

ベリー・ロブニックの仮定を出発点とする可積分量子系の準位間隔統計

東海大学 電子情報学部 牧野 浩典¹

早稲田大学 理工学部 田崎 秀一

1 はじめに

ベリー・ロブニックの仮定とは、束縛古典系の相空間が軌道の繋がらない独立な領域から成るときに、半古典極限における量子系のエネルギー準位が、これらの領域から供給される準位成分の統計的に独立な重ね合わせで与えられるというものである [1]。準位成分の独立性は個々の独立領域への固有状態の局在とトンネル状態の消滅によって、量子系が互いに独立な部分系に分かれることによって成立すると考えられている。互いに独立な部分系の間では、エネルギー準位も無相関であるというのがベリー・ロブニックの仮定の核心である。このような状況が期待されるのは量子系のプランク体積が各領域の相空間体積よりも十分に小さいときであり、プランク体積が 0 となる半古典極限に至ると、固有状態は無限小の分解能を獲得し、各領域に完全に局在することができる。

古典系が可積分の場合、1本の軌道はトーラス曲面に閉じ込められ、その内部でのみ運動が許される。リュービル・アーノルドの定理によると、相空間は無限小の体積を持つ無数の独立領域から成る [2]。一方、対応する量子系の各固有状態は半古典極限において、量子数によって定められるトーラス平面上に閉じ込められ、ウィグナー関数はトーラス平面上でデルタ関数に一致する [3]。故に、可積分量子系のエネルギー準位は半古典極限において、無数の無限小領域から供給される無数の独立な準位成分の重ね合わせであらわされる。その結果、準位統計はポアソンの小数の法則に支配され、準位間隔分布はポアソン分布に一致すると考えられる [4]。実際に準位間隔分布がポアソン分布に一致することは多くの可積分量子系に対する数値的な評価によって確かめられており、この種の系が持つ普遍則として広く認知されている。しかし完全な証明は未だ与えられておらず、さらに幾つかの系における例外も報告されているため、無数の準位成分から成る系の準位間隔分布を調べる必要がある [5, 6]。

本稿ではこれらのことを念頭に置き、可積分量子系の準位間隔分布を独立なエネルギー準位の成分数を無限大にとる際の弱収束極限として導出する。この極限において準位間隔分布を評価することによりポアソン分布の成立条件を決定すると共に、ポアソン分布からのずれを議論する。

はじめに相空間が N 個の独立領域からなる系を想定し、ベリー・ロブニックの仮定、および準位の重ね合わせの方法 [7] から準位間隔分布がどのように与えられるのかを示す。

各領域の相体積 (リュービルメジャー) を $\rho_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ と記述しよう。これらは $\sum_{i=1}^N \rho_i = 1$ を満足するように規格化されているものとする。ここでエネルギー軸上の任意の区間 $(0, S)$ に

¹E-mail: makino@mu.0038.net

準位が1つも入らない確率分布としてギャップ分布関数 $E(S)$ を導入する。 $E(S)$ は準位間隔分布 $P(S)$ と次のような関係で与えられる。

$$E(S) = \int_S^\infty d\sigma \int_\sigma^\infty P(x) dx, \quad P(S) = \frac{d^2}{dS^2} E(S) \quad (1)$$

注目している系のエネルギー準位が N 個の成分の統計的に独立な重ね合わせでできているとき、 $E(S)$ は下記のように各成分が与えるギャップ分布の積で与えられる。

$$E(S; N) = \prod_{i=1}^N E_i(S; \rho_i) \quad (2)$$

但し、 E_i は準位成分の最近接間隔分布 $p_i(S; \rho_i)$ と下記のような関係を持つ。

$$E_i(S; \rho_i) = \rho_i \int_S^\infty d\sigma \int_\sigma^\infty p_i(x; \rho_i) dx \quad (3)$$

又、 $p_i(S; \rho_i)$ は次の条件を満足すると仮定する。

$$\int_0^\infty S \cdot p_i(S; \rho_i) dS = \frac{1}{\rho_i} \quad (4)$$

この仮定の正当性はベリーとロブニックにより議論されており、相空間の各独立領域に対し、個別にトーマス・フェルミ則の成立を仮定することと等価である [1]。式 (2) と式 (4) は準位統計と相空間構造の関係を与えている。

以下では最近接間隔分布が特異性を示す場合にも応じるために、積算準位間隔分布、

$$\mu_i(S) = \int_0^S p_i(x; \rho_i) dx, \quad M(S; N) = \int_0^S P(x; N) dx \quad (5)$$

を議論する。但し、 $P(S; N)$ は $E(E; N)$ に対する準位間隔分布である。ここで可積分系の相空間構造を考慮に入れ、次の仮定を設ける。

- 仮定 1：可積分量子系の準位統計は成分数無限大における次のような極限において記述できる。

$$\max_i \rho_i \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad N \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

