

$$\begin{aligned}
 &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n \quad \text{任意 } S \in U(\mathcal{H}) \quad S(\mathcal{H}_n) = \mathcal{H}_{n+1} \\
 98 \quad &U(\mathcal{H}) \supset \mathcal{G} = \{\text{シフト作用素}\} \supset \mathcal{S} \implies \mathcal{H}^{\mathcal{S}} = \mathcal{M} \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 &H = \{\text{直交部分空間}\} \supset \mathcal{S} \cdot \mathcal{S}^*
 \end{aligned}$$

Invariant Subspaces of Shift Operators of Arbitrary Multiplicity

U

山形大 理学部 河村新蔵

$\{\mathcal{H}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を次元の同じヒルベルト空間の族とし、 $\mathcal{H} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$ とする。上のユニタリ作用素 U が $U\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n+1}$ という性質を持つ時、 U をシフト作用素という。一つのシフト作用素 S を固定して考え、 $\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{H}_n$ を S^n によって同一視し、 $\mathcal{H}_n$ を全て $\mathcal{H}$ のコピーと考える。この同一視によって S は $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow (\xi_n = \xi_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ という、いわゆるシフト作用素となる。一般のシフト作用素 U を $U = WS$ ($W = US^*$) と表現すれば W は $W\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n$ なるユニタリ作用素となる。 $\mathcal{H}_n$ は $\mathcal{H}$ のコピーであるので、 W の $\mathcal{H}_n$ への制限、 U_n は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素と見る事ができる。 $\mathcal{G}$ をシフト作用素全体としよう。 $\mathcal{G}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ に対して $W(\mathcal{S}, S) = \{W \mid W = US^*, U \in \mathcal{S}\}$ とする。我々の目標は $\mathcal{S}$ による不変部分空間 $\mathcal{M}$ の構造を $\mathcal{S}$ との関係、即ち $W(\mathcal{S})$ との関係に於て研究する事である。この稿はその第一段階である。

任意に与えられた $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ に対して $\mathcal{S}$ はシフト作用素 S を含んでいると仮定して良い事をみてみよう。 $\mathcal{S}$ の中から

勝手にシフト作用素 U を選んできて $W = US^*$ とする。 $W \xrightarrow{\mathcal{S} \ni U} \mathcal{S} S^* \ni US^* = W$
 $= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus U_n$ (U_n は $\mathbb{R}_n$ 上のユニタリ作用素) と書ける。ここで $H \ni W$
 次の様に $\mathcal{S}$ 上のユニタリ作用素 $V = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus V_n$ を定義する。 $W = \sum_n \oplus U_n$

$U_n = U_n U_{n-1} \cdots U_1$ ($n \geq 1$), $V_0 = I$, $V_n = U_{n+1}^* U_{n+2}^* \cdots U_n^*$ ($n \leq -1$)
 $V_n^* U_n V_n = U_1^* \cdots U_n^* U_n U_{n-1} \cdots U_1$

この時 $V^* U V = S$, 従って $\mathcal{S}' = V^* \mathcal{S} V$ は S を含む。 $\mathcal{S} m$

$\subset m$ である事と $\mathcal{S}' m \subset m$ である事は同値であるから、

$\mathcal{S}$ の不変部分空間の代りに $\mathcal{S}'$ の不変部分空間を調べれば良いという事になる。 $\mathcal{S} = \{S\}$ の場合については、

Halmos [1], Helson [2] の研究が基本的である。

1. m を $\mathcal{S} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus \mathbb{R}_n$ の (閉) 部分空間としよう。 m が $\mathcal{S}$ の不変部分空間 ($\mathcal{S}$ -不変) であるとは $\mathcal{S} m \subset m$ となる事である。

ここで $\mathcal{S} m = \overline{\{Ux \mid U \in \mathcal{S}, x \in m\}}$ とし、 $[\mathcal{S} m]$ を $\mathcal{S} m$ の線型閉包とする。 m が reducing な不変部分空間であるとは、 $\mathcal{S} m \subset m$ かつ $\mathcal{S}^* m \subset m$ となる事である。

$\mathcal{S}$ に対し $M(\mathcal{S})$ として $\mathcal{S}$ から生成される von Neumann 環とする。この時次の事が成り立つ。 $\forall \mathcal{H} \ni \mathcal{S} \ni \mathcal{S} \Rightarrow M(\mathcal{S})$

