

# 解析関数の数値積分の

## 誤差の新しい評価法

東大 理 高 橋 秀 俊

東大 工 森 正 武

### § 1 序

数値積分における誤差の評価は、通常積分区間内のある 1 点における被積分関数の高階の微係数で与えられるが、実際にこれを計算しようとするとう関数形が簡単な場合でもかなりめんどうになってしまう上に、これは実際の誤差に比べて非常に大きい評価を与える場合が多い。また Davis-Rabinowitz<sup>1)</sup> は解析関数の場合に微係数を用いない誤差評価を与えているがこれでも得られる評価は大きくなってしまふ。われわれは被積分関数が解析関数である場合に対して従来使われている種々の積分公式に複素変数関数論の立場からの approach を行って新しい誤差評価の方法を得た。この方法によると実際の誤差が割合簡単に求められるばかりでなく、積分しようとしている関数に最も適した積分法を選択する手がかりを与え

ることが期待される。

複素変数関数論の立場から見れば、普通表われる数値積分は実軸上のある区間における積分に相当するが、われわれはこの積分をこれと等価な複素平面上の適当な曲線上の積分に置き換え、誤差をその曲線上のある積分で表現した。そしてわれわれの方法の特徴は、複素平面上において誤差に特に大きく寄与している特定の場所を *local* にとり出して評価することができるという点にある。

## § 2 Legendre-Gauss 公式を中心として

まず最初に有限区間における積分を考える。積分区間は簡単のために  $(-1, 1)$  としておこう。積分しようとする解析関数を  $f(z)$  として、実行する積分を

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (2-1)$$

とおく。 $f(z)$  は  $z = \pm 1$  において正則であるか、高々  $(z \pm 1)^{-\alpha}$  ( $\alpha > -1$ ) 程度の特異性しか示さないとすると、積分  $I$  は次のような閉曲線  $C$  上の積分で置き換えることができる。

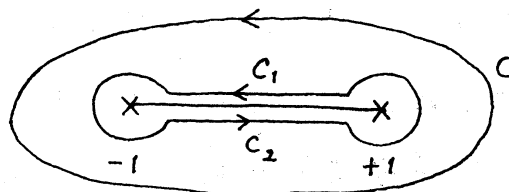


Fig. 1

$$I' = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \Psi(z) f(z) dz \quad (2-2)$$

但し  $C$  は Fig. 1 に示すような  $z+1, -1$  を同時に反時計方向にまわる閉曲線である。 $\Psi(z)$  は次式で与えられる。

$$\Psi(z) = \log \frac{z+1}{z-1} \quad (2-3)$$

実際 (2-3) を (2-2) に代入し、 $C$  を Fig. 1 の内側の閉曲線のように変形すれば

$$\begin{aligned} I' &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left( \log \frac{z+1}{z-1} \right) f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{C_1} \left( \log \frac{z+1}{z-1} \right) f(z) dz + \int_{C_2} \left( \log \frac{z+1}{z-1} \right) f(z) dz \right\} \\ &\quad \left( \begin{array}{l} z+1, -1 \text{ のまわりの小円周上の積分は小円の} \\ \text{半径を } 0 \text{ に近づければ } 0 \text{ になる。} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ - \int_{-1}^1 \left( \log \frac{1+x}{1-x} - \pi i \right) f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 \left( \log \frac{1+x}{1-x} + \pi i \right) f(x) dx \right\} \end{aligned}$$

(偏角は  $z-1$  から見て  $1+i\varepsilon$  ( $\varepsilon>0, \downarrow$ ) を  $0$  とした)

$$= \int_{-1}^1 f(x) dx = I \quad (2-4)$$

そこで以下においては積分  $I$  に対して (2-1) の代りに新たに

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left( \log \frac{z+1}{z-1} \right) f(z) dz \quad (2-5)$$

を扱うことにする。

次に、積分  $I$  を求める近似公式は、一般に区間  $(-1, 1)$  内の  $n$  個の点  $a_1, a_2, \dots, a_n$  における関数値に夫々適当な重み  $A_1, A_2, \dots, A_n$  をかけて作った和  $I_A$  で与えられるが、これも次のように積分の形に書くことができる。

$$\begin{aligned} I_A &= \sum_{k=1}^n A_k f(a_k) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - a_k} \right\} f(z) dz \end{aligned} \quad (2-6)$$

(2-6) と (2-5) とを比較すれば、この近似における誤差  $\Delta I$  は次のような複素積分の形で与えられることがわかる。

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \log \frac{z+1}{z-1} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - a_k} \right\} f(z) dz \quad (2-7)$$

