

回転系乱流におけるヘリシティの効果

森西 洋平, 中林 功一 (名工大) 任 水強 (名工大)

Effects of the Helicity on Rotating Turbulence

Youhei MORINISHI, Koichi NAKABAYASHI, Shuiqiang REN,

To consider the non-reflection property of the rotating turbulence, a new method was proposed to introduce the helicity into the initial field of turbulence for direct numerical simulation (DNS). In addition, a new algorithm with the complex helical decomposition was introduced to extend the integral factor technique to the Coriolis term in a rotating system. With the initial field with helicity, the effects of helicity and the system rotation on the turbulence statistics and the vortical structure were investigated. The DNS results show that, as the same influence as the rotation, helicity also inhibits the energy decaying. Rotation elongates the vortical structure along the rotating axis, and it appears to weaken this tendency with the presence of helicity.

1. はじめに

一般的なスペクトル・テンソル⁽¹⁾は次式で表される.

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{k}, t) = e(\mathbf{k}, t) P_{ij} + \text{Re}[z(\mathbf{k}, t) N_i(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k})] + i \varepsilon_{ijk} \frac{k_l}{k^2} h(\mathbf{k}, t) \quad (1)$$

ここで $e(\mathbf{k}, t)$, $z(\mathbf{k}, t)$ 及び $h(\mathbf{k}, t)$ はそれぞれエネルギー, 複素偏差及びヘリシティ・スペクトルである. 回転対称性及び反射対称性を満足する等方性乱流は球対称のエネルギー・スペクトル $e(\mathbf{k}, t) = E(k, t)/4\pi k^2$ の存在のみを許す. 回転対称性のみを満足する等方性乱流では, さらに球対称のヘリシティ・スペクトル $h(\mathbf{k}, t) = H(k, t)/4\pi k^2$ の存在も許す. また, 回転系等方性乱流は回転対称性のみを持つ軸対称乱流である. 従来の等方性乱流の直接数値計算 (DNS)⁽²⁾では, 初期条件に球対称のエネルギー・スペクトルを持つソレノイダルな速度場が用いられてきた. より一般的な初期スペクトル分布を持つ回転系 (軸対称) 一様乱流の DNS を行うために, 本研究では, まず, ヘリシティを含むソレノイダルな速度場の発生方法を提案する. 次に, DNS の計算のアルゴリズムとして, 回転系におけるコリオリ力に対する積分因子法を提案する. これらの方法を用いて, 初期に等方な回転系乱流の DNS を実行し, ヘリシティ及び座標回転の効果調べる.

2. ヘリシティを伴う初期速度場の発生方法

初期速度場にヘリシティを含めるためには, 局所クラヤ座標系及び複素ヘリカル波分解を用いるのが便利である. 局所クラヤ座標の直交基底ベクトル

$$\mathbf{e}^1(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}}{|\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}|}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}^1}{|\mathbf{k}|}, \quad \kappa = \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (2)$$

を用いて速度 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ を表現すると, 連続の式 $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0$ より,

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \hat{u}_v(\mathbf{k}) \mathbf{e}^1 + \hat{u}_w(\mathbf{k}) \mathbf{e}^2 \quad (3)$$

と表される. ここで, $\mathbf{k}$ は波数ベクトル, $\boldsymbol{\Omega}$ は回転軸方向のベクトルであり, ベクトル $\mathbf{e}^1$ と $\mathbf{e}^2$ は $\mathbf{k}$ に垂直な面に存在する. $\hat{u}_v$ と $\hat{u}_w$ はそれぞれ $\mathbf{e}^1$ 及び $\mathbf{e}^2$ 方向の速度 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ の射影成分である. また, 複素ヘリカル波分解の直交基底ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(+\mathbf{k}) &= \mathbf{e}^2(\mathbf{k}) - i \mathbf{e}^1(\mathbf{k}) \\ \mathbf{N}(-\mathbf{k}) &= \mathbf{e}^2(\mathbf{k}) + i \mathbf{e}^1(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4)$$

を導入すれば, $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ は次式で表される.

