

平坦な部分をもつテント写像の性質について

— 周期解・カオス・雑音 —

大阪大学基礎工学部生物工学科 土居伸二 (Shinji Doi)

1. はじめに

一次元の差分方程式（一次元写像）で記述される離散力学系は最も単純な力学系であるにもかかわらずその力学系の示す挙動は極めて多様である[1]. 生物学においてもこの一次元写像は個体群モデルなど古くから用いられてきた. 特に近年様々な分野で注目を集めているカオス現象の研究においては一次元写像が中心的な役割を担っていることが多い.

カオスは確定的なシステムが確率的な挙動を示すものとして注目を集めている. 一方, 自然界のシステムは様々な擾乱を受けており, カオスの雑音による影響を調べることは, 自然現象とカオスとの関わりを考えるうえで重要である.

近年このような観点からいくつか報告が提出されており, 大別するとシステムに雑音を付加することによってシステムのカオティックな性質が強まるとするNoise-Induced Chaosの現象と[2,3], 雑音によってカオティックな状態から周期性の強い状態への転移が起こるNoise-Induced Orderの現象がある[4-10]. とりわけ, 後者のNoise-Induced Orderの現象は, 自然現象におけるカオスの役割を考えるうえできわめて興味深い. このなかでもMatsumoto, TsudaらがB-Z (Belousov-Zhabotinsky) 写像を用いて行った一連の研究[5-10]はNoise-Induced Orderの現象をもっとも顕著に示しているものである. 彼らが示したNoise-Induced Orderの現象はおもに次のような特徴を持つ.

- ① 雑音によってスペクトルに強い周期性が現れる.
- ② 雑音によってリアプノフ数が正から負に変化する.
- ③ 雑音によってエントロピーが減少する.
- ④ 平均相互情報量が振動的に振舞い, 雑音を付加すると指数的に減少する.

Matsumotoらは, B-Z写像を詳しく調べ写像に急勾配な部分と広い平坦な部分が存在すること, 主に急勾配な部分の存在によってこの現象が起こるとした.

一方, 筆者は以前に平坦な部分を持つ単峰形の区分的線形写像 (TWFS写像) を提案し, この単純な写像を用いて上のようなNoise-Induced Orderの現象がすべて観察されることを数値計算により示した[11,12]. この写像はB-Z写像のように急勾配な部分はもたず, ただ平坦な部分をもつだけという極めて単純な写像になっている. このことは平坦な部分の

存在がNoise-Induced Orderの現象において重要な役割を担っていることを示唆している。しかし、TWFS写像のような簡単な写像を用いてもNoise-Induced Orderの現象が生じることを数値計算により示したに過ぎず、なぜそのような現象が生じるかについては詳しい解析は行われていない。Noise-Induced Orderの現象を解明する上でわれわれが提案したTWFS写像の性質を詳しく調べることは重要であると考えられる。また、この写像の性質を調べることはNoise-Induced Orderの研究のみならず、広く一次元離散力学系の研究において重要であると考えられる。

したがって、本研究ではこのTWFS写像の性質を詳しく調べる。2章では、B-Z写像とNoise-Induced Orderについて簡単に述べ、3章では、TWFS写像の分岐構造を詳しく調べる。これらの計算をもとにTWFS写像の興味ある性質を明らかにする。

2. B-Z写像とNoise-Induced Order

一次元の離散力学系（システム）

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n=0, 1, \dots \quad (2.1)$$

を考える。ここで $f(x)$ は単位区間 $I=[0, 1]$ 上の関数とする。このとき

$$\{x_n\} = x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \quad (2.2)$$

を一次元写像 $f(x)$ によって生成される軌道という。システム(2.1)に雑音を付加するとは次のシステムを考えることである：

$$\hat{x}_{n+1} = f(\hat{x}_n) + \xi_n, \quad n=0, 1, \dots \quad (2.3)$$

ここで $\{\xi_n\}$ は、計算機で生成した微小区間 $[-\sigma/2, \sigma/2]$ 上の一様乱数である。

まず、MatsumotoらがNoise-Induced Orderの現象の生じる写像として用いたB-Z写像 $f(x)$ を以下に示す。

$$\begin{aligned} f(x) &= \{a+(x-1/8)^{1/3}\} \exp(-x)+b, \quad (0 \leq x < 0.3) \\ &= c\{10x \cdot \exp(-10x/3)\}^{1/3}+b, \quad (0.3 \leq x \leq 1) \\ a &= 0.50607357, \quad c=0.121205692 \end{aligned} \quad (2.4)$$

この写像 $f(x)$ の概形を図1に示した。このようにB-Z写像は広い平坦な部分と急勾配な部分($x=1/8$ の近傍)とをもっている。

この写像のふるまいを調べるためにパラメータ b を変化させて分岐図を図2に描いた。横軸は分岐パラメータ b であり、縦軸は軌道 $\{x_n\}$ がほぼ定常状態に落ち着いたと考えられるときの軌道 $\{x_n\}$ が通る位置を表す。すなわち各々の b に対して、 $x_0=0$ なる軌道 $\{x_n\}, n=500, \dots, 2500$ を縦軸にプロットした。この図でいくつかの点が離れて打たれているように見