1-1 命題 m が $\mathcal{S}$ の reducing な不変部分空間である事と commutant $M(\mathcal{S})$ の適当な射影子 P に対して $m = P\mathcal{S}$ となる事は同値である。

ここぞどの様な von Neumann 環 $M(\mathcal{S})$ が現われるか考えてみよう。

1-2 例 $\mathbb{T}$ を 1 次元トーラスとし、 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{R}$ とする。
 $E_n = e_n \otimes \mathcal{R}$ ($e_n(z) = z^n$) とする。 S を $L^2(\mathbb{T})$ 上の通常のシフト作用素、即ち $S: \sum \xi_n e_n \rightarrow \sum \xi_{n+1} e_n$ とする。 A を $\mathcal{R}$ 上のユニタリ作用素のある集合とする。 $\mathcal{S} = S \otimes A$ は $\mathcal{H}$ 上のシフト作用素の族で、 $M(\mathcal{S}) = L^\infty(\mathbb{T}) \otimes M$ となる。
 ここで M は A から生成された $\mathcal{R}$ 上の von Neumann 環である。又 $W(\mathcal{S}) = 1 \otimes A$ で $S^* W(\mathcal{S}) S = W(\mathcal{S})$ である。

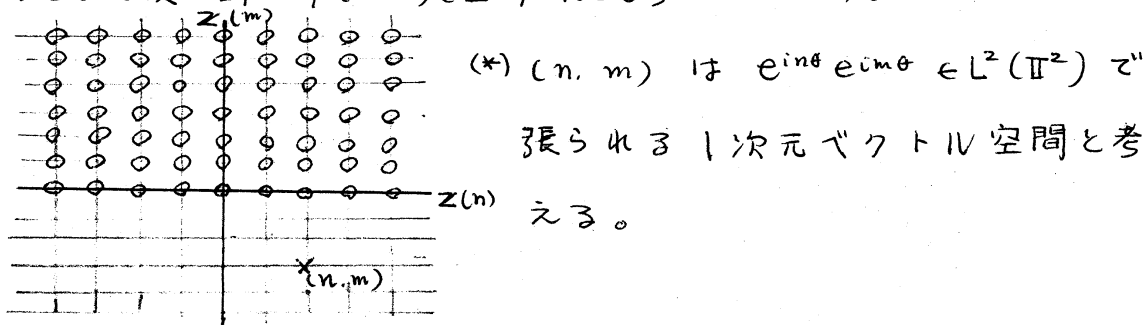
1-3 例 α を $B(\mathcal{R})$ 上の $*$ -同型写像とする。 A を $\mathcal{R}$ 上のユニタリ作用素の集合とする。 $\mathcal{S} = \{U = WS \mid W = \sum \oplus u_n, u_n = \alpha^n(u_0) \ u_0 \in A\}$ とする。 M を $\{\alpha^n(u_0) \mid u_0 \in A, n \in \mathbb{Z}\}$ から生成される von Neumann 環とすれば $M(\mathcal{S}) = W^*(M, \alpha)$ (M と α によって決定される $\mathcal{H} = \sum \oplus \mathcal{R}_n$ 上の接合積である)。

1-4 例 $\mathcal{S} = \mathcal{S}$ とすれば $M(\mathcal{S}) = B(\mathcal{H})$ である。

$\mathcal{M}$ を $\mathcal{S}$ の不変部分空間とある時、 $[\mathcal{S}\mathcal{M}] \subset \mathcal{M}$ であるが、この時 $[\mathcal{S}\mathcal{M}]$ には $[\mathcal{S}\mathcal{M}] \subsetneq \mathcal{M}$ であるか又は $[\mathcal{S}\mathcal{M}] = \mathcal{M}$ という二つの可能性が考えられる。 $\mathcal{M}$ が *reducing* な部分空間であれば $[\mathcal{S}\mathcal{M}] = \mathcal{M}$ であるが、問題は $\mathcal{M}$ が *non-reducing* である時に $[\mathcal{S}\mathcal{M}] \subsetneq \mathcal{M}$ となるかという事である。

次の例によつて $[Sm] = m$ なる non-reducing S -不変部分空間の存在を示そう。

1-5. 例 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})$, $S = \{S \otimes 1, S \otimes S\}$ $m =$
 $\{f \in \mathcal{H} \mid \hat{f}(n, m) = 0, (n, m) \notin L_1\}$ z^n は f の Fourier 変換 $L_1 = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \geq 0\}$ を表わす。