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \xi_{+1} \mathbf{N}(\mathbf{k}) + \xi_{-1} \mathbf{N}(-\mathbf{k}) \quad (5)$$

ここで, ξ_{+1} と ξ_{-1} はそれぞれ $\mathbf{N}(\mathbf{k})$ 及び $\mathbf{N}(-\mathbf{k})$ 方向の速度 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ の射影成分である. ヘリカル波分解の成分 ξ_{+1} , ξ_{-1} とクラヤ座標系の速度成分 $\hat{u}_v(\mathbf{k})$, $\hat{u}_w(\mathbf{k})$ の関係は次のように与えられる⁽³⁾.

$$\begin{aligned} \xi_{+1} &= \frac{1}{2}(\hat{u}_w + i \hat{u}_v) \\ \xi_{-1} &= \frac{1}{2}(\hat{u}_w - i \hat{u}_v) \end{aligned} \quad (6)$$

速度成分 ξ_{+1} , ξ_{-1} を用いて, 球対称のスペクトル・テンソルを表現すると,

$$\langle \xi_{+1} \xi_{+1}^* \rangle = \frac{E^{++}(k, t)}{4\pi k^2}, \quad \langle \xi_{-1} \xi_{-1}^* \rangle = \frac{E^{--}(k, t)}{4\pi k^2} \quad (7)$$

となる. ここで, $E^{++}(k, t)$, $E^{--}(k, t)$ は

$$\begin{aligned} E^{++}(k, t) &= \frac{1}{2}[E(k, t) + H(k, t)/k] \\ E^{--}(k, t) &= \frac{1}{2}[E(k, t) - H(k, t)/k] \end{aligned} \quad (8)$$

で記述できる。式(8)からヘリシティ・スペクトル $H(k,0)$ に対する次の拘束条件が導かれる⁽⁴⁾。

$$|H(k,t)| \leq kE(k,t) \quad (9)$$

式(8), (9)に従い, ここでは初期エネルギー・スペクトル $E(k,0)$ を与えた後にヘリシティ・スペクトル $H(k,0)$ を次式で与える。

$$H(k,0) = \alpha k E(k,0), \quad |\alpha| \leq 1 \quad (10)$$

α は本方法のパラメータであり, $\alpha=0$ と $\alpha=1$ はそれぞれ初期にヘリシティが存在しない及び存在する場合に対応する。また, 位相の変化を表現するために, 本研究では,

$$\begin{aligned} \xi_{+1}(\mathbf{k},0) &= \left[\frac{E^{++}(\mathbf{k},0)}{4\pi k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp[I\theta] \\ \xi_{-1}(\mathbf{k},0) &= \left[\frac{E^{--}(\mathbf{k},0)}{4\pi k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp[I(\theta + \phi)] \end{aligned} \quad (11)$$

とおく。ここで θ と ϕ は $(0, 2\pi)$ の間に分布する一様乱数である。

初期エネルギー・スペクトル $E(k,0)$ を与え, 式(10)に従って $H(k,0)$ を定めると, $E^{++}(\mathbf{k},0)$ と $E^{--}(\mathbf{k},0)$ は式(8)から求められる。これらを式(11)に代入して, $\xi_{+1}(\mathbf{k},0)$ と $\xi_{-1}(\mathbf{k},0)$ が与えられれば, 式(5), (6)及び式(3)を通してヘリシティを含む初期速度場 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ が求められる。

3. コリオリ力に対する積分因子法

3.1 基礎方程式

x_3 軸まわりに回転角速度 Ω で回転する座標系に存在する非圧縮性流体の乱流を考え, N-S 式及び連続の式を基礎方程式として用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - 2\Omega \varepsilon_{ij3} u_j \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

上式をフーリエ変換すると次式を得る。

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 \right) \hat{u}_i = P_{im}(\mathbf{k}) (-Ik_j \hat{u}_j \hat{u}_m - 2\Omega \varepsilon_{m3j} \hat{u}_j) \quad (13)$$

ここで $P_{im}(\mathbf{k}) = \delta_{im} - k_i k_j / k^2$ はソレノイダル射影演算子である。式(13)から明かなとおりコリオリ力項は線形項であるが粘性項のように対角化されていないので従来は陽的に時間進行されている。しかし, その場合には回転角速度 Ω が大きくなると時間刻み幅 Δt を非常に小さく設定しなければ数値計算を安定に実行できないことがこれまで経験的に知られている⁽⁶⁾。ここで, 式(13)のコリオリ力項の対角化を行う。まず,