える b の値では、B-Z写像によって生成される軌道は周期的であり、点が重なって線のように見えるところでは軌道はカオティックなふるまいをしている。

MatsumotoらはこのB-Z写像を用い、システム(2.1)の生成する軌道がカオティックなふるまいをするようにパラメータ b ($b=0.0121372859$) を選びそのとき(2.3)式のようにシステムに微小な雑音を付加することにより1章で述べたNoise-Induced Orderの現象(①-④)が観察されることを示した。MatsumotoらはこのNoise-Induced Orderの現象を詳しく調べ、この現象が起こるのは写像に急勾配な部分が存在するためであるとした。

B-Z写像の分岐図はシステムが周期的なふるまいをする分岐パラメータ b の範囲が相対的に広く、その間にカオティックなふるまいをする分岐パラメータの範囲が存在するという際だった特徴をもっている。(2.3), (2.4)よりわかるように、システム(2.1)に雑音を加えることは分岐パラメータ b を不規則に変動させることと等しい。したがって大ざっぱに言えば、カオティックなふるまいをしているシステム(2.1)に雑音を加えるとそのパラメータ b の近くの周期的なふるまいをする場合の影響が強くて、Noise-Induced Orderの現象が生じるものと考えられる。すなわち、Noise-Induced Orderの現象はこのような写像の分岐構造に密接に関連しているものと考えられる。

筆者は、以前にこのような分岐構造をもつ写像として次のような区分的線形写像を提案した：

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x+b+\varepsilon, & (0 \leq x \leq a/2) \\ &= 2(a-x)+b+\varepsilon, & (a/2 < x \leq a) \\ &= \varepsilon(x-a)/(a-1)+b+\varepsilon, & (a < x \leq 1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

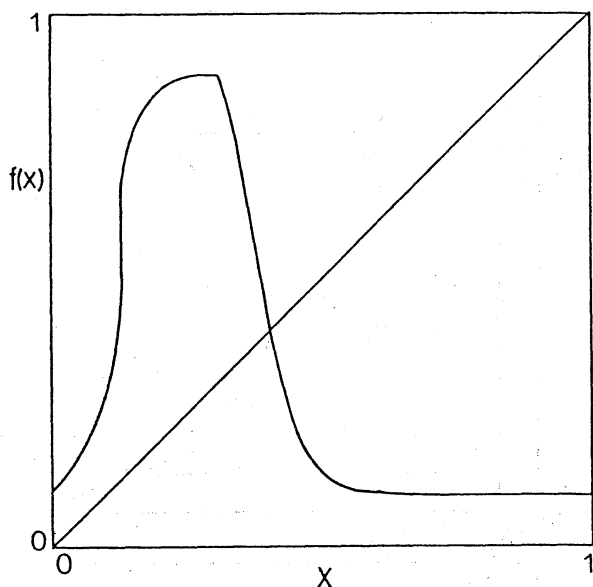


図1 B-Z写像

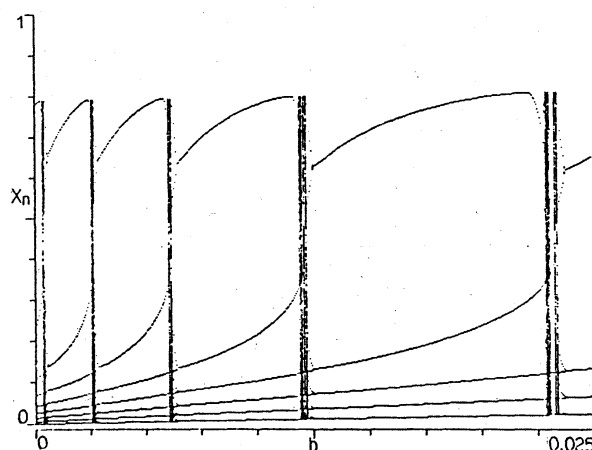


図2 分岐図(B-Z写像)

この写像の概形を図3(a)に示した。この写像はカオスを生成する写像として知られているテント写像に平坦な部分をつけただけの極めて簡単な写像になっている。以下ではこの写像をTWFS(Tent With a Flat Segment)写像と呼ぶ。また ε が十分小さいとき、パラメータ a, b を適当に選ぶとこの写像の生成する軌道はカオティックなふるまいを示し、そのとき雑音を付加することによりNoise-Induced Orderの現象①-④がすべて観察されることを数値計算により示した[11,12]。TWFS写像はB-Z写像のように急勾配な部分はない、ただ平坦な部分をもつのみである。すなわち、これらの数値計算結果は、Matsumotoらの考察に反して、Noise-Induced Orderの現象において急勾配な部分でなく平坦な部分が重要な役割を担っていることを示唆している。しかしながら、まだ数値計算例を示したに過ぎず、Noise-Induced Orderの現象がなぜ生じるかについては詳しい説明は得られていない。