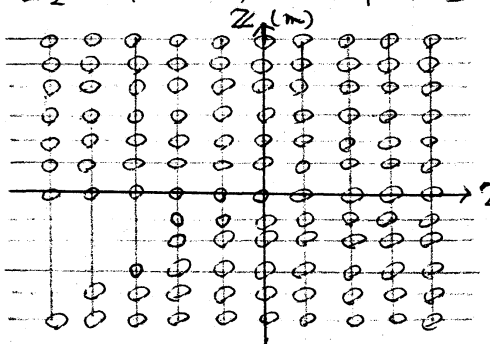


1-6. 例 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus [e_n]$, $S = \{U = WS \mid W = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus u_n$
 $u_n = 1 (n < 0)$ $u_n = 1$ 又は $-1 (n \geq 0)\}$ $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_{-n} \in \mathcal{H}$ に対し $m = [f] \oplus H^2$ ($H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus [e_n]$) とする。
 $Sm = m$ を示してみよう。 $Sm \subset m$ は明らか。 $W = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus u_n$
 $u_n = 1 (n \neq 0)$, $u_0 = -1$ とし $U = WS$ とする。この時、
 $f = (S+U)f \in Sm$ となる。又 $(S-U)f = e_0$ であるから、
 任意の $g = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n \in H^2$ に対しては、
 $g = \alpha_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = (S-U)(\alpha f) + S(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+1} e_n) \in Sm$ 。

我々は $[Sm] \subsetneq m$ なる non-reducing な不変部分空間を調べる事にする。この様な部分空間を simply な不変部分空間といふ。将来の問題としては、 $[Sm] = m$ なる場合に

ついても $[S_m] \subseteq m$ とする部分空間との関係において m の構造を調べていかねばならない。ここで $[S_m] \subseteq m$ ならば $[S^2 m] \subseteq [S_m]$ 、一般に $[S^n m] \subseteq [S^{n-1} m]$ とするだろうか。次の例によってこの事は成り立たない事を示そう。

1-7 例. $\mathcal{S} = L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})$ $\mathcal{S} = \{s \otimes 1, s \otimes s\}$ $m = \{f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \notin L_1 \cup L_2 \cup L_3 \text{ ならば } \hat{f}(n, m) = 0\}$ ここで

$$L_2 = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \geq m\} \quad L_3 = \{(-2, -1)\}$$


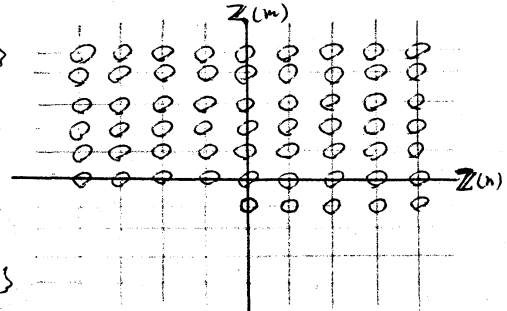
$m \ominus [S_m] = \{f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \neq (-2, -1)\}$
 ならば $\hat{f}(n, m) = 0$ かつ
 $[S^2 m] = \{f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \notin L_1 \cup L_2\}$
 ならば $\hat{f}(n, m) = 0\} = [S_m]$

更に $m \ominus [S_m] \neq \{0\}$, $[S_m] \ominus [S^2 m] \neq \{0\}$ であれば、

$\mathcal{S}(m \ominus [S_m]) = [S_m] \ominus [S^2 m]$ だろうか。これも又成り立たない事を次の例によって示そう。

1-8 例 $\mathcal{S} = L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})$ (1) $\mathcal{S} = s \otimes A$, $z = z$ $A = \{s^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$