式(13)をベクトル表示する。

$$\left[\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 \right) \mathbf{E} + \frac{2\Omega k_3}{k^2} \mathbf{A} \right] \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{M}} \quad (14)$$

ここで, $\mathbf{E}$ は単位行列。ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ 及び $\hat{\mathbf{M}}$ は

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \end{bmatrix},$$

であり, $\hat{\mathbf{M}}$ の成分は $\hat{M}_i = -Ik_j P_{im}(\mathbf{k}) \hat{u}_j \hat{u}_m$ である。また, 行列 $\mathbf{A}$ は次式で定義される。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & +k_2 \\ +k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & +k_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ を対角化し, 式(14)を変形すると,

$$\left[\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 \right) \mathbf{E} + \frac{2\Omega k_3}{k^2} \mathbf{D} \right] \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{N}} \quad (15)$$

を得る。ここで,

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} +Ik & 0 & 0 \\ 0 & -Ik & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{u}}, \quad \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{M}}$$

$\mathbf{Q}$ と $\mathbf{Q}^{-1}$ は行列 $\mathbf{A}$ のモードマトリックスである。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{k_2^2+k_3^2}} \begin{bmatrix} (k_2^2+k_3^2) & (k_2^2+k_3^2) & \sqrt{2k_1}\sqrt{k_2^2+k_3^2} \\ (-k_1k_2 - Ik k_3) & (-k_1k_2 + Ik k_3) & \sqrt{2k_2}\sqrt{k_2^2+k_3^2} \\ (-k_1k_3 + Ik k_2) & (-k_1k_3 - Ik k_2) & \sqrt{2k_3}\sqrt{k_2^2+k_3^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{k_2^2+k_3^2}} \begin{bmatrix} (k_2^2+k_3^2) & (-k_1k_2 + Ik k_3) & (-k_1k_3 - Ik k_2) \\ (k_2^2+k_3^2) & (-k_1k_2 - Ik k_3) & (-k_1k_3 + Ik k_2) \\ \sqrt{2k_1}\sqrt{k_2^2+k_3^2} & \sqrt{2k_2}\sqrt{k_2^2+k_3^2} & \sqrt{2k_3}\sqrt{k_2^2+k_3^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式(15)の各成分は次式のように記述できる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 + I \frac{2\Omega k_3}{k} \right) \hat{v}_1 &= \hat{N}_1 \\ \left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 - I \frac{2\Omega k_3}{k} \right) \hat{v}_2 &= \hat{N}_2 \end{aligned} \quad (16)$$

ここで, 成分 $\hat{v}_3$ 及び $\hat{N}_3$ は連続の式よりゼロである。回転積分因子 $\exp[(\nu k^2 \pm I 2\Omega k_3/k)t]$ を導入すると式(16)は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[e^{(\nu k^2 + I \frac{2\Omega k_3}{k})t} \hat{v}_1 \right] &= e^{(\nu k^2 + I \frac{2\Omega k_3}{k})t} \hat{N}_1 \\ \frac{d}{dt} \left[e^{(\nu k^2 - I \frac{2\Omega k_3}{k})t} \hat{v}_2 \right] &= e^{(\nu k^2 - I \frac{2\Omega k_3}{k})t} \hat{N}_2 \end{aligned} \quad (17)$$

本研究では式(17)の時間進行法に4次精度のルンゲ・クッタ(RK4)法を用いてスペクトル法によるDNSを行う。

3.2 アルゴリズムの検証

前節で示された DNS の計算アルゴリズムの有効性を確認するために、コリオリ力項を陽的に扱う従来の手法 (Standard) と本アルゴリズム (Present) を使い、初期に等方な回転系一様減衰乱流の DNS を検証計算として実行した。図 1 に、乱流エネルギー K の時間変化を示す。ここで、 $\Omega = 100 [\text{rad/s}]$ と設定した。Standard の結果は、 $\Delta t = 0.02, 0.015 [\text{s}]$ とした計算例が発散し、 $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.0002 [\text{s}]$ とした計算例が安定な計算結果を与えている。しかし、 $\Delta t = 0.01 [\text{s}]$ の計算例はコリオリ力項に対する安定性条件は満足しているが、収束解 ($\Delta t = 0.0002$ の計算結果) とかなり異なる結果を与えている。これはコリオリ力項に対する RK4 の拡散誤差の影響と考えられる。一方、本論文で提案する手法 (Present) は、 $\Delta t = 0.01$ で既に Standard の $\Delta t = 0.0002$ とほぼ一致する計算結果を与え、コリオリ力項に関する拡散誤差も与えないことが確認されている。以上より、高回転角速度の条件に対する本手法の有効性が確認された。