したがって、以下ではNoise-Induced Orderの現象の解明の第一歩としてTWFS写像の性質を詳しく調べる。

3. TWFS写像の分岐構造

ここでは、TWFS写像の分岐構造を調べる。そのためにTWFS(2.5)写像を同型な写像 $f(x)$ ：

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x+2a, & (0 \leq x \leq 1/2-a) \\ &= -2x+2-2a, & (1/2-a < x \leq \alpha) \end{aligned}$$

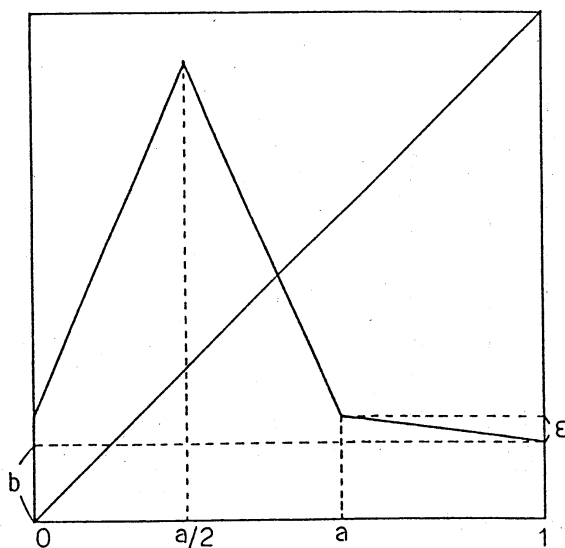


図3(a) TWFS写像

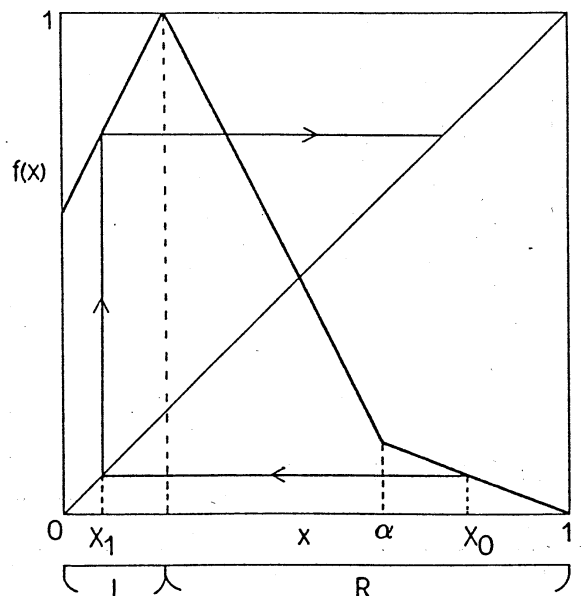


図3(b) TWFS写像と軌道

$$= 2\delta(1-x), \quad (\alpha < x \leq 1) \\ \alpha = (1-\delta-a)/(1-\delta), \quad (0 \leq a \leq 1/2) \quad (3.1)$$

に変換する。この写像の概形を図3(b)に示した。以下では、この写像 $f(x)$ の性質を詳しく調べる(写像(3.1)もTWFS写像と呼ぶ)。

3.1 準備

まず、準備としていくつかの定義を行う。

【定義1】 一次元写像 $f(x)$ によって生成される周期軌道 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0, \dots, x_{n-1}, \dots$ に対して

$$|d\{f^n(x)\}/dx|_{x=x_0} = \prod_{l=0}^{n-1} |df(x_l)/dx| < 1 \quad (3.2)$$

となるとき、その周期軌道は安定であるという。

次に記号力学的方法を導入する。

【定義2】 実数 $x(0 \leq x \leq 1)$ に記号 L, C, R を以下のように対応させる。

$$\begin{aligned} \theta(a, x) &= L, & (0 \leq x < 1/2-a) \\ &= C, & (x=1/2-a) \\ &= R, & (1/2-a < x \leq 1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

このとき x から出発した軌道 $\{x_n\}: x_0=x, \dots, x_n, \dots$ の道程(Itinerary) $I(a, x)$ とは、

$$I(a, x) = \theta(a, x_0)\theta(a, x_1)\dots \quad (3.4)$$

で定義される記号 L, C, R の列をいう。

図3(b)に軌道 $x_0, x_1, \dots$ の例を示した。この軌道の道程はRLR...である。

次にこのように定義された L, C, R の記号列の間にいくつかの演算を定義する。

【定義3 (演算)】 A を有限列、 B を有限または無限列とする：

$$\begin{aligned} A &= a_1 a_2 \dots a_n, \\ B &= b_1 b_2 \dots b_n \dots, \quad a_i, b_i = L, C, R \end{aligned}$$

(a) 有限列 A に対して n をその長さといい、 $|A|$ で表す。

(b) $AB = a_1 \dots a_n b_1 \dots$ を A と B の連結(concatenation)という。

(c) A^* : A の無限の連結 $AA\dots$ を表す。

(d) $\bar{A}$: $\bar{A} = a_1 \dots C a_n$. すなわち、有限列の最後から2番目の記号を C で置き換えたものを

表す.