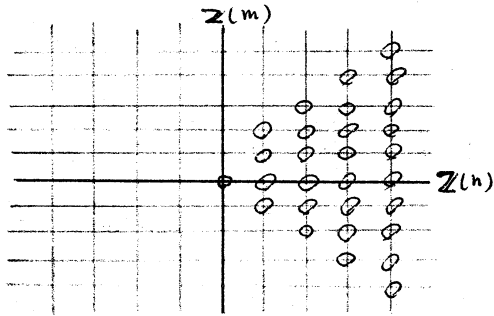
$$m = \{f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \notin L_1 \cup L_4 \text{ ならば } \hat{f}(n, m) = 0\} = z$$

$$L_4 = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \geq 0, m = -1\}$$


$m \ominus [S_m] = \{f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \neq (0, -1) \text{ ならば } \hat{f}(n, m) = 0\}$
 $[S_m] \ominus [S^2 m] = \{f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \neq (1, -1) \text{ ならば } \hat{f}(n, m) = 0\}$
 $\mathcal{S}(m \ominus [S_m]) = \{f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \notin L_5 \text{ ならば } \hat{f}(n, m) = 0\}$

$$= = \mathbb{Z} \quad L_6 = \{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n=1, m \geq -1 \}.$$

$$(2) \quad \mathcal{S} = S \otimes A, \quad A = \{1, S, S^*\} \quad \mathcal{M} = \{ f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \notin L_6 \cup L_7 \text{ ならば } f(n, m) = 0 \} \\ = = \mathbb{Z} \quad L_6 = \{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \geq 0, -m \leq n \leq m \} \quad L_7 = \{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \geq 1, m = n+1 \}$$



$$\mathcal{M} \ominus [\mathcal{S}^2 m] = \{ f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \neq (0, 0), (1, 2) \}$$

$$\text{ならば } f(n, m) = 0 \}$$

$$[\mathcal{S}^2 m] \ominus [\mathcal{S}^2 m] = \{ f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \neq (1, -1), (1, 0) \}$$

$$(1, 1), (2, 3) \text{ ならば } f(n, m) = 0 \}$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{M} \ominus [\mathcal{S}^2 m]) = \{ f \in \mathcal{S} \mid (n, m) \neq (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2) \}$$

$$\text{ならば } f(n, m) = 0 \}$$

$\mathcal{M}$ を $\mathcal{S}$ の不変部分空間で $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\mathcal{S}^n \mathcal{M}] = \{0\}$ であるとしよう。この時 $\mathcal{M}$ は pure であるという。 $\mathcal{M}$ が pure であれば $[\mathcal{S}^{n+1} \mathcal{M}] \subsetneq [\mathcal{S}^n \mathcal{M}]$ である。実際、 $[\mathcal{S}^{n_0+1} \mathcal{M}] = [\mathcal{S}^{n_0} \mathcal{M}]$ であったとすれば、任意の k について $[\mathcal{S}^{n_0+k} \mathcal{M}] = [\mathcal{S}^{n_0} \mathcal{M}]$ であるから $\mathcal{M}$ が pure である事に反する。

$$\mathcal{M}_n = [\mathcal{S}^{n+1} \mathcal{M}] \ominus [\mathcal{S}^n \mathcal{M}]$$

とすれば $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \dots$ である。

1-9 定理 $W(\mathcal{S})$ は次の(1), (2) をみたしているとする。

(1) $W(\mathcal{S})$ は群である。

(2) $S^* W(\mathcal{S}) S \subset W(\mathcal{S})$

この時任意の pure な $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathcal{M}$ に対し

$$\mathcal{M}_n = [\mathcal{S}^n m_0] \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

となる。又 $W(\mathcal{S})$ が次の条件 (2) をみたせば、 $\mathcal{M}_n = S^n[W(\mathcal{S})m_0]$ ($n=1, 2, \dots$) となる

$$(2) \quad S^* W(\mathcal{S}) S = W(\mathcal{S})$$

[証明] 明らかに $\mathcal{S}m_0 \subset \mathcal{S}m$ である。 $x_0 \in m_0, y \in m,$

$W_1, W_2, W_3 \in W(\mathcal{S})$ に対し

$$\langle W_1 S(x_0), W_3 S W_2 S(y) \rangle = \langle x_0, S^* W_1^* W_3 S W_2 S(y) \rangle = 0$$

従って $\mathcal{S}m_0$ は $\mathcal{M}_1 = [\mathcal{S}m] \ominus [\mathcal{S}^2 m]$ に含まれる。同様

にして $\mathcal{S}m_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$ となる。 $\bigcap [\mathcal{S}^n m] = \{0\}$ であるから

$$\mathcal{M} = m_0 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \dots$$

と分解される。従って

$$[\mathcal{S}m] = [\mathcal{S}m_0] \oplus [\mathcal{S}m_1] \oplus [\mathcal{S}m_2] \oplus \dots$$