$\{ \}$  の中を  $\frac{1}{z}$  のべきで展開すると

$$\begin{aligned} &\log \frac{z+1}{z-1} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - a_k} \\ &= \frac{1}{z} \{ 2 - \sum A_k \} + \frac{1}{z^2} \{ -\sum a_k A_k \} + \frac{1}{z^3} \left\{ \frac{2}{3} - \sum a_k^2 A_k \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2-8)$$

となる。この展開は  $|z|$  が  $|a_k|$  の最大のものより大きければ成立するものである。(2-7)の積分路  $C$  は、点  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (必ずしも実数でなくともよい) と線分  $(-1, 1)$  とを中に含む任意の閉曲線であり、積分路を適当にとって  $f(z)$  の複素平面上での様子から (2-7) の値、つまり誤差の大きさの見当をつけるというのがわれわれの方法の原理である。

具体的な近似公式は、 $A_1, A_2, \dots, A_n$  及び  $a_1, a_2, \dots, a_n$  に夫々特定の値を与えることによって得られる。あるいは (2-6) の  $\{ \}$  の中を

$$\frac{G_n(z)}{F_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - a_k} \quad (2-9)$$

と書けば、特定の近似公式は特定の  $G_n(z)/F_n(z)$  に対応することになる。ここで  $F_n(z)$  は  $n$  次、 $G_n(z)$  は  $n-1$  次の多項式であり  $\{G_n(z)/F_n(z)\}$  と  $\{A_1, A_2, \dots, A_n; a_1, a_2, \dots, a_n\}$  とは 1 対 1 に対応するので、積分公式を求めることは (2-9) の  $F_n(z)$ ,  $G_n(z)$  を定めることに帰着される。たとえば Legendre-Gauss の積分公式では  $a_1, a_2, \dots, a_n$  は  $n$  次 Legendre 多項式  $P_n(z)$  の零点であり、したがって  $F_n(z) \equiv P_n(z)$  である。そうして  $A_1, A_2, \dots, A_n$  を適当に選ぶことにより  $f(z)$  が  $2n-1$  次までの多項式の時誤差

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \oint \left\{ \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{G_n(z)}{F_n(z)} \right\} f(z) dz \quad (2-10)$$

が0になるようにしたものである。  $f(z)$  が  $2n-1$  次までの多項式ということは、  $z$  が有限の所でいたる所正則で  $z \rightarrow \infty$  では  $f(z) = O(z^{2n-1})$  ということである。そこで

$$\Phi_n(z) \equiv \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{G_n(z)}{F_n(z)} \quad (2-11)$$

が  $z \rightarrow \infty$  で  $O(z^{-2n-1})$  であれば (2-10) は積分路を十分大きい円にとることによって0になる。即ち  $G_n(z)/F_n(z)$  は  $\log \frac{z+1}{z-1}$  を  $z \rightarrow \infty$  で  $z^{-2n}$  の程度まで近似するような有理分数式であることがわかる。従って積分の近似の問題はある超越関数を有理式で近似する問題におきかえられた。

以上の議論からわかるように、(2-11) によって定義される関数  $\Phi_n(z)$  は Legendre-Gauss の積分公式の誤差をきめるのに基本的な役割を演じている。  $\Phi_n(z)$  をその意味で Legendre-Gauss 積分公式の 特性関数 と呼ぶことにする。特性関数  $\Phi_n(z)$  をつくるのに実際の  $A_1, A_2, \dots, A_n$  を条件

$$\frac{2}{N+1} = \int_{-1}^1 x^N dx = \sum_{k=1}^n A_k a_k^N ; \quad N=1, 2, \dots, 2n-1 \quad (2-12)$$

によってきめてもよいが、  $G_n(z)/F_n(z)$  が  $\log \frac{z+1}{z-1}$  の最良近似分数式であるということから連分数を使って表わすのが最

も簡単である。  $\log \frac{z+1}{z-1}$  の連分数展開は

$$\log \frac{z+1}{z-1} = \frac{2}{z - \frac{1^2}{3z - \frac{2^2}{5z - \frac{3^2}{7z - \dots}}}} \quad (2-13)$$

で与えられる。この連分数を途中で打ち切れば

$$\frac{2}{z - \frac{1^2}{3z - \frac{2^2}{5z - \dots - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)z}}}} \quad (2-14)$$