(e) $N(A)$: 記号列 A に含まれる記号 R の数を表す.

(f) $\sigma(B)$: $B=b_1 b_2 b_3 \dots$ に対して $\sigma(B)=b_2 b_3 \dots$. この σ をシフトオペレータという.

$\sigma^n(B), n=2, 3, \dots$ は

$$\sigma^n(B)=\sigma(\sigma^{n-1}(B)), \quad n=2, 3, \dots$$

によって定義する. このとき, 簡単であるが重要な関係式:

$$\sigma^n(l(x))=l(f^n(x)), \quad n=1, 2, \dots \quad (3.5)$$

が成立する.

次に二つの記号列 A, B の間に順序 $A < B$ を導入する. (ただし, 誤解のおそれのない限り普通の不等号 $<$ をそのまま用いる)

[定義 4 (順序)] 二つの記号列 $A=a_1 \dots a_{n-1} a_n \dots$, $B=b_1 \dots b_{n-1} b_n \dots$ を考える. まず, 記号 L, C, R の間の順序関係を次のように定義する:

$$L < C < R$$

このとき, 次のどちらかの場合に $A < B$ と定義する.

(i) $a_1 \dots a_{n-1} = b_1 \dots b_{n-1}$ かつ $N(a_1 \dots a_{n-1})$ が偶数で

$$a_n < b_n$$

(ii) $a_1 \dots a_{n-1} = b_1 \dots b_{n-1}$ かつ $N(a_1 \dots a_{n-1})$ が奇数で

$$b_n < a_n$$

また, $A > B$, $A \leq B$, $A \geq B$ など同様に定義することとする.

3. 2 $\delta=0$ の場合の分岐構造

この節では (3.1) 式において $\delta=0$ の場合を考え, そのとき分岐パラメータ a が変化するにつれて写像 $f(x)$ の生成する軌道の性質がどのように変わるかを調べる. そのため分岐図を図 4 に示した. この図も図 2 と同様の方法で数値的に描いた. 図 4 (b) は (a) の一部分を拡大した図である. このように, $\delta=0$ の場合の分岐構造は複雑な入れ子構造を成し, 分岐パラメータ a が変わるにつれて様々な周期軌道が現れることがわかる. ここで注意すべきことは, 分岐構造はきわめて複雑であるけれどほとんどすべてのパラメータ a で軌道 $\{x_n\}$ は周期的であり, カオティックなふるまいは現れないことである.

以下ではこのような平坦な部分の傾き δ が 0 の場合の分岐構造を記号力学的方法を用い

て解析的に決定する。まず(3.2)式より、写像 $f(x)$ の生成する周期軌道のなかで安定なもののは0から出発した周期軌道

$$0, f(0), f^2(0), \dots, f^{n-1}(0), 0, \dots \quad (3.6)$$

だけであることがわかる。

以下では分岐パラメータ a が変化するにつれて、TWFS写像の0から出発する軌道 $\{x_n\}=0, f(0)\dots$ の性質がどのように変化するかを調べる。そのため図5のように、この軌道 $\{x_n\}$ をテント写像:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x, & (0 \leq x < 1/2) \\ &= 2(1-x), & (1/2 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

の生成する軌道 $\{y_n\}$ に対応させる。内側の正方形の中に描かれているのがTWFS写像(3.1)であり、テント写像のなかにTWFS写像を埋め込んだ形になっている。この図から明らかにように、TWFS写像で0から出発した軌道が n 回目にはじめて0に戻ってきて周期 n の周期軌道になることは、対応するテント写像の生成する軌道 $\{y_n\}$ では、 n 回目にはじめて $y_n \leq y_a$ となること:

$$\begin{aligned} y_n &\leq y_a, \\ y_i &> y_a, \quad i=1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

に対応する。このとき次のような関係が成り立つことがわかる:

$$y_a = 2a/(1+2a) \quad (3.9a)$$

$$y_i = (x_i + 2a)/(1+2a), \quad i=1, \dots, n-1 \quad (3.9b)$$

この対応によりTWFS写像で0から出発した周期軌道 $\{x_n\}$ の性質を調べることはテント写像によって生成される軌道 $\{y_n\}$ の性質を調べることに帰着される。(3.4)式ではTWFS写像の軌道に対してその道程 $I(a, x)$ を定義した。TWFS写像(3.1)は $a=0$ のときテント写像(3.7)に等しくなることに注意すれば、テント写像によって生成された軌道に対してもその道程