4. DNS の結果及び考察

4.1 計算条件

本研究ではエネルギー・スペクトル $E(k, t)$ の初期分布として次式を仮定する⁽⁵⁾,

$$E(k, 0) = q_0 \frac{k}{k_p^2} \exp\left(-\frac{k}{k_p}\right) \quad (18)$$

ただし、 $q_0 = 3$, $k_p = 5$ を用いる。計算条件を表 1 に示す。

Table 1. Computational Condition

Region [m^3]	Grid	Viscosity ν [m^2/s]	Δt [s]	Ω [rad/s]
$(2\pi)^3$	96^3	0.01	0.01	0, 2.5, 10

4.2 計算結果

図 2 に乱流エネルギー K の時間発展を示す。 K は時間とともに減衰するが、 Ω が増大すると K の減衰が抑制される。これは今までの理論解析及び数値計算結果⁽⁷⁾ より、回転のスクランブル効果と考えられる。さらに、 $\alpha = 0$ と $\alpha = 1$ の結果を比較すると、同じ回転数 Ω でも、ヘリシティの存在はエネルギーの減衰を抑制することが分かる。これについて更に詳しく調べるために、エネルギー輸送関数 $T(k, t)$ を検討する。N-S 式の対流項を回転型で表すと次式となる。

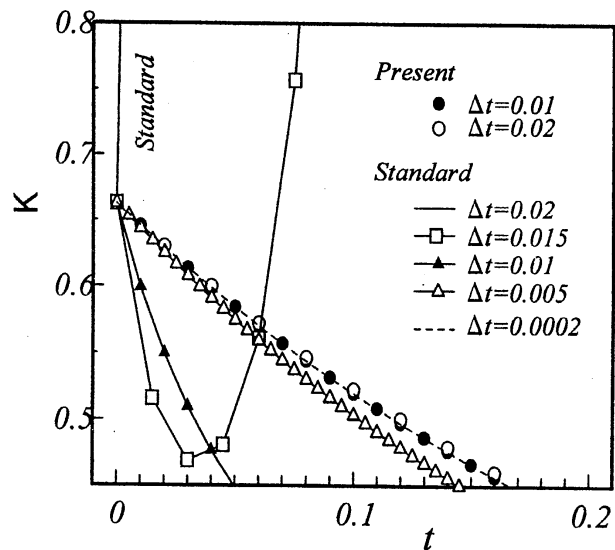


Fig.1 The evolution of the turbulence energy.

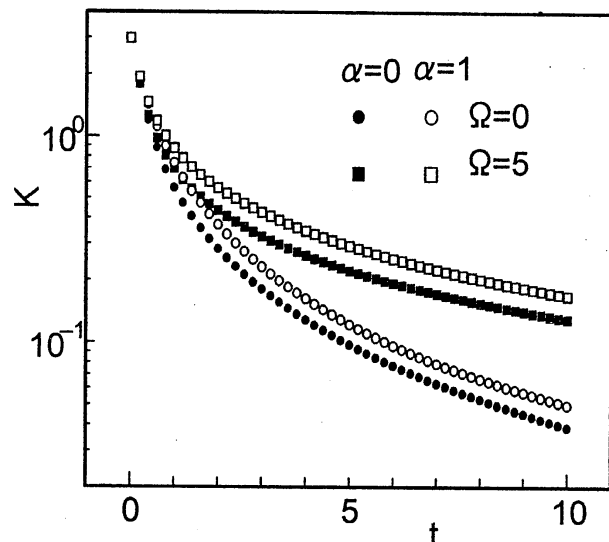


Fig.2 The evolution of the turbulence energy.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \nu \Delta^2 \mathbf{u} \quad (19)$$