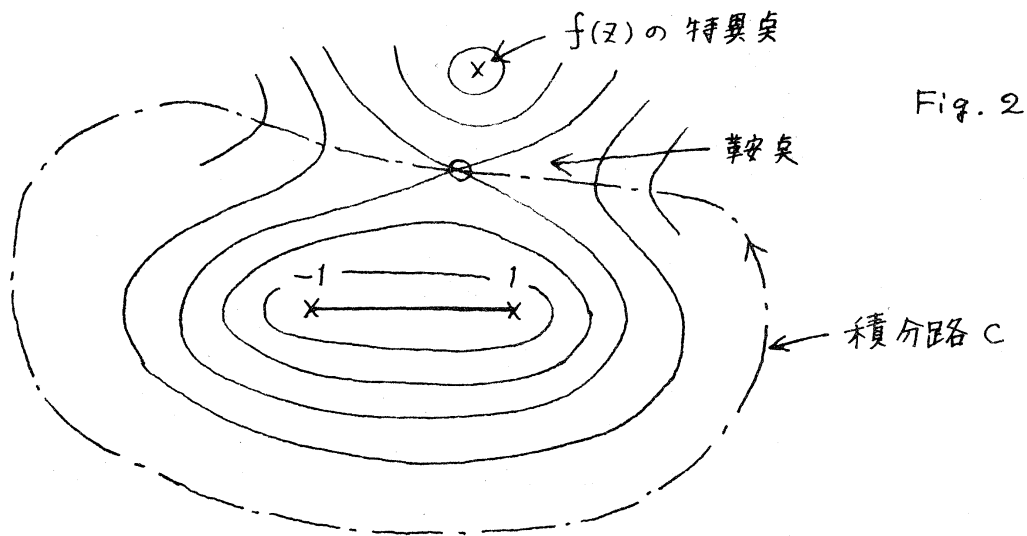
となるが、これが(2-9)で与えられる分数式に相当するものであることは(2-9)のあとの議論及び連分数の性質から容易にわかる。従って  $\Phi_n(z)$  の具体的表示は次式のようになる。

$$\Phi_n(z) = \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{2}{z - \frac{1^2}{3z - \frac{2^2}{5z - \frac{3^2}{7z - \dots - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)z}}}}} \quad (2-15)$$

なお Legendre - Gauss の積分公式の特性関数  $\Phi_n(z)$  は、才<sup>2)</sup> 2種の Legendre 関数  $Q_n(z)$  とはその連分数表示から次の関係にあることがわかる。

$$\Phi_n(z) = \frac{2Q_n(z)}{P_n(z)} \quad (2-16)$$

(2-7)の被積分関数は  $f(z)$  が  $2n-1$  次以下の多項式である場合以外は、有限または無限遠の点に特異点を持つ。従って積分路には、その特異点をかこまないで線分  $(-1, 1)$  をかこむような適当な曲線、特にその内に存在する被積分関数の鞍点を通るような路を選ぶのがよい (Fig. 2)。従って誤差の評価



価はその鞍点における  $|\Phi_n(z)f(z)|$  によってほぼ与えられる。この値の大体の見当をつけるには  $|\Phi_n(z)|$  の等高線を与えておくのが便利であり、それはまた他の方式における  $|\Phi_n(z)|$  の等高線と比較することにより積分方式選択の手がかりともなる。 $f(z)$  の特異点が単純な極である場合の具体的な誤差評価の方法を §5 に与える。



## § 3 一般の場合

前節の結果を一般に与えられた重み  $w(x)$  のかかった積分

$$I = \int_a^b f(x) w(x) dx \quad (3-1)$$

に拡張することを考える。まず (3-1) を

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \Psi(z) f(z) dz \quad (3-2)$$

の形の複素積分になおす必要があるが、(2-1) が (2-5) になったのは  $\log \frac{z+1}{z-1}$  が実軸上の線分  $(-1, 1)$  の両側で頂度  $2\pi i$  だけの不連続性を持っていたからであることを考えると、今度は実軸上の区間  $(a, b)$  (半無限又は無限の区間の場合を含む) で頂度  $2\pi i w(x)$  だけの不連続性をもつような複素関数を (3-2) の  $\Psi(z)$  として用いればよい。このような  $\Psi(z)$  は実軸上に1位の極  $\frac{1}{z-\xi}$  を  $w(\xi)$  という密度で分布させることによって具体的に構成される。即ち

$$\Psi(z) = \int_a^b \frac{w(\xi)}{z-\xi} d\xi \quad (3-3)$$

つまり  $\Psi(z)$  は  $w(\xi)$  の Hilbert 変換である。 $\Psi(z)$  はまた、解析関数  $f(x)$  の Cauchy の積分表示