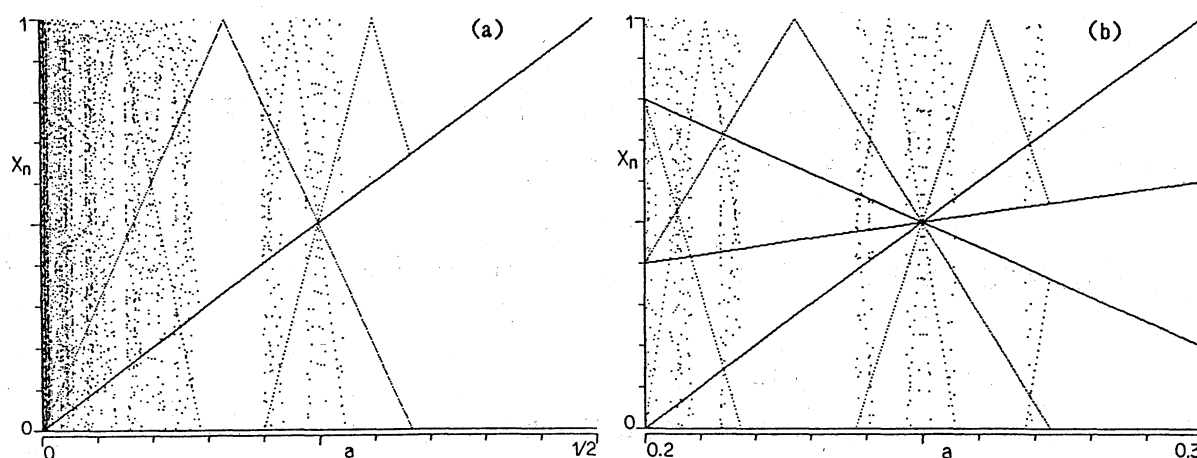


図4 (a), (b) 分岐図(TWFS写像), $\delta = 0$

$I(0, x)$ を(3.4)式により定義することができる。テント写像上の軌道に対しては、次のよく知られた補題が成り立つ。

【補題 1】 テント写像において以下のことが成立する[13-15]:

$$\forall x, y \in [0, 1], x < y \Leftrightarrow I(0, x) < I(0, y)$$

補題 1 より、テント写像の生成する軌道 $\{y_n\}: y_0=y, y_1, \dots$ が(3.8)式を満たすことは $I(0, y)=AB, |A|=n$ として、記号列 AB が次の条件 X を満たすことと同等である。

【条件 X 】

$$X1) \quad \sigma^n(AB) = B \leq AB$$

$$X2) \quad \sigma^i(AB) > AB, i=1, \dots, n-1 \quad (3.10)$$

したがってTWFS写像においてパラメータ $a \in [0, 1/2]$ が変わるにつれて0から出発した軌道の道程 $I(a, 0)$ がどのように変化するかを調べるためには、テント写像で初期値 $y \in [0, 1/2]$ を変化させてその道程 $I(0, y)=AB$ がどのような n に対して条件 X を満足するかを調べればよい。したがって次の命題が得られる。

【命題 1】

$$I(0, 2a/(1+2a)) = AB, |A|=n,$$

とし、ここで記号列 AB は条件 X を満たすとする。そのとき

$$I(a, 0) = A^*$$

となる。

以下ではこのような記号列 A の性質を調べる。すなわち次の集合 S の性質を調べる。

$$S = \{ A \mid 0 \leq x \leq 1/2, I(0, x) = AB, \\$$

$$AB \text{ satisfies } X1) \text{ and } X2) \} \quad (3.11)$$

記号力学的方法を用いることにより、この集合 S は次のように特徴づけられることが分かる[16]:

$$S = \{ A, \bar{A} \mid A \text{ は最小列 or } A=D^2, \\$$

$$D \text{ は } N(D) \text{ が奇数である最小列} \} \quad (3.12)$$

ここで最小列とは次のように定義されるものである:

もいえる。すなわち、TWFS写像(3.1)は分岐パラメータ a が変わるにつれてあらゆるパターンの安定な周期軌道を生成する。一方、テント写像は初期値が変わるにつれてあらゆるパターンの不安定な周期軌道を生成することが知られている。このことはテント写像に平坦な部分をつけることによって、テント写像上の不安定な周期軌道が安定な周期軌道として現れたことを示している。ただしここで注意すべきことはテント写像上ではLRLR...のパターンの4周期軌道は存在しないが、(3.12)でみたようにTWFS写像においては、LRLR...というパターンをもつ周期軌道は2周期軌道と4周期軌道の2種類現れることである。

