=nK_2$ ($n=1, 2, \dots$)であることが容易にわかる。すなわち、 $(G, H) = (nK_2, K_{1,n})$ でこれがⅠである。(図17)

次に星形 $K_{1,n}$ ($n=1, 2, \dots$)とは異なるものとし、 H 内で最大次数をもつ点を v 、その次数を Δ で表わす。

(I) $\Delta \geq 5$. この場合は H が星形 $K_{1,n}$ ($n \geq 5$)以外にどんな1線をもつとしても、 $L(H) \supset \overline{F_1}$ となる。(図28, 29)

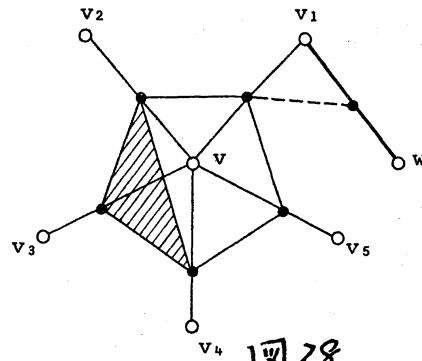


図28

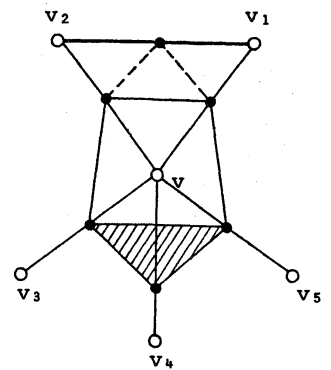


図29

よって、星形でない限り、(*)の解は存在しない。

(II) $\Delta = 4$ 星形 $K_{1,4}$ の中心 v からの距離2以上の点 w があると、 $L(H) \supset \overline{F_1}$ となる。(図30参照) よって $K_{1,4}$ に属さない線は、図31の $\{v_1, v_2\}$ のごとく $K_{1,4}$ の2つの端点を結ぶものでなければならない。(図31参照)

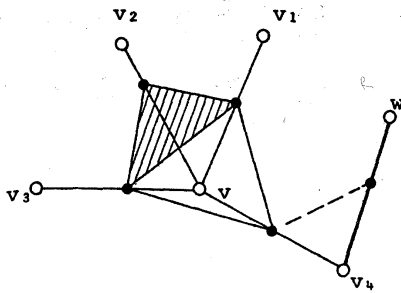


図30

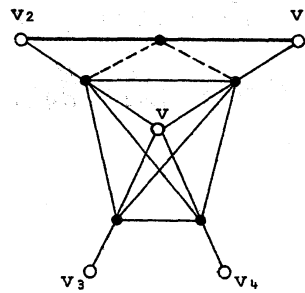


図31

与えられた $K_{1,4}$ に線 $\{v_1, v_2\}$ の他に $\{v_3, v_4\}$ を入れて得られるグラフは第一段の (V) の (a) に反する。 v_i ($i=1, 2, 3, 4$) の中の任意の3個から K_3 を作った時も同様である。これらのことに注意して、(V) の (a) の条件をみたし、かつ最大の線数をもつグラフを求めると、図の $\overline{K_3 \cup 2K_1}$ である。(図 18) このグラフが1つの解グラフ H になることは(*)の式によって容易に検証され、対応する解グラフ G が $K_2 \cup C_6$ である。今、 $\overline{K_3 \cup 2K_1}$ からすべての固有の連結部分グラフを作る。[19, Appendix I 216-217]。これらの部分グラフに対し、それらの線のもつ番号と同じ番号の線から成る $K_2 \cup C_6$ の部分グラフを

図32

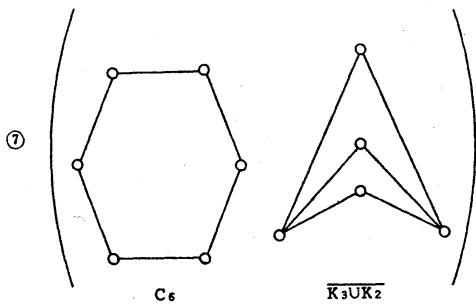
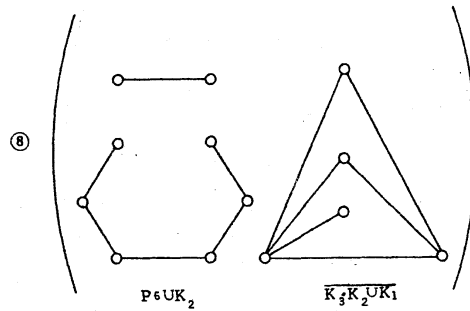