ここで、 $\Pi = p/\rho + |\mathbf{u}|^2/2$ である。上式から得られるエネルギー輸送関数は次式と表される。

$$T(k, t) = \int \text{Re} \langle P_{im} (\widehat{\mathbf{u}} \times \widehat{\boldsymbol{\omega}})_m^* \widehat{\mathbf{u}}_i \rangle d\mathbf{k} \quad (20)$$

また、非線形項 $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ とヘリシティ $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ の関係が次式で与えられる。

$$|\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}|^2 + |\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\boldsymbol{\omega}|^2 \quad (21)$$

式(21)より $|\mathbf{u}|^2 |\boldsymbol{\omega}|^2$ が変化しないとすれば、平均ヘリシティ $|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}|$ が増大すると、非線形項 $|\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}|$ が小さくなる。図 3 に $|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}|$ 及び $|\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}|$ の変化の一般的な例を示す。この場合 $|\alpha|$ が増

大しでも、 $|\mathbf{u}| \cdot |\boldsymbol{\omega}|$ の値がほとんど変化せず、 $|\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}|$ の値が小さくなる。これより、 $|\alpha|$ が増大すると非線形効果が弱まり、式(20)よりエネルギーの輸送も弱まる。

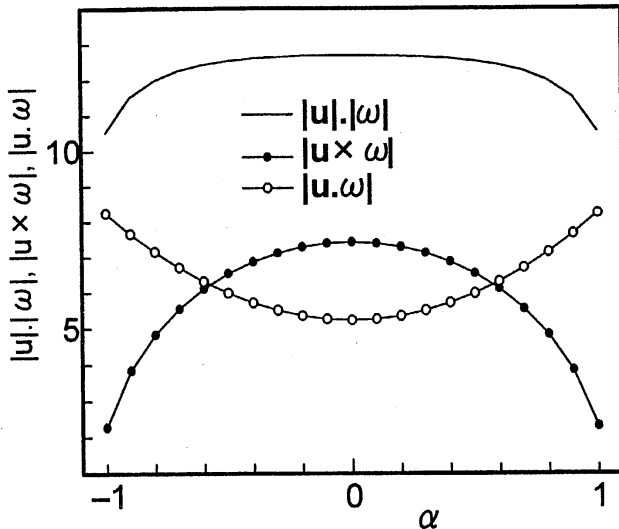


Fig.3 Varying of $|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}|$ and $|\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}|$ with α

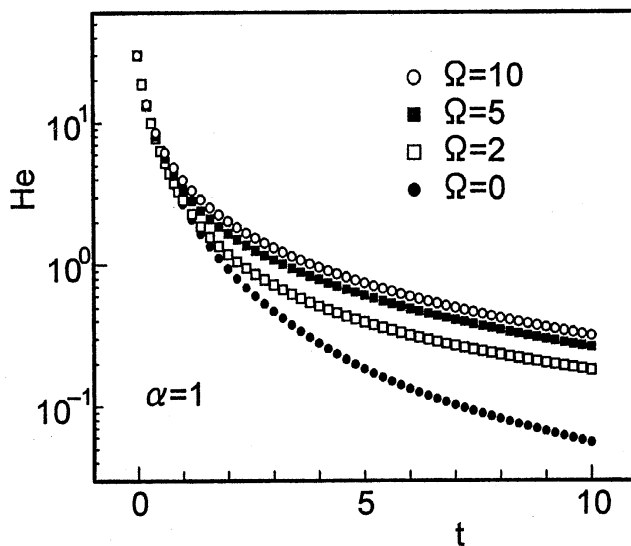


Fig.4 The evolution of the helicity.

図4にヘリシティの時間発展を示す。回転がヘリシティに及ぼす影響はエネルギーに対する影響と同様であり、ヘリシティの減衰が抑制される。ヘリシティに対する回転のスクランブル効果と考えられる。更に、図5と図6に速度ベクトル $\mathbf{u}$ と渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の間の角度 θ の確率密度関数(PDF)を示す。初期に平均ヘリシティが存在しない場合($\alpha=0$, 図5)では、回転の有無によらず、PDFの最大値は $\theta=55^\circ \sim 60^\circ$ に存在し、時間的にあまり変わらない。一方、初

期に平均ヘリシティが存在する場合($\alpha=1$, 図6)では、回転を加えるとPDFの極値が約 25° においても現れてくる。ヘリシティの値が $|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}| = |\mathbf{u}| \cdot |\boldsymbol{\omega}| \cos \theta$ であることを考えると、ヘリシティの値は回転による θ の値の減少とともに増大する。すなわち、回転によってヘリシティの減衰が抑制される。