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-x} dz$$

を(3-1)に代入し、積分の順序を交換することによっても直接得ることができる。ここまできると、われわれの原理が hyperfunction の理論<sup>3)</sup>と密接な関係があることがわかるであろう。すなわち  $-\frac{1}{2\pi i} \Psi(z)$  は、積分の重みを与える hyperfunction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a, \quad b < x \\ w(x) & ; a < x < b \end{cases}$$

の定義関数になっている。a, b は  $\pm\infty$  になっても差支えない。以下具体例を示そう。

[例]

(a)  $w(x) = e^{-x}$        $a = 0, \quad b = \infty$       (Laguerre)

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{z - \xi} d\xi = \int_z^{-\infty} \frac{e^{\xi' - z}}{\xi'} d\xi' = e^{-z} \int_{-\infty}^z \frac{e^{\xi'}}{\xi'} d\xi' \\ &= e^{-z} E_i(z) \end{aligned}$$

(3-2)の積分路Cとしては Fig. 3 に示すものをとる。

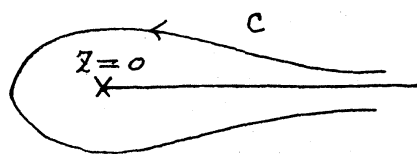


Fig. 3

(b)  $w(x) = e^{-x^2}$        $a = -\infty, \quad b = \infty$       (Hermite)

$$\Psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{z - \xi} d\xi$$

これは次のようにして変形される。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(e^{z^2}\Psi) &= 2ze^{z^2}\Psi - e^{z^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{(z-\xi)^2} d\xi \\ &= 2ze^{z^2}\Psi - e^{z^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\xi e^{-\xi^2}}{z-\xi} d\xi \\ &= e^{z^2}\int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{z-\xi}{z-\xi} e^{-\xi^2} d\xi = 2\sqrt{\pi}e^{z^2}\end{aligned}$$

そこで

$$\Psi(z) = 2\sqrt{\pi}e^{-z^2}\int_{\pm i\infty}^z e^{\xi^2} d\xi$$

積分の起点は  $\text{Im } z > 0$  か  $< 0$  かに従って  $i\infty$  または  $-i\infty$  とする。この違いによって実軸上に  $2\pi i$  の不連続性ができる。(この場合  $\Psi(z)$  は実軸の上側と下側とは別の解析関数であるが、そのことは支障はない。) なお (3-2) の積分路  $C$  としては Fig. 4 のような 2 本の直線をとる。

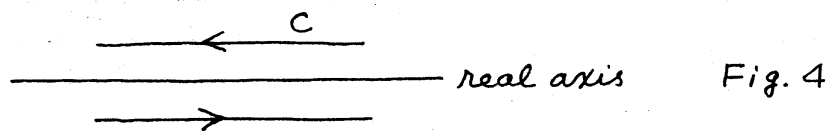


Fig. 4

$$(c) \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad a=-1, \quad b=1 \quad (\text{Chebyshev})$$

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{z-\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{z-\cos\theta} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z-\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}}\end{aligned}$$

そこで問題はこの  $\Psi(z)$  を適当な分数式  $G_n(z)/F_n(z)$  で置きかえ、積分  $I$  を

$$I_A = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G_n(z)}{F_n(z)} f(z) dz \quad (3-4)$$

のように近似することである。 $G_n(z)/F_n(z)$  を (2-9) の形に部分分数に分解すれば積分の近似公式が得られることは §2 の議論と全く同じである。

近似分数式を求めるにはやはり  $\Psi(z)$  を連分数に展開するのがよい。前掲の例については連分数展開は夫々具体的に次のようになる。

$$(a) \quad w(x) = e^{-x} \quad a=0, \quad b=\infty$$

$$\Psi(z) = e^{-z} E_1(z) = \frac{1}{z-1 - \frac{1^2}{z-3 - \frac{2^2}{z-5 - \frac{3^2}{\ddots - \frac{(n-1)^2}{z-(2n-1) - \ddots}}}}}$$

(b)  $w(x) = e^{-x^2}$   $a = -\infty, b = \infty$

$$\Psi(z) = 2\sqrt{\pi} e^{-z^2} \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{z - \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{z - \frac{\frac{3}{2}}{z - \frac{2}{z - \frac{\frac{1}{2}(n-1)}{z - \dots}}}}}}$$

(c)  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   $a = -1, b = 1$

$$\Psi(z) = \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{\pi}{z - \frac{1}{2z - \frac{1}{2z - \frac{1}{2z - \dots}}}}$$