これに加え、次のテクニカルな仮定を設ける。

- 仮定 2：積算準位間隔分布の重み平均

$$\mu(\rho; N) = \sum_{i=1}^N \rho_i \mu_i(\rho), \quad (7)$$

が $N \rightarrow +\infty$ の極限において $\bar{\mu}(\rho)(S)$ に収束する。すなわち任意の区間 $0 \leq \rho \leq S$ に対し $\mu(\rho; N)$ が一様に平均値を持つ。

これらの仮定のもとで、式 (2) と式 (4) から準位間隔分布は $N \rightarrow +\infty$ の極限において下記の積算準位間隔分布によって与えられる分布関数に弱収束する。

$$M_{\bar{\mu}}(S) = 1 - (1 - \bar{\mu}(S)) \exp \left[- \int_0^S (1 - \bar{\mu}(\sigma)) d\sigma \right] \quad (8)$$

特に各コンポーネントのエネルギー準位が十分に疎なときには $\bar{\mu} = 0$ となるため、全体スペクトルの準位間隔分布はポアソン分布

$$M_{\bar{\mu}=0}(S) = 1 - \exp(-S) \quad (9)$$

に一致する。一般には各コンポーネントの間にはある程度集積が生じることが期待できるから $\bar{\mu} \neq 0$ となる。

次の節では仮定 1 と仮定 2 を用いて分布関数 (8) を導出する。第 3 節では極限準位間隔分布の性質を議論する。第 4 節で結果を述べ、他の研究事例との関係を踏まえ展望を述べる。

2 極限準位間隔分布

2.1 極限準位間隔分布の導出

本節では前節で導入した仮定 1 と仮定 2 を用いて、 $N \rightarrow +\infty$ の極限における最近接準位間隔分布を導出する。準位間隔分布はこの極限において積算準位間隔分布が式 (8) で与えられる極限分布関数へ弱収束することが示される。なを、Helly の定理から、この弱収束は $M(S; N) \rightarrow M_{\bar{\mu}}(S)$ の収束によって定義される [4]。

ギャップ分布関数 (2) を個々の独立コンポーネントに対する積算準位間隔分布 $\mu_i(S)$ で記述すると下記のようになる。

$$E(S; N) = \prod_{i=1}^N \left[\rho_i \int_S^{+\infty} d\sigma (1 - \mu_i(\sigma)) \right] = \prod_{i=1}^N \left[1 - \rho_i \int_0^S d\sigma (1 - \mu_i(\sigma)) \right] \quad (10)$$

但し、第 2 等式の導出には式 (4) を使い、部分積分と $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma (1 - \mu_i(\sigma))$ の極限を用いた。上式から積算準位間隔分布は次のように記述できる。

$$M(S; N) = 1 + \frac{d}{dS} E(S; N) = 1 - E(S; N) \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i - \rho_i \mu_i(S)}{1 - \rho_i \int_0^S d\sigma (1 - \mu_i(\sigma))} \quad (11)$$

まずは極限 $\lim_{N \rightarrow +\infty} E(S; N)$ について考える。仮定 2 より $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \rho_i \mu_i(\sigma) \rightarrow \bar{\mu}(\sigma)$ が任意の区間 $\sigma \in [0, S]$ で一様に成り立つので、次の極限が得られる。

$$\begin{aligned} \log E(S; N) &= \sum_{i=1}^N \log \left[1 - \rho_i \int_0^S d\sigma (1 - \mu_i(\sigma)) \right] = - \sum_{i=1}^N \left[\rho_i \int_0^S d\sigma (1 - \mu_i(\sigma)) + O(\rho_i^2) \right] \\ &= - \int_0^S d\sigma [1 - \mu(\sigma; N)] + \sum_i^N O(\rho_i^2) \longrightarrow - \int_0^S d\sigma [1 - \bar{\mu}(\sigma)] \quad \text{as } N \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

但し、 $|\mu_i(\sigma)| \leq 1$ 、および $\log(1 + \epsilon) = \epsilon + O(\epsilon^2)$ in $\epsilon \ll 1$ の関係を用い、極限の導出には仮定 1 から導かれる下記の性質を用いた。

$$\left| \sum_{i=1}^N O(\rho_i^2) \right| \leq C \cdot \max_i \rho_i \cdot \sum_{i=1}^N \rho_i = C \cdot \max_i \rho_i \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow +\infty \quad (12)$$

但し、 C は正定数である。式 (11) の右辺の和の極限についても同様の方法で計算できる。すなわち、 $1/(1 - \epsilon) = 1 + O(\epsilon)$ in $\epsilon \ll 1$ であるから、

$$\sum_{i=1}^N \frac{\rho_i - \rho_i \mu_i(S)}{1 - \rho_i \int_0^S d\sigma (1 - \mu_i(\sigma))} = 1 - \sum_{i=1}^N \rho_i \mu_i(S) + \sum_{i=1}^N O(\rho_i^2) \longrightarrow 1 - \bar{\mu}(S) \quad \text{as } N \rightarrow +\infty \quad (13)$$