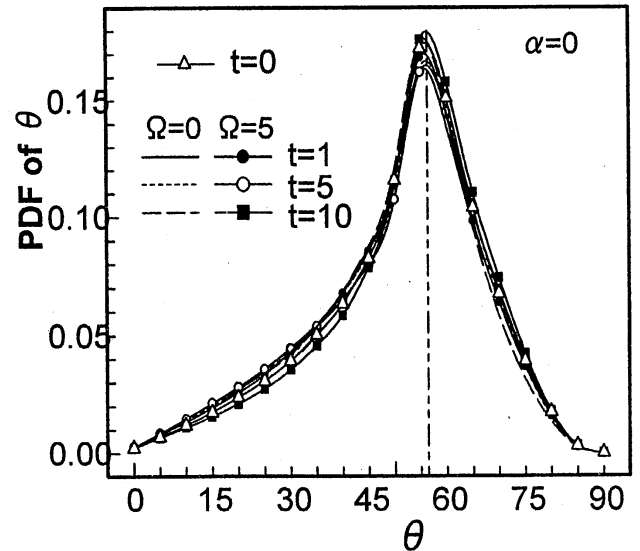


Fig.5 PDF of the angle θ between $\mathbf{u}$ and $\boldsymbol{\omega}$

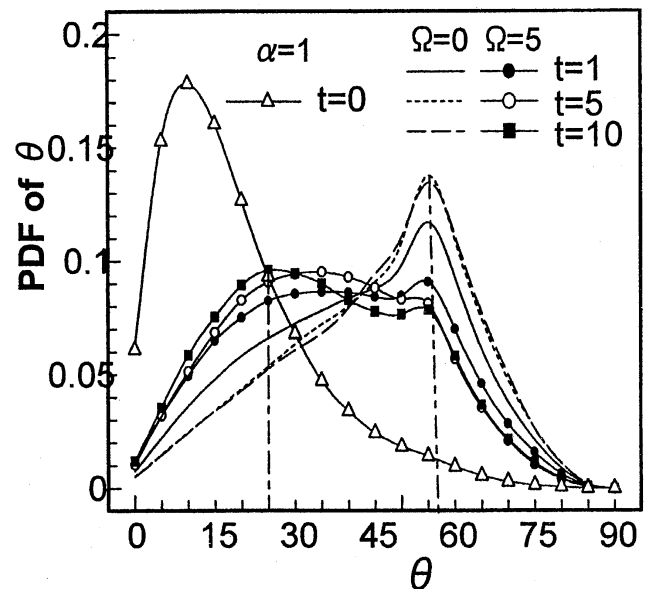


Fig.6 PDF of the angle θ between $\mathbf{u}$ and $\boldsymbol{\omega}$

図7のa, bに、 $\Omega=5$ におけるヘリシティが存在する場合($\alpha=1$)と存在しない場合($\alpha=0$)の渦度の絶対値の等値面を示す。初期 $t=0$ には細かい渦が多数存在しているが、時間発展とともに大きな渦構造が現れる。また、回転により、