3. 3 $\delta \neq 0$ の場合の分岐構造

次に $\delta \neq 0$ の場合を考える。まず、TWFS写像(3.1)の分岐図を数値計算により図7に描いた。このとき $\delta = 0$ の場合と異なり、システムがカオティックにふるまうような分岐パラメータ a の範囲が存在する。しかし、図7と図4とを比べると δ が十分小さければその分岐構造は $\delta = 0$ の場合の分岐構造と密接な関係をもつことが予想される。以下では、パラメータ (a, δ) が変化するにつれてTWFS写像(3.1)の生成する安定な周期軌道の性質がどのように変わるかを調べる。 $\delta > 1/2$ の場合にはTWFS写像の平坦な部分の傾きの絶対値が1より大になるので安定な周期軌道は存在しない。したがって以下では $\delta < 1/2$ の場合のみ調べる。 $\delta = 0$ の場合と同様に $\delta \neq 0$ の場合にもTWFS写像の生成する周期軌道のうち安定なものは区間 $[\alpha, 1]$ を通る周期軌道だけであることがわかる。したがって、 $\delta \neq 0$ の場合にも区間 $[\alpha, 1]$ に注目すればTWFS写像の生成する安定な周期軌道の性質を調べることができる。

例として $1/7 < a < 1/5$ の場合を考える。 $\delta = 0$ であれば、図6でみたように安定な周期3の軌道が存在する。では $\delta \neq 0$ のときはどうなるであろうか。 δ が十分小さければ図8のように、区間 $[\alpha, 1]$ は写像 f^3 によってその区間の中へ写されることがわかる。このとき写像 f^3 は縮小写像になっておりその区間の中に f^3 の不動点(f の3周期軌道)が存在する。 $\delta < 1/2^3$ であればこの周期軌道は安定になるが、このことは周期軌道の安定性の定義(3.2)より明かであろう。このような考え方で、パラメータ (a, δ) が変化するにつれて写像 $f(x)$ の生成する安定な周期軌道の性質を調べると次のようになる。

i) $1/7 < a < 1/6$ のとき

$0 < \delta < (1-6a)/(1+2a)$ ならば,

安定な3周期軌道LLRLLR...が存在する。

$(1-6a)/(1+2a) < \delta < 1/2^3$ ならば, LRRLRR...

ii) $1/6 < a < 1/5$ のとき

$0 < \delta < (1-5a)/(2a+1)$ ならば, LRRLRR...

これらの結果を図9に示した. すなわち, この図はTWFS写像の生成する安定な3周期軌道 LLR..., LRR...などが存在するパラメータ (a, δ) の範囲を示している. ここで, 斜線を引いた領域はそのような安定な周期軌道が存在しない領域であり, システム(3.1)がカオティックなふるまいをするものと考えられる.

このように $\delta \neq 0$ の場合にも, $\delta = 0$ の場合の結果を用いてTWFS写像の生成する安定な周期軌道を分類することができる. ここでは, 周期3の周期軌道についてのみ計算例を示したがまったく同様に他の周期軌道についても計算できる. ただし, 次節で述べるようにTWFS写像の分岐構造を完全に決定するには若干不十分な点がある.

図10は, どのようなパラメータ (a, δ) の領域でシステム(3.1)のふるまいがカオテ

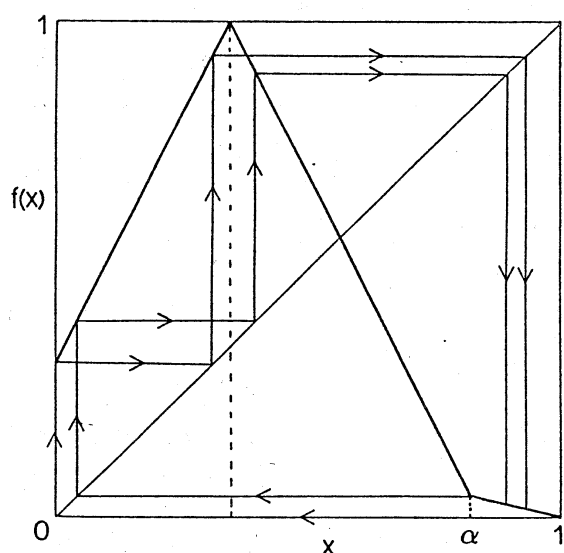


図8 安定な3周期軌道

(a)

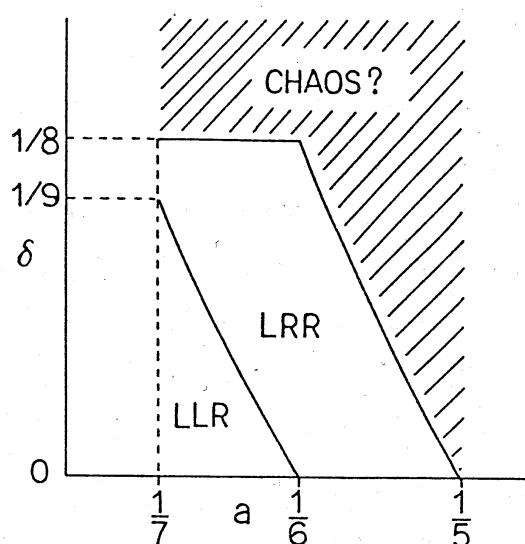


図9 3周期軌道の存在する領域

(b)