ところが m_0 の定義より

$$m_0 = m \ominus [\mathcal{S}m] = m_0 \oplus (m_1 \ominus [\mathcal{S}m_0]) \oplus (m_2 \ominus [\mathcal{S}m_1]) \oplus \dots$$

である。従って $\mathcal{M}_n = [\mathcal{S}m_{n-1}]$ ($n \geq 1$) とならなければならない。

又、 $W(\mathcal{S})S \subset S W(\mathcal{S})$ (2) であるから、 $m_0 = [\mathcal{S}^n m_0]$

$$\subset S^n[W(\mathcal{S})^n m_0] = S^n[W(\mathcal{S})m_0]. \quad (W(\mathcal{S}) \text{ は群}), \text{ 更に、} [W(\mathcal{S})$$

$m_0]$ は $[\mathcal{S}m]$ と直交している。更に $W(\mathcal{S})S = S W(\mathcal{S})$ であら

ば $\mathcal{M}_n = S^n[W(\mathcal{S})m_0]$ ($n \geq 1$) である。

我々は $[S^*m] \subseteq m$ なる不変部分空間を調べているのであるが、必ずしも pure でないこの様な不変部分空間の構造について調べてみよう。

1-10 定理 $W(S)$ は次の条件をみたしているとしよう。

(1) $W(S)$ は群である。

(2) $S^*W(S)S \subset W(S)$ 。

この時、任意の simply な S の不変部分空間は次の様に分解される。

$$m = m_p \oplus m_r \quad (m_p \neq \{0\})$$

ここで m_p は pure な S の不変部分空間で m_r は reducing な S の不変部分空間である。

[証明] $m_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} [S^n m]$, $m_p = m \ominus m_r$ としよう。

$S^*W(S)^*W(S)S \subset W(S)$ であるから、 $S^*[S^n m] \subset [S^{n+1} m]$ である。従って m_r は S の reducing な不変部分空間である。又 m_p は S の不変部分空間となる。更に、 m_p は pure である。実際、 $(m_p)_{+\infty} = \bigcap_{n=2}^{\infty} [S^n m_p]$ は m_p の部分空間であるが $m_r = \bigcap_{n=2}^{\infty} [S^n m]$ にも含まれるわけだから、 $(m_p)_{+\infty} = \{0\}$ である。

S の不変部分空間 m について $m_{-\infty}$ を m を含む最小の reducing な部分空間としよう。 $S = W(S) \cdot S$ に対して、 $\widetilde{W(S)} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n W(S) S^{-n}$ ($= \mathbb{Z}$ なら $W(S)$ は $W(S)$ によって生成

された群) とすれば $\tilde{\mathcal{G}} = \widehat{W(\mathcal{G})} \cdot S$ として, $m_{-\infty} = [\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{G}}^n m]$ となる。従って $S^* W(\mathcal{G}) S = W(\mathcal{G})$ であれば $m_{-\infty} = [\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}^n m]$ である。

1-11 定理 $W(\mathcal{G})$ は定理 1-9 (10) の条件 (1), (2) をみたしているとしよう。この時、任意の $\mathcal{G}$ の不変部分空間 m に対して $\mathcal{G}$ は次の様に分解される。

$$(i) \quad \mathcal{G} = (m_p)_{-\infty} \oplus m_r \oplus m_c$$

ここで $(m_p)_{-\infty} = m_p \oplus n$, n は $\mathcal{G}^*$ の不変部分空間である。(pure であるとは限らない), 更に $S^* W(\mathcal{G}) S^* = W(\mathcal{G})$ であれば

$$(ii) \quad (m_p)_{-\infty} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus S^n [W(\mathcal{G}) m_0]$$

となり n は $\mathcal{G}^*$ に関して pure である。

[証明] 1-11 より m_r は reducing な部分空間であるから, $\mathcal{G} \oplus m_r$ も reducing であってかつ m_p を含んでいるから, $(m_p)_{-\infty} \subset \mathcal{G} \oplus m_r$ である。又、明らかに $m_{-\infty} = (m_p)_{-\infty} \oplus m_r$ であって $m_c = \mathcal{G} \oplus m_{-\infty}$ とあればよい。ここで m を pure であると仮定しよう。 $S^* W(\mathcal{G}) S^* = W(\mathcal{G})$ であれば $m_n = S^n [W(\mathcal{G}) m_0]$ となるが (1-10, 定理) 更に $[\mathcal{G}^n m_0] = [S^n W(\mathcal{G}) m_0]_{(n \in \mathbb{Z})}$ は互いに直交している。実際 $x_0, y_0 \in m_0$, $W_1, W_2 \in W(\mathcal{G})$, $n, m \in \mathbb{Z}$ ($n < m$) に対して $\langle S^n W_1(x_0), S^m W_2(y_0) \rangle = \langle x_0, W_1 S^{m-n} W_2(y_0) \rangle = \langle x_0, W_1 (S^{m-n} W_2 S^{n-m}) S^{m-n}(y_0) \rangle = 0$ 。従って