図33



対応させて得られるグラフの対は(*)の解である。(iii)参照)
 これらの中から①に属するものを省くと次の⑦~⑮を得る。

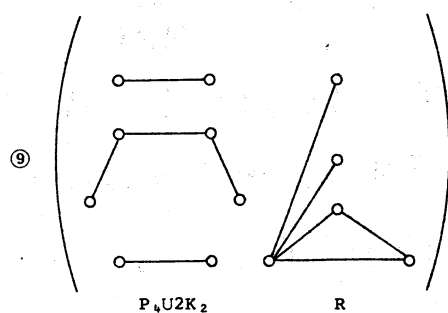


図34

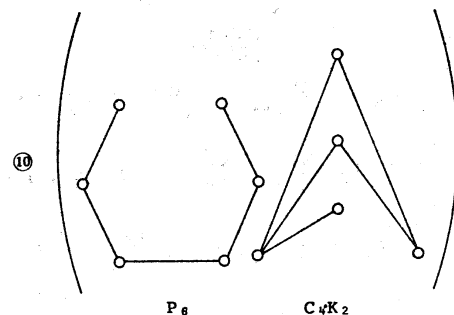


図35

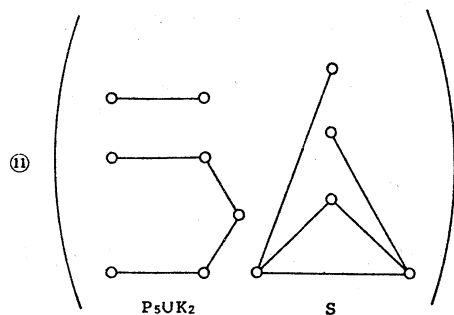


図36

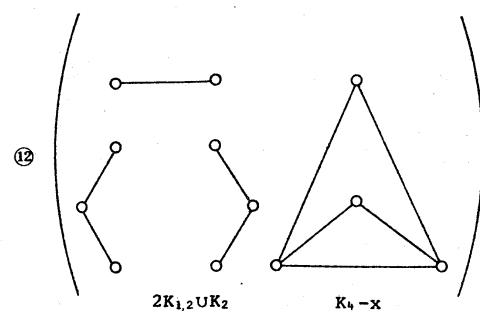


図37

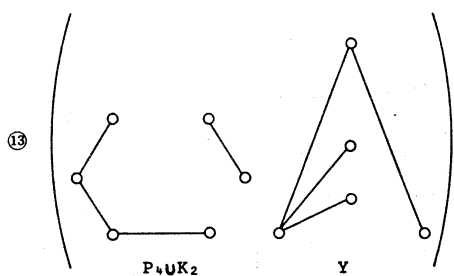


図38

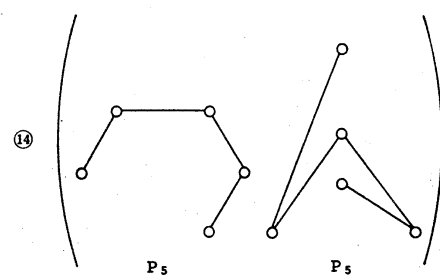


図39

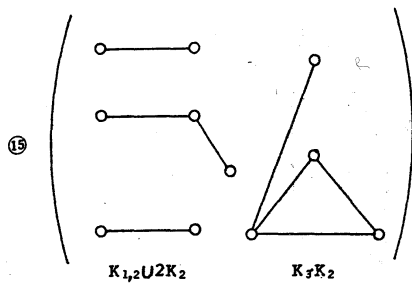


図40

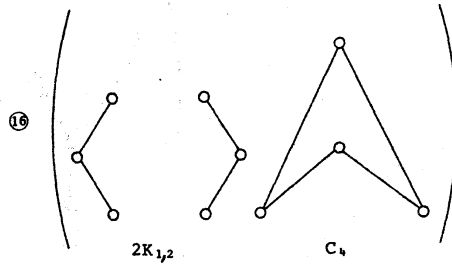


図41

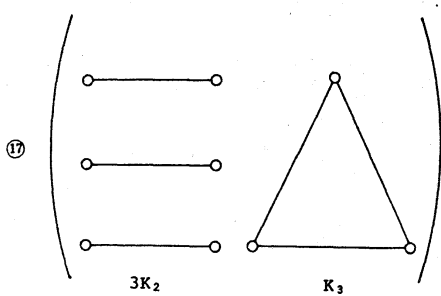


図42

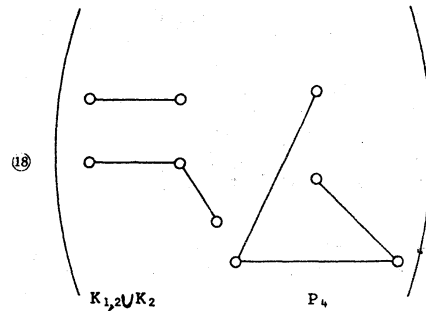


図43

(Ⅲ) $\Delta = 3$ このとき、 $H \supset K_{1,3}$ である。 $K_{1,3}$ の中心を v とする。