一般に  $\Psi(z)$  が

$$\Psi(z) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \frac{\gamma_2}{\alpha_2 z + \beta_2 - \frac{\gamma_3}{\alpha_3 z + \beta_3 - \dots - \frac{\gamma_n}{\alpha_n z + \beta_n - \dots}}}} \quad (3-5)$$

なる無限連分数になったときこれを有限で打切ったものを

$$\frac{G_n(z)}{F_n(z)} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \frac{\gamma_2}{\alpha_2 z + \beta_2 - \frac{\gamma_3}{\alpha_3 z + \beta_3 - \dots - \frac{\gamma_n}{\alpha_n z + \beta_n}}}} \quad (3-6)$$

とすると  $F_n(z)$  は  $n$  次、 $G_n(z)$  は  $n-1$  次の多項式であり、

かつ  $G_n(z)/F_n(z)$  は  $\Psi(z)$  を  $z \rightarrow \infty$  で  $z^{-2n}$  の程度まで近似する式である。また  $F_n, G_n$  は

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (\alpha_n z + \beta_n) F_{n-1} - \gamma_n F_{n-2} \\ G_n &= (\alpha_n z + \beta_n) G_{n-1} - \gamma_n G_{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

なる漸化式をみたすことがわかる。  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  がわかっているときは (3-7) は  $F_n, G_n$  を定める式として適当である。ここで

$$\Psi(z) - \frac{G_n(z)}{F_n(z)} = \Phi_n(z) \quad (3-8)$$

がこの近似公式の特性関数である。(3-8)を計算するには直接計算してももちろんできるが、 $\Phi_n(z)$  が小さくなるところでは連分数の性質を使って次のように変形しておくと引き算による桁落ちを避けられる。結果は

$$\Phi_n(z) = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n \gamma_{n+1}}{F_n(z) \{F_n(z) R_{n+1}(z) - \gamma_{n+1} F_{n-1}(z)\}} \quad (3-9)$$

で、 $R_{n+1}$  は無限連分数 (3-5) から (3-6) を作るとき打ち切りで捨てられる部分

$$R_{n+1}(z) = \alpha_{n+1} z + \beta_{n+1} - \frac{\gamma_{n+2}}{\alpha_{n+2} z + \beta_{n+2} - \frac{\gamma_{n+3}}{\alpha_{n+3} z + \beta_{n+3} - \cdots}} \quad (3-10)$$

である。実際の計算ではこれを途中適当な所で打切ればよい。

#### §4 Newton-Cotes 公式

有限区間  $[a, b]$  における積分を考える。

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (4-1)$$

これが次の複素積分と等価であることはこれまでの議論から明らかである。

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left( \log \frac{z-a}{z-b} \right) f(z) dz \quad (4-2)$$

積分路  $C$  は Fig. 5 に与えるものである。§2 でみたように積分 (4-1) あるいは (4-2) を近似する積分公式は

$$I_A = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z-a_k} \right\} f(z) dz \quad (2-6)$$

と等しい。Newton-Cotes 公式においては一般に  $a_k$  は積分範囲の両端  $a, b$  を含めて等間隔に  $n$  個とる。和の重み  $A_k$  は  $f(z)$  が  $m$  次までの多項式の時積分の誤差

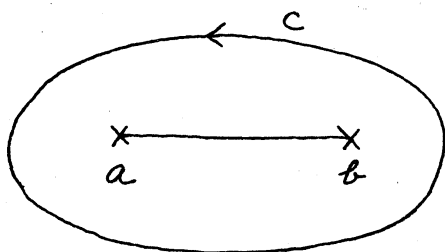


Fig. 5

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \log \frac{z-a}{z-b} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z-a_k} \right\} f(z) dz \quad (4-3)$$

が 0 になるようにしてきめられる。  $m=1$  ならば台形則、  
 $m=2$  ならば Simpson 則が得られ、更に  $m$  を大きくしてゆ  
 けば高次の公式が得られる。このようにして  $A_k$  をきめると  
 実際には  $m$  が偶数のときには  $m+1$  次までの多項式の時  
 (4-3) が 0 になる。(2-9) 及びそのあとの議論と同様にして  
 $m$  次の Newton-Cotes 公式の場合 (2-6) の  $\{ \}$  の中を通分し  
 て得られた

$$\frac{G_n(z)}{F_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z-a_k} \quad (4-4)$$

は  $\log \frac{z-a}{z-b}$  を  $z \rightarrow \infty$  で  $m$  が奇数なら  $z^{-m-1}$  程度まで、 $m$  が偶  
 数なら  $z^{-m-2}$  程度まで近似する有理式である。但し  $a_k$  ははじめ  
 から等間隔と定められているからこれは最良近似ではない。