$$\mathcal{G}^n m = [\mathcal{G}^n m_0] \oplus [\mathcal{G}^n W(\mathcal{G}) m_0] \oplus [\mathcal{G}^n \cdot S^2 W(\mathcal{G}) m_0] \oplus \dots$$

$$= S^n[W(\mathcal{L})m_0] \oplus S^{n+1}[W(\mathcal{L})m_0] \oplus S^{n+2}[W(\mathcal{L})m_0] \oplus \dots$$

結局、 $m_\infty = [\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}^n m] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus S^n[W(\mathcal{L})m_0]$ である。

1-12系 U を E 上のユニタリ作用素とする。 $\sigma(U) = \{e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\}$ とする。 $A = \{1, U\}$ とし、 $\mathcal{L} = S \otimes A$ とする。この時、任意の $\mathcal{L}$ の不変部分空間 ~~に対して~~ 1-11 の ~~定理~~ の分解が得られる。

[証明] $e^{i\theta_1} \neq e^{i\theta_2}$ として充分である。この時、 A の線型閉包 $\text{lin } A$ は $u = e^{i\theta_1}e_1 + e^{i\theta_2}e_2$ のスペクトル射影子 e_1, e_2 を含んでいる。従って $\text{lin } A$ は $v = e_1 - e_2$ を含んでいて $v^2 = 1$ である。 $B = \{1, v\}$ 、 $\mathcal{L}' = S \otimes B$ とすれば、 B は群、即ち $W(\mathcal{L}) = 1 \otimes B$ は群だから $S^*W(\mathcal{L})S = W(\mathcal{L})$ 。又 $\text{lin } \mathcal{L} = S \otimes \text{lin } A = S \otimes \text{lin } B = \text{lin } \mathcal{L}'$ であるので $[\mathcal{L}m] = [\mathcal{L}'m]$ である。従って $\mathcal{L}$ の不変部分空間の構造は $\mathcal{L}'$ のそれと同じである。

1-12系より直ちに次の事が言える。

1-13系 $\dim E \leq 2$ としよう。 U を E 上のユニタリ作用素とする。 $A = \{1, U\}$ 、 $\mathcal{L} = S \otimes A$ とする。この時、任意の $\mathcal{L}$ の不変部分空間について 1-11 の定理が成り立つ。

上の系より $\dim E \leq 2$ の時には ~~$\mathcal{L} = S \otimes A$ の不変部~~

二つの $\mathcal{S}$ 上のシフト作用素 S_1, S_2 に対して $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ の不変部分空間の構造は決定されたといふことよ。

今まで $[\mathcal{S}m] \subseteq m$ とする $\mathcal{S}$ の不変部分空間 m の構造を調べてきたが、今後は $[\mathcal{S}m] \subseteq m$ なる条件と m が non-reducing である事が同値になる様な $\mathcal{S}$ の条件を与えてみよう。

1-14. 定理 $W(\mathcal{S})$ は次の条件をみたすとする。

(1) ある $k \geq 1$ に対して $W(\mathcal{S})^k$ は群となる。

(2) $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$

この時、 $\mathcal{S}$ の不変部分空間 m は $[\mathcal{S}m] \subseteq m$ である事と non-reducing である事は同値