(α) $K_3 \subset H$ 。この場合 H のすべての線は K_3 と少なくとも 1 点を共有する (第一段 (Ⅵ) の (a) 参照)。このことを用いて得られる新しい解は次の 2 個である。: ③ ($3K_{1,2}, K_4$) (図 19) ④ ($\mathcal{S}(K_{1,3}), K_3^+$) (図 20)。③ の解グラフの部分グラフを作ると ⑫ ~ ⑱ を得るが新しい解は得られない。④ においては、 K_3^+ を形成する線の 1 つ、例えば線 4 を除去して新しい解 ⑲ を得る。(図 44 参照)

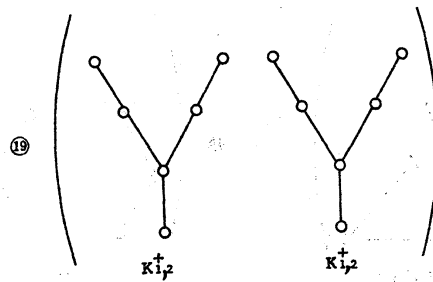


図44

(β) $K_3 \not\subset H$ 。この場合、第一段(vi)の補題によれば、必要条件(v)の(b)をみたすグラフのうちで、線数最大なもの $K_{3,3}$ である。 $K_{3,3}$ は解グラフとなり、 $\boxed{5}(K_{3,3}, K_{3,3})$ (図 21)と $\square$ うる。 $\boxed{5}$ の解グラフ $H=K_{3,3}$ のトリビアルでないあらゆる連結グラフは18個あり[19, Appendix I, 218-222]、それらは対応する G の部分グラフと対になって(*)の解となるが、それらの新しく得られるものは、次の②⑩~②③の4個である。