Newton-Cotes 公式の特性関数は上述のようにしてきめ  
 られた  $a_k, A_k$  によって表わされる式

$$\Phi(z) = \log \frac{z-a}{z-b} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z-a_k} \quad (4-5)$$

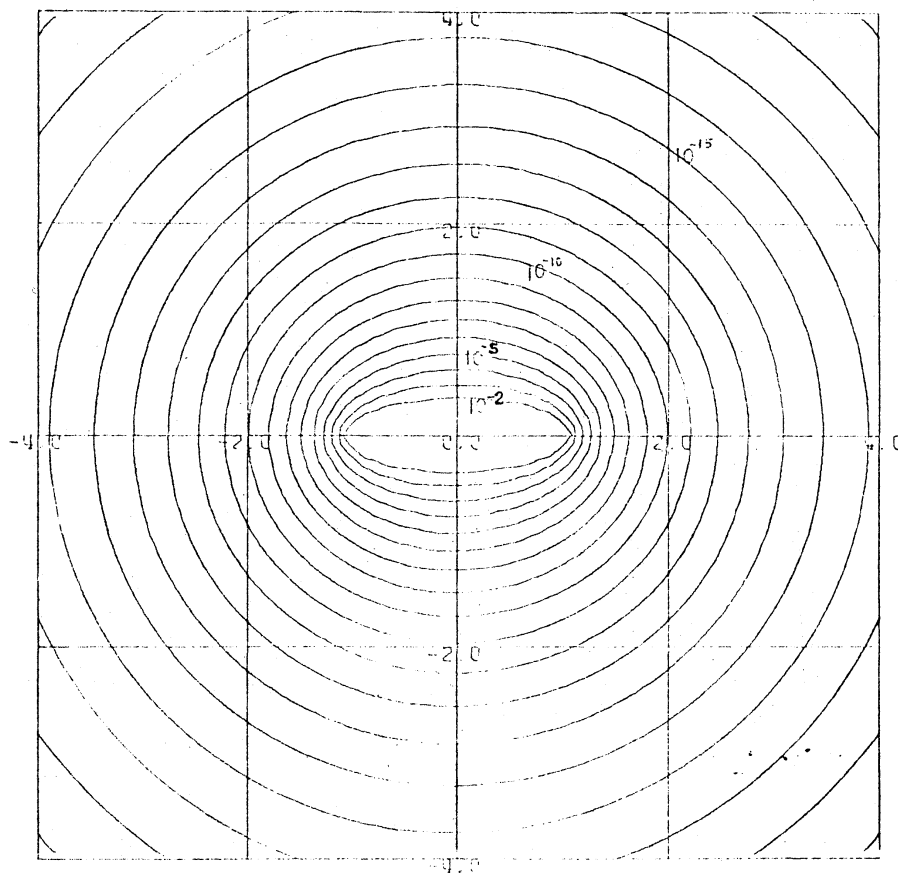
で与えられる。



## § 5 具体例

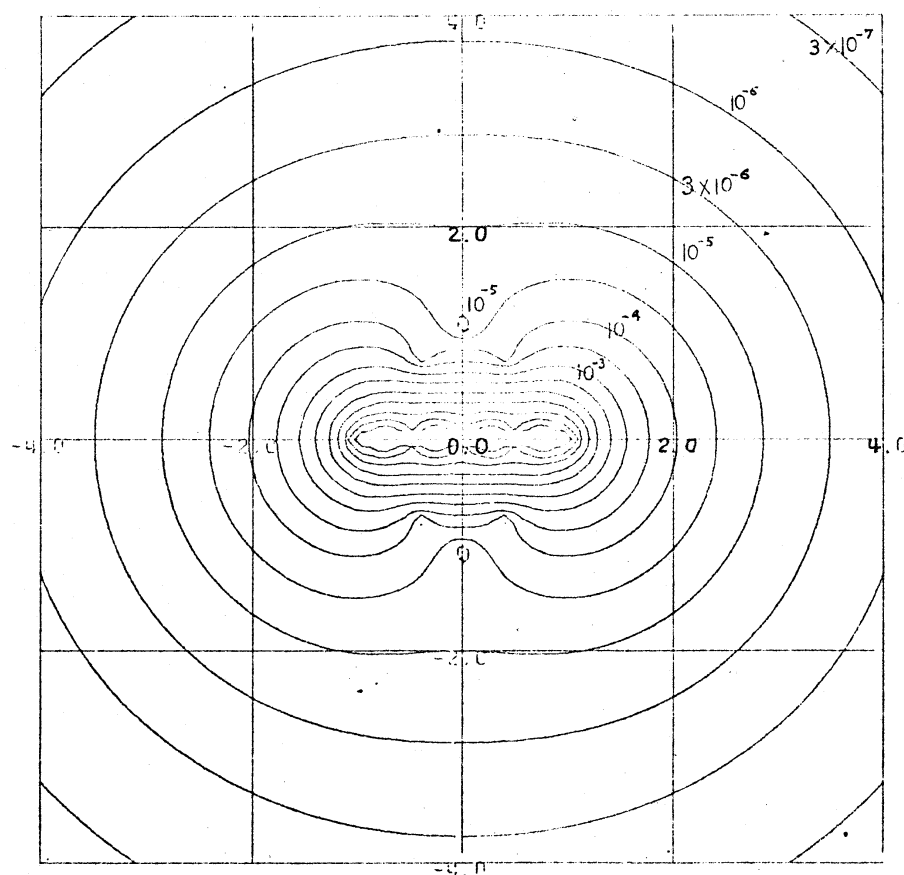
Legendre-Gauss 公式 (9 点)、及び同じく区間  $[-1, 1]$  における Simpson 則 (9 点) の特性関数の絶対値  $|\Phi(z)|$  の等高線を示したのが Fig. 6 及び Fig. 7 である。両図から明らかなように、線分  $[-1, 1]$  からかなり離れた点に特異点を持つ関数を積分する場合には Legendre-Gauss 積分公式の方が