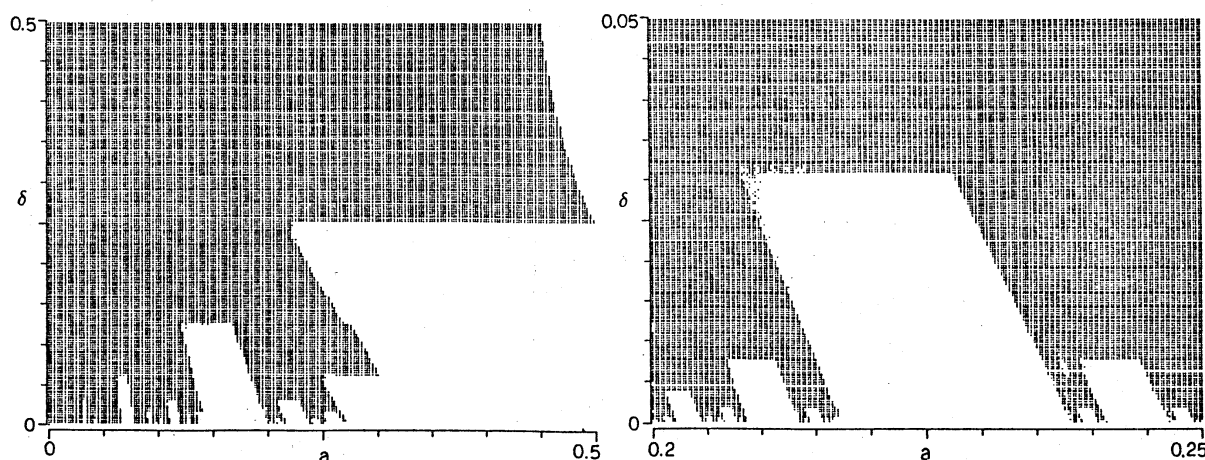


図10(a),(b) カオスの存在する領域

ィクになるかを示している。ここで、点を打った領域がシステムがカオティックになる領域である。それぞれのパラメータ (a, δ) に対して $x=0$ を初期値とする軌道のリアプノフ指数を数値的に計算しカオティックであるかどうかを判定し、この図を描いた。図10(b)は、(a)の一部分を拡大した図であり、パラメータ (a, δ) 領域の中でシステムがカオティックになる（またはシステムが周期的になるような）パラメータの範囲が複雑な入れ子構造をしていることがわかる。特に δ を固定し、パラメータ a を変化させて分岐図を描けば図7のようになることもこの図よりわかる。

3. 4 δ が大きい場合の注意

3. 3では、平坦な部分の傾き δ が0の場合と同様に、 $\delta \neq 0$ の場合にも平坦な部分 $[\alpha, 1]$ に注目することにより様々な安定な周期軌道が存在するパラメータ (a, δ) の範囲や安定な周期軌道が存在せずシステムがカオティックになるパラメータ (a, δ) の範囲を計算できることを示した。しかしながら、これらは δ が十分小さいときの話で δ が大きい場合には注意が必要である。例として、図11のような場合を考える。これは $a=2/5$ の場合である。このとき、 $\delta < 1/4$ ならば図11(a)のように安定な2周期軌道が存在し、 $\delta > 1/4$ のときには安定な2周期軌道は存在しない。また、 $1/2 > \delta > 1/3$ のとき、不動点 $\bar{x}=2/5$ は安定になるが図11(b)からわかるように不動点 $\bar{x}$ のまわりに不安定な2周期軌道が存在する。この周期軌道 $\{x_n\}$ を $s_1, s_2, s_1, s_2, \dots$ ($s_1 < s_2$) と表すと、区間 (s_1, s_2) の中から出発した軌道は安定な不動点 $\bar{x}$ に漸近するが、区間 (s_1, s_2) の外から出発した軌道はその区間の中へ入ることはなくカオティックなふるまいを示す。このように δ がある程度大きい場合に