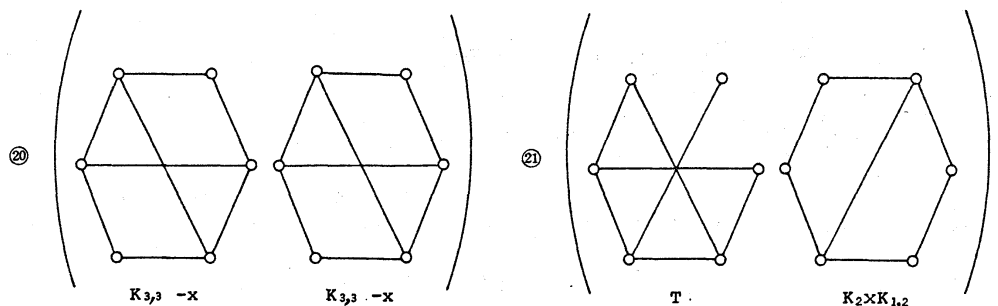


図45

図46

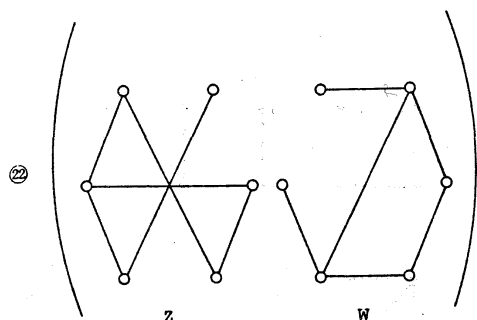


図47

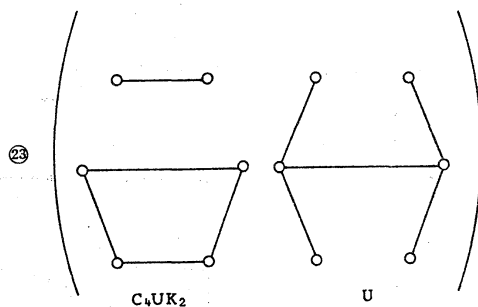


図48

(IV) $\Delta=2$ 。 H が連結であるから H はサイクル または通路であるが、 $L(H)$ 中 $\overline{F_2}$ をみたすべきであるから、 $H=C_n$ ($3 \leq n \leq 6$) または $H=P_n$ ($4 \leq n \leq 6$) である。この場合、唯一つの新しい解 $\square$ を得る。(図22) $\square$

(II)-3 $F=\varphi(G)=\psi(H)$

この方程式をみたすグラフ F を求める。

1° $F=L(G)=L(H)$

このグラフ方程式をみたす F は Beineke [12] によって示された。次の定理は、定理25 と独立に、発表されたが、定理25 の $\overline{L(G)=L(H)}$ の解 (G, H) と実際に対応している。

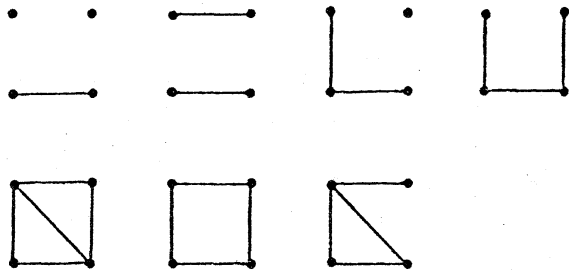
定理26 $F=L(G)=L(H)$ 、(即ち、 $\exists G, H$, s.t. $F=L(G)=L(H)$) なる F は、完全グラフ、ヌルグラフ、または図49に示される37個のグラフのどれかであることが必要十分条件であ

3.