[証明] m を $[\mathcal{S}m] = m$ とする $\mathcal{S}$ の不変部分空間としよう。 $W(\mathcal{S})^k$ は群であるから、任意の $n \geq 0$ について $W(\mathcal{S})^{k+n} = W(\mathcal{S})^k$ となり、 $W(\mathcal{S})^k$ は $W(\mathcal{S})^*$ を含む。 $W(\mathcal{S})S = SW(\mathcal{S})$ という条件により、任意の n について、 $\mathcal{S}^n = W(\mathcal{S})^n \cdot S^n$ となる。従って $\mathcal{S}^{k+1}m = W(\mathcal{S})^{k+1}S^{k+1}m = W(\mathcal{S})^k S^{k+1}m = SW(\mathcal{S})^k S^k m = S \cdot \mathcal{S}^k m$ 。 $[\mathcal{S}m] = m$ であるから $[\mathcal{S}^n m] = m$ ($\forall n \geq 1$) となり、 $m = [\mathcal{S}^{k+1}m] = S \cdot [\mathcal{S}^k m] = Sm$ 即ち、 $S^*m = m$ である。更に $\mathcal{S}^*m \subset m$ である。実際、 $\mathcal{S}^*m = S^*W(\mathcal{S})^*m \subset S^*W(\mathcal{S})^k m = S^*S^{k+1}W(\mathcal{S})^k S^k m = S^{k+1}\mathcal{S}^k m \subset m$ 。

1-14 の条件 (1), (2) を落とせば一般には成り立たない。

1-5 で $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$, 1-6 で $W(\mathcal{S})$ が群という条件の元でそれらを反例を出している。

1-15 系 $\mathcal{S} = L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{R}$. u を $\mathbb{R}$ 上のユニタリ作用素で $u^k = 1$ とする。 $\mathcal{S} = \{S \otimes 1, S \otimes u\}$ とすれば、任意の $\mathcal{S}$ の不変部分空間 m について $[S m] \subseteq m$ と $\mathcal{S}^* m \not\subseteq m$ は同値である。

最後に $\mathcal{S}$ から生成された環 $A(\mathcal{S})$ について考えてみよう。

$W(\mathcal{S})$ が群で $S^*W(\mathcal{S})S \subset W(\mathcal{S})$ であれば $A(\mathcal{S})$ は $\{T \mid T = S^1W_1 + S^2W_2 + \dots + S^nW_n, W_i \in W(\mathcal{S}), 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{Z}\}$ の線型閉包である。 $W(\mathcal{S}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n W(\mathcal{S}) S^{*n}$ とすれば $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$ となり $M(\mathcal{S})$ は $\{T \mid T = W_{-m}S^{-m} + \dots + W_0 + \dots + W_nS^n, m, n \in \mathbb{Z}\}$ の線型閉包である。ここで $A(\mathcal{S})$ と subdiagonal [3], [4] との関係について考えてみよう。 $\mathcal{S} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ に対して、 E_n を $\mathcal{S}$ から $\mathbb{R}_n$ への射影子とする。 $U_\pm = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pm i n t} E_n$ ($t \in \mathbb{R}$) は一変数ユニタリ群で $\alpha_\pm = U_\pm \cdot U_\pm^*$ は $B(\mathcal{S})$ 上の $*$ -同型写像で、任意の $\mathcal{S}$ について $M(\mathcal{S})$ は $\alpha_\pm$ -不変である。なぜなら、 $\alpha_\pm(S) = e^{\pm i t} S$, $W \in W(\mathcal{S})$ について $\alpha_\pm(W) = W$ である。ここで $\lambda \in M(\mathcal{S})$ に対して Arveson Spectrum $S_p(\lambda)$ を考えれば、 $H^0(\lambda) = \{\lambda \in M(\mathcal{S}) \mid S_p(\lambda) \subset [0, \infty)\}$ は sub-

diagonal 環である。 $A(\mathcal{S})$ との関係と言えば、 $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$ のとき $H^p(\alpha) = A(\mathcal{S})$ となり、 $S^*W(\mathcal{S})S \subsetneq W(\mathcal{S})$ のときは $H^p(\alpha) \subsetneq A(\mathcal{S})$ である。 Loeb | Muhly [4, Th V. 2] によれば一般の subdiagonal 環に対して 1-11 の分解 (i) はすでに証明されている。我々の目標は subdiagonal 環における不変部分空間の構造を調べる事ではなく、あきリフト作用素の族に於ける不変部分空間の構造を $\mathcal{S}$ との関係において調べる事である。

参考文献

- [1] P. R. Halmos, Shifts on Hilbert spaces, J. Reine Angew. Math., 208 (1961), 102-112.
- [2] H. Helson, Lectures on invariant subspaces, Academic Press, London, New York, 1964.
- [3] S. Kawamura, J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan, 29 (1977), 73-90.
- [4] R. I. Loeb | and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann Algebras, J. ~~Math.~~ Funct. Anal., 29 (1978), 214-252.