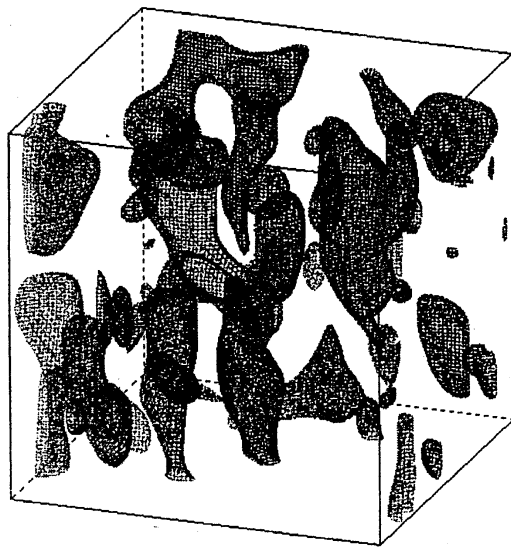
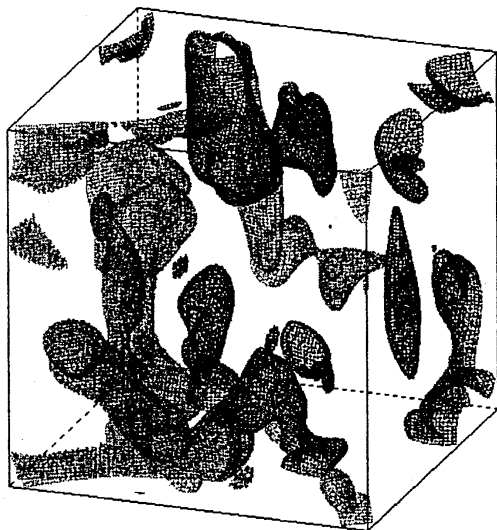
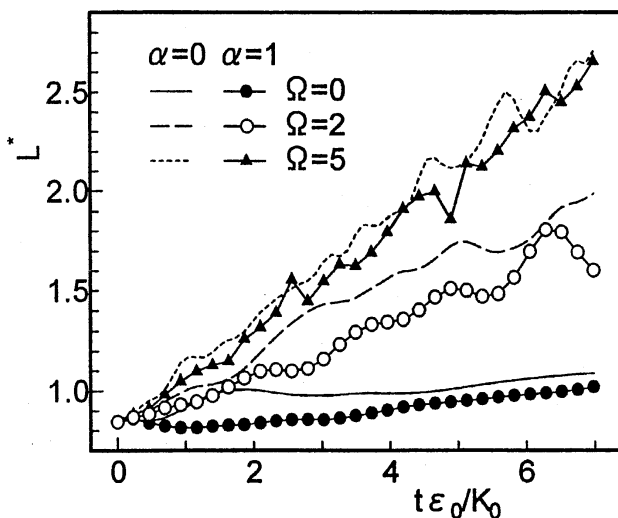
(a). $\alpha=0$ (b). $\alpha=1$ Fig. 7 Iso-surface of the vorticity $|\omega|$ 

Fig. 8 The evolution of the integral scale

ヘリシティが存在しない場合には回転軸に平行な渦構造が現れるが、ヘリシティが存在する場合にはこの傾向は弱まる. 図 8 に、横積分長さ L^* と縦積分長さの比 L^* の時間発展を示す. ここで、

$$L^* = [(L_{11}^3)^2 + (L_{22}^3)^2]^{0.5} / L_{33}^3 \quad (22)$$

$$L_{ij}^k = \int \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + r\mathbf{n}^{(k)}) \rangle dr / \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) \rangle \quad (23)$$

と定義される. 回転が存在する場合には、横積分長さが縦積分長さより速く増大するが、 $\alpha=1$ のヘリシティが存在する場合(Symbol)では、ヘリシティが存在しない場合(Line)と比べて横積分長さの増大が少し遅くなる.

5. まとめ

1. 初期にヘリシティを含む等方な乱流場の構成方法を提案し、ヘリシティがある場合及びない場合について、初期に等方な回転系一様減衰乱流の DNS を実行した.
2. 等方性乱流に及ぼす回転の効果と同様に、ヘリシティの存在は乱流エネルギーの減衰を抑制する.
3. ヘリシティが存在しない場合には座標回転により回転軸に平行な渦構造が現れるが、ヘリシティが存在する場合にはこの傾向は弱まる.

参考文献

- (1) . Cambon, C. & Jacquin, L., J. Fluid Mech., 202 (1989) pp295-317.
- (2) . Rogallo, R. S., NASA TM81315 (1981), pp1-91.
- (3) . Lesieur, M., Turbulence in Fluids (Third Revised and Enlarged Edition) Kluwar, London, (1997) pp141-146.
- (4) . Andre, J. C. & Lesieur, M., J. Fluid Mech., 81 part 1 (1977) pp187-207.
- (5) . Kraichnan, R. H., Phys. Fluids, vol.7, No.7 (1964) pp1030-1050.
- (6) . 森西, 中林, 田平, 任, 回転系一様乱流の DNS アルゴリズム, 機論(B編), 65 巻 631 号, 1999.
- (7) . Cambon, C., Mansour, N. N. & Godefert, F. S., J. Fluid Mech., 337(1997), pp. 303-332.