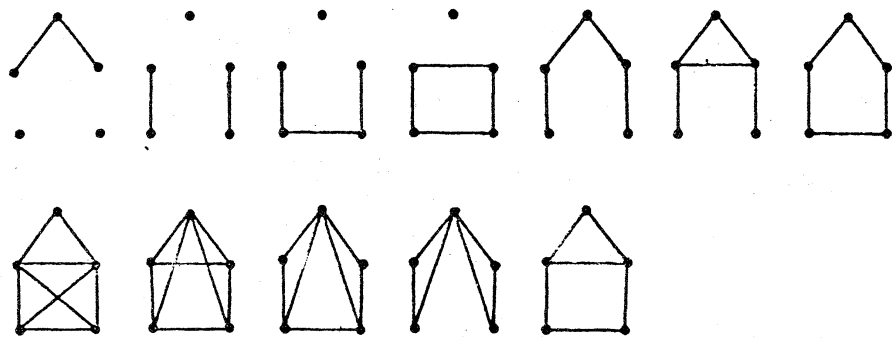
3 vertices



4 vertices



5 vertices



6 vertices

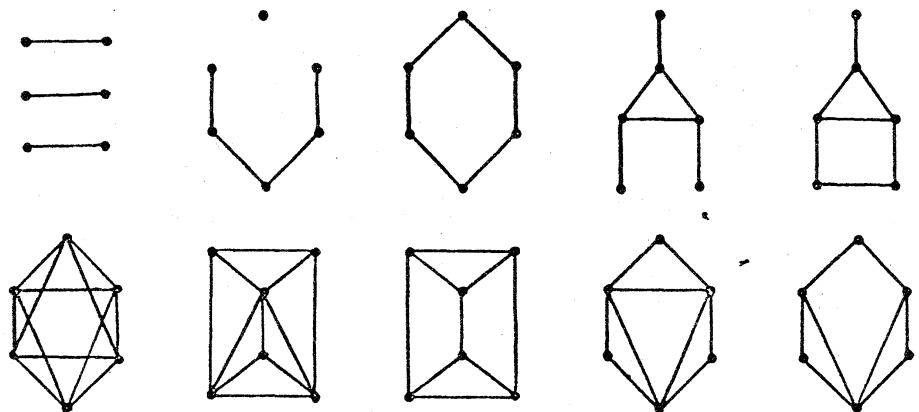


图 49 (a)

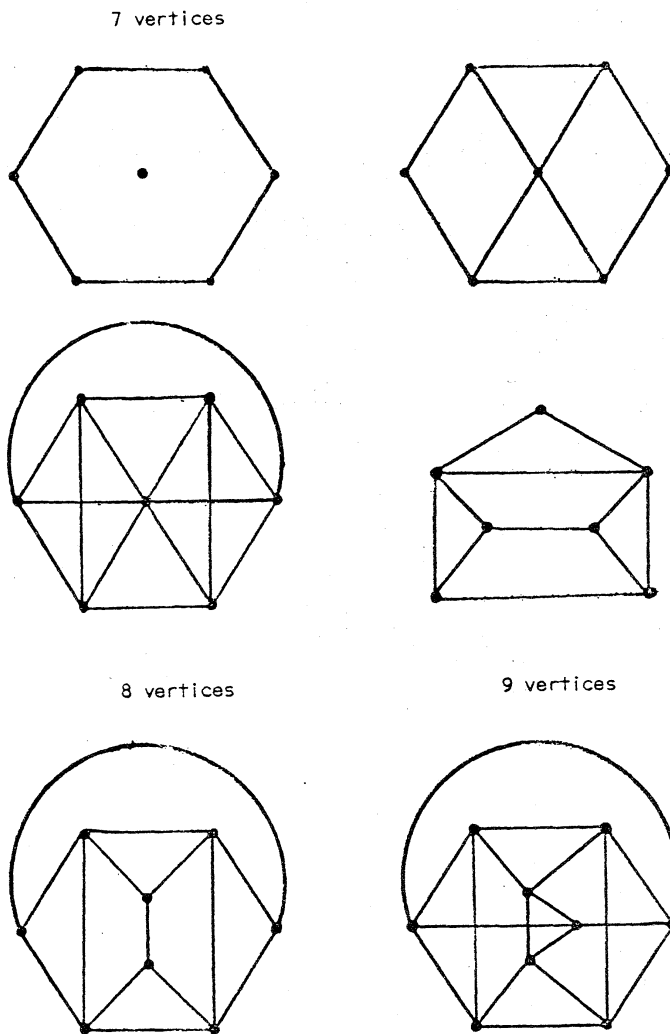


図 49 (b)

$$2^\circ \quad \overline{H} = \overline{T(G)} = T(H)$$

定理27 (Escalante, Simões-Pereira [17]) $\overline{H} = \overline{T(G)} = T(H)$

なるトリビアル以外の H は、 K_3 と $\overline{K_3} (= 3K_1)$ であり、それ以外にない。

$$\text{3° } H = \overline{M(G)} = M(H)$$

系25 $H = \overline{M(G)} = M(H)$ なるトリビアル以外の H は、図50に示されるただ1つであり、それ以外にはない。

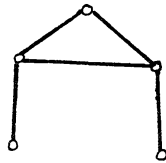


図50.