Fig. 6 Legendre-Gauss 積分公式の特性関数 (9 点)



Simpson 則よりはるかに良い結果を与えることがわかる。しかし  $[-1, 1]$  に近いところでは Simpson 則の方は複雑な形をしており、こちらの方が良いこともありうる。特に Fig. 7 の場合、点  $z = \pm i$  のあたりに零点が表われるので、たまたまここに特異点を持つような関数（例えばよく例として出される  $\frac{1}{1+z^2}$  の場合）には Simpson 則の精度が例外的に良くなる

Fig. 7 Simpson 則の特性関数 (9 頁)



ことがわかる<sup>4)</sup>。

(2-8) と (4-4) 及び夫々に続く議論から、 $|z|$  が大きくなると一般に特性関数  $\Phi(z)$  は  $z^{-N}$  にほぼ比例するようになることがわかる。 $N$  は積分公式に応じてきまる数で、例えば Legendre-Gauss  $n$  点法では  $N = 2n+1$ ，台形則では  $N = 3$ ，Simpson 則では  $N = 5$  である。このように  $|z|$  の大きい所に特異点のある関数を積分した場合の誤差は、この特異点が単純な極である場合は次のようにして評価できる。

被積分関数が  $z=a$  に 1 位の極を持つとする。 $z=a$  の近くでは  $f(z)\Phi(z)$  は  $c$  をある複素数の定数として次のように表わされる。

$$g(z) \equiv f(z)\Phi(z) \simeq \frac{c}{(z-a)z^N} \quad (5-1)$$

$|z|$  がかなり大きい所を考える限り、Fig. 6 も、(5-1) も原点に関する対称性を持っているので、以下の議論から容易にわかるように極  $a$  は虚軸の上にあると仮定しても差つかえない。

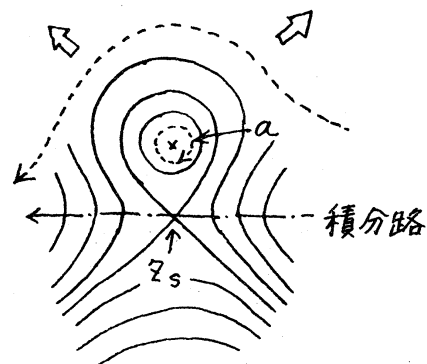
$$\frac{dg(z)}{dz} = -\frac{(N+1)c}{(z-a)^2 z^{N+1}} \left( z - \frac{N}{N+1} a \right) = 0 \quad (5-2)$$

より鞍点  $z_s$  の位置は

$$z_s \simeq \frac{N}{N+1} a \quad (5-3)$$

で与えられる。  $N$  が大であればこれは極  $a$  のごく近く、原典側に表われる。 Fig. 8 からわかるように  $|f(z)|$  の積分は鞍点  $z_s$  を通り実軸に平行な路を通るとき最も効果的に計算される。  $z_s$  を離れれば  $|f(z)|$  の値は急速に小さくなるから極  $a$  に起因する積分の誤差は大体次の式で評価されるであろう。ただし積分路は絶対値の等高線に垂直なのでこの路にそって偏角は一定だから、積分は  $f(z)$  について行いあとで絶対値をとる。