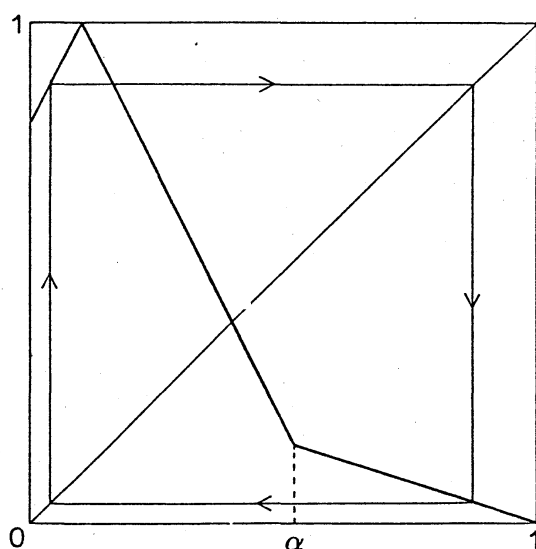


図11(a) 安定な2周期軌道

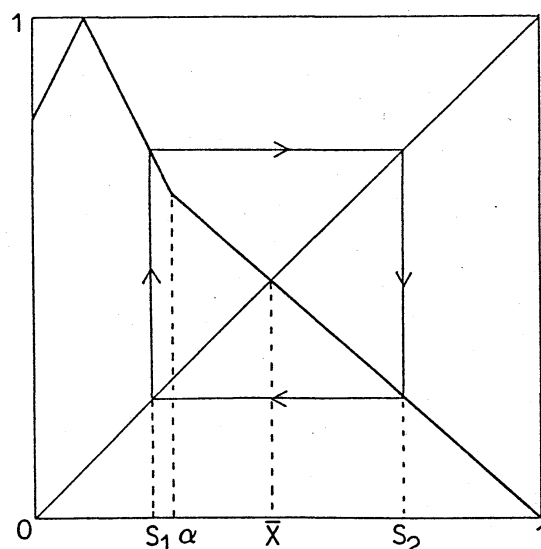


図11(b) 安定な平衡点とカオスの共存

は、TWFS写像の分岐構造を完全に決定するためには3. 3で行った解析は不十分なことが分かる。

4. おわりに

本稿では、以前にNoise-Induced Orderの現象を示す写像として提案した平坦な部分をもつ写像(TWFS写像)の分岐構造を調べ、軌道が周期的にふるまうようなパラメータの範囲を決定できることを示した。また、パラメータ (a, δ) 平面において様々な周期軌道が存在する領域やシステムがカオティックにふるまう領域が複雑なフラクタル構造をもつことを見た。

しかし、3. 4でも述べたように平坦な部分の傾き δ が大きい場合には注意を要し、ここで述べた解析には不十分な点がある。また、カオスという用語を特に定義せずに安定な周期軌道が存在しないという意味で用いたが、厳密に議論すべきことは言うまでもない。

TWFS写像の分岐構造とNoise-Induced Orderの現象とは密接な関連をもつが[12]、今回得られた結果を用いたNoise-Induced Orderの解析に関しては現在研究が進行中である。

謝辞 大阪大学基礎工学部生物工学科、佐藤俊輔教授には多くの助言、励ましをいただきました。ここに深く感謝します。

文献

- [1] R.M.May: Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature 261, 459-467 (1976)
- [2] 砂原, 森田, 安田, 木村: 微小な不規則摂動を受ける力学系のカオスの挙動, 計測自動制御学会論文集 20, 389-395 (1984)
- [3] G.Mayer-Kress and H.Haken: The Influence of Noise on the Logistic Model, J. Stat. Phys. 26, 149-171 (1981)
- [4] G.Mayer-Kress and H.Haken: Transition to Chaos for Maps with Positive Schwarzian Derivative. In : H.Haken(ed.) Evolution of Order and Chaos, pp.183-186: Springer (1982)
- [5] K.Matsumoto and I.Tsuda: Noise-Induced Order, J.Stat.Phys.31, 87-106 (1983)
- [6] K.Matsumoto: Noise-Induced Order II, J.Stat.Phys.34, 111-127 (1984)

- [7] I.Tsuda and K.Matsumoto: Noise-Induced Order - Complexity Theoretical Digression, In:Y.Kuramoto(ed.) Chaos and Statistical Methods pp.102-108 : Springer (1984)
- [8] 津田一郎,松本健司: Noise-Induced order, 日本物理学会誌, 第40巻, 第3号, 203-207(1985)
- [9] K.Matsumoto and I.Tsuda: Information theoretical approach to noisy dynamics, Phys. A.18, 3561-3566 (1985)
- [10] K.Matsumoto and I.Tsuda: Extended information in one-dimensional maps, Physica 26D, 347-357 (1987)
- [11] 土居伸二: 一次元写像における雑音に誘導される周期性について, 信学技報 NLP 86-79 (1987)
- [12] S.Doi: A Chaotic Map With A Flat Segment Can Produce A Noise-Induced Order, preprint
- [13] J.Guckenheimer and P.Holmes: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields: Springer 1983
- [14] P.Collet and J.P.Eckmann: Iterated maps of the interval as dynamical systems: Birkhauser 1980
- [15] S.Ito, S.Tanaka and H.Nakada: On unimodal linear transformations and chaos I, Tokyo J. Math. 2,221-239 (1979)
- [16] 土居伸二: 平坦な部分をもつ単峰形写像の性質について, 信学技報 CAS87-189 (1987)