(証明)

定理25の解の組の中で、 $G \circ K_1$ の形をしているものは、⑨の解だけであることより明らか。 □

REFERENCES

- [1] M.Aigner, Graphs Whose Complement and Line Graph are Isomorphic, J. Comb. Theory 7 (1969), 273-275.
- [2] J.Akiyama, Forbidden Subgraphs with Planar Middle Graphs and Planar Total Graphs, Discrete Math. (submitted).
- [3] J.Akiyama, Forbidden Subgraphs for Graphs with Planar Repeated Line Graphs, Indian J. Math. (submitted).
- [4] J.Akiyama, T.Hamada and I.Yoshimura, A Solution of Graph Equation for Line Graphs, TRU Math. 12 No.2 (1976), 35-43.
- [5] J.Akiyama, T.Hamada and I.Yoshimura, Graph Equations for Line Graphs, Total Graphs and Middle Graphs, TRU Math.12 No.2, (1976) 31-34.
- [6] J.Akiyama, T.Hamada and I.Yoshimura, Miscellaneous Properties of Middle Graphs, TRU Math.10 (1974), 41-53.
- [7] J.Akiyama, T.Hamada and I.Yoshimura, On Characterization of the Middle Graphs, TRU Math.11 (1975), 35-39.
- [8] J.Akiyama, K.Kaneko and S.K.Simić, Graph Equations for Line Graphs and N-th Power Graphs I, Publ. Inst. Math. Beograd, (to appear).
- [9] J.Akiyama, K.Kaneko and S.K.Simić, Graph Equations for Line Graphs and N-th Power Graphs II, (to appear).
- [10] M.Behzad, A Criterion for the Planarity of Total Graph, Proc. Cambridge Philos. Soc. 63 (1976), 129-135.
- [11] L.W.Beineke, Characterization of Derived Graphs, J. Comb. Theory 9 (1970), 129-135.
- [12] L.W.Beineke, Derived Graph with Derived Complements, Recent Trends in Graph Theory, Berlin (1971), 15-24.
- [13] G.Chatrand, D.Geller and S.Hedetniemi, Graphs with Forbidden Subgraphs, J. Comb. Theory 10 (1971), 12-41.
- [14] D.M.Cvetković and S.K.Simić, Graph Equations for Line Graphs and Total Graphs, Discrete Math. 13 (1975), 315-320.
- [15] D.M.Cvetković, I.B.Lacković and S.K.Simić, Graph Equations, Graph Inequalities and a Fixed Point Theorem, Publ. Inst. Math. Beograd 20(34) (1976), 59-66.

- [16] D.M.Cvetković and S.K.Simić, Some Remarks on the Complement of a Line Graph, Publ. Inst. Math. Beograd 17(31) (1974), 37-44.
- [17] F.Escalante and J.M.S.Simões-Pereira, Just Two Total Graphs are Complementary, Monatshefte für Math. 81 (1976), 5-13.
- [18] D.L.Greenwell and R.L.Heminger, Forbidden Subgraphs for Graphs with Planar Line Graphs, Discrete Math. 2 No.1 (1972), 31-34.
- [19] F.Harary, Graph Theory, Reading (1969).
- [20] F.Harary, R.M.Karp and W.T.Tutte, A Criterion for Planarity of the Square of a Graph, J. Comb. Theory 2 (1967), 395-405.
- [21] J.Krausz, Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les réseaux, Mat. Fiz. Lapok 50 (1943), 75-89.
- [22] V.R.Kulli and E.Sampathkumar, On the Interchanging Graph of a Finite Planar Graph, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 37 (1973), 339-341 (1974).
- [23] K.Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fund. Math. 15 (1930), 271-283.
- [24] V.V.Menon, On Repeated Interchanging Graphs, Amer. Math. Monthly 13 (1966), 986-989.
- [25] V.V.Menon, The Isomorphism between Graphs and their Adjoint Graphs, Canad. Math. Bull. 8 (1965), 7-15.
- [26] G.Ringel, Selbstkomplementäre Graphen, Arch. Math. Basel 24 (1963), 354-358.
- [27] A. van Rooij and H.Wilf, The Interchange Graphs of a Finite Graph, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 16 (1965), 263-269.
- [28] J.Sedláček, Some Properties of Interchange Graphs, Theory of Graphs and its Applications, Academic Press, New York (1962), 145-150.
- [29] S.K.Simić, Graph Equation $L^n(G) = \overline{G}$, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No.498-No.541 (1975), 41-44.
- [30] H.Whitney, Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs, Amer. J. Math. 54 (1932), 150-168.