Fig. 8



x 0

$$\Delta I_1 \simeq \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{(x+z_s-a)(x+z_s)^N} dx = -\frac{C}{a^N} \quad (5-4)$$

また鞍点における値を比較すれば

$$f(z_s)\Phi(z_s) = \frac{C}{(z_s-a)z_s^N}$$

$$\therefore C = -\left(\frac{1}{N+1}\right)\left(\frac{N}{N+1}\right)^N a^{N+1} \Phi\left(\frac{N}{N+1}a\right) f\left(\frac{N}{N+1}a\right) \quad (5-5)$$

これを (5-4) に代入すれば  $\frac{1}{e} < \left(\frac{N}{N+1}\right)^N \leq \frac{1}{2}$  より

$$|\Delta I_1| \sim \frac{|a|}{2(N+1)} \Phi\left(\frac{N}{N+1}a\right) f\left(\frac{N}{N+1}a\right) \quad (5-6)$$

(5-6)は $f(z)$ の極 $a$ の位置を知れば計算できるが、もし極 $a$ における $f(z)$ の留数が計算できれば、 $a$ に起因する誤差を正確に知ることができる。 $f(z)$ は $z=a$ に単純な極を持つとすれば、 $g(z)$ を $z=a$ で正則な関数として次のように表わされる。

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-a} \quad (5-7)$$

Fig. 8において積分路を実線のように変形して極 $a$ から遠ざけてしまえば、極 $a$ に起因する積分は単に $a$ をかこむ小円周上の時計回りのものとなり

$$|\Delta I_1| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi(z) \frac{g(z)}{z-a} dz \right| = |\Phi(a)g(a)| \quad (5-8)$$

$m$ 位の極の場合も含めて一般に

$$|\Delta I_1| = |\Phi(a)| \times \left| \operatorname{Res}_{z=a} f(z) \right| \quad (5-9)$$

$\Phi(z)$ が正則なところであれば(5-9)はつねに成立する。

例として  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  を Legendre-Gauss 公式9 実法で計算した場合の誤差を考えよう。 $f(z)$ には1位の極が $z = \pm i$ に存在する。 $z = i$ については $N=19$ ,  $|a|=1$

及び  $f(\frac{19}{19+i}i) \sim 10$  であり、また Fig. 6 より  $|\Phi(\frac{19}{20}i)| \sim 8 \times 10^{-7}$  であるから、(5-6) より  $|\Delta I_1| \sim 2 \times 10^{-7}$  を得る。 $-i$  の方も考えれば全体の誤差は大体  $4 \times 10^{-7}$  程度であろう。一方 (5-8) によれば  $2|\Delta I_1| \sim |\Phi(i)| \sim 3 \times 10^{-7}$  となる。実際 Legendre-Gauss 公式で計算した時生ずる誤差は  $3.3 \times 10^{-7}$  で、上の評価と良く一致している。

## § 6 結論

いずれの場合も誤差評価は複素平面内での  $\Phi(z)$   $f(z)$  の鞍点における絶対値によって与えられる。そこで、種々の積分公式に対応する特性関数の絶対値  $|\Phi(z)|$  の等高線図を用意しておけば、積分しようとしている解析関数の複素平面上のふるまいをある程度知ることによって、積分公式の適不適を知る手がかりとなる。

Legendre-Gauss 公式の場合の積分誤差と  $\log \frac{z+1}{z-1}$  との関係については古く Hobson の書物<sup>5)</sup>にも書かれているが、複素平面上での議論はない。また最近 Barrett<sup>6)</sup> 及び McNamee<sup>7)</sup> によって、複素平面における積分に置換える原理に基づく積分誤差の取扱いがなされているが、以上述べてきたわれわれの取扱いの方が、より一般的でありかつ具体的であると思われる。

われわれの方法は一般に解析関数の数値積分の誤差を評価するに最も有力な方法であると信ずる。なお同様の方法が、内挿法、数値微分等にも適用できるが、それらについてはいずれ別に報告したい。

## § 文献

- 1) Davis & Rabinowitz : MTAC 8 193 (1954)
- 2) 森口他 : 数学公式Ⅲ (岩波) p.109
- 3) 佐藤 : 数学 10 1 (1958)
- 4) 森口 : 科学 32 669 (1962)
- 5) Hobson : The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics (Cambridge Univ. Press 1931) p.76
- 6) Barrett : Comput. J. 3 272 (1960/61)
- 7) McNamee : Math. Comp. 18 368 (1964)