となる。ゆえに次の極限分布関数が得られる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M(S; N) = M_{\bar{\mu}}(S) = 1 - (1 - \bar{\mu}(S)) \exp \left[- \int_0^S (1 - \bar{\mu}(\sigma)) d\sigma \right] \quad (14)$$

2.2 極限準位間隔分布の性質

$\mu_i(S)$ は単調増加関数であるから、 $\bar{\mu}(S)$ も単調増加関数である。また任意の S について $0 \leq \mu_i(S) \leq 1$ であることから $1 - \bar{\mu}(S) \geq 0$ が成立するので、式(14)の指数部分について次の極限が得られる。

$$\frac{1}{S} \int_0^S d\sigma (1 - \bar{\mu}(\sigma)) \rightarrow 1 - \bar{\mu}(+\infty) \quad \text{as } S \rightarrow +\infty \quad (15)$$

この極値から極限分布関数を次の3つのケースに分類することができる。

- ケース1: $\bar{\mu}(+\infty) = 0$: 極限準位間隔分布はポアソン分布に一致する。 $\bar{\mu}(S)$ は単調増加関数なので、この条件式は任意の S に対し $\bar{\mu}(S) = 0$ が成立することと等価である。
- ケース2: $0 < \bar{\mu}(+\infty) < 1$: 極限準位間隔分布は $S \rightarrow +\infty$ においてポアソン分布に漸近する。一方、 $S \ll +\infty$ では一般にポアソン分布からは外れる。
- ケース3: $\bar{\mu}(+\infty) = 1$: 極限準位間隔分布は S の全域においてポアソン分布から外れ、サブポアソン分布に一致する。すなわち式(14)は $S \rightarrow \infty$ でポアソン分布(9)よりもゆっくりと1に接近する。

特に各成分の積算準位間隔分布が下記のように有限のスケール分布関数 f_i で与えられるならば、ケース1が得られる。

$$\mu_i(S) = \rho_i \int_0^S f_i(\rho_i x) dx \quad (16)$$

$$\therefore |\mu(S; N)| \leq \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \int_0^S |f_i(\rho_i x)| dx \leq DS \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \leq DS \max_i \rho_i \sum_{i=1}^N \rho_i \rightarrow 0 \equiv \bar{\mu}(S)$$

但し、 f_i は規格化条件 $\int_0^{+\infty} f_i(x) dx = 1$ および $\int_0^{+\infty} x f_i(x) dx = 1$ を満足する。また、上式の D は $|f_i(S)| \leq D (1 \leq i \leq N \text{ および } S \geq 0)$ によって定義される有限の正定数である。

もしも $\bar{\mu}(S)$ が微分可能ならば極限準位間隔分布は式(14)から次のように与えられる。

$$P_{\bar{\mu}}(S) = \left[(1 - \bar{\mu}(S))^2 + \bar{\mu}'(S) \right] \exp \left[- \int_0^S (1 - \bar{\mu}(\sigma)) d\sigma \right] \quad (17)$$

3 まとめ・展望

本稿ではエネルギー準位の最近接間隔分布をベリー・ロブニックの仮定と仮定1、仮定2を出発点に導出し、無数の準位成分から成る系の準位統計を議論した。準位間隔分布は成分数 $N \rightarrow +\infty$ の極限において $\bar{\mu}(S)$ をパラメータとする極限分布関数に弱収束することが示された。さらに $\bar{\mu}(+\infty)$ の極値を用いて準位間隔分布を幾つかのクラスに分類した。このうち $\bar{\mu}(+\infty) = 0$ の時にはポアソン分布が得られ、 $\bar{\mu} \neq 0 (0 < \bar{\mu}(+\infty) \leq 1)$ の時には原点 $S = 0$ の近くでポアソン分布から外れることが分かった。特に $\bar{\mu}(+\infty) = 1$ の時には S の全域でポアソン分布から外れ、サブポアソン分布

が得られることが分かった。この結果はエネルギー準位が無数の成分の独立な重ね合わせで出来ている系においても、準位成分の間に強い集積が発生すれば統計的性質に特異性が生じ、ポアソン分布からのずれが起こる可能性を示唆している。実際に幾つかの可積分量子系では系の持つ対称性を起源とする強い準位集積が確認されており、準位間隔分布がポアソン分布から外れる現象が確認されている。良く知られている一つの事例が矩形ビリヤードである[6]。矩形ビリヤードはビリヤード台の辺々の長さの比で与えられるアスペクトパラメータが有理数の近傍にあるときに準位間隔分布が特異性を示す。次の事例が2自由度調和振動子系である。この系はブレアによって任意のアスペクト比に対しポアソン分布から外れることが証明されている[5]。もう一つの事例はShnirelmanのピークと呼ばれるもので、準位間隔分布が原点 $S=0$ の近傍で鋭いピークを示す現象であり、ある種の系において時間反転対称性を起源に生じることが報告されている[8]。本稿で述べた理論とこれらの現象の関係を明らかにすることを今後の展望としたい[9]。

謝辞

東京都立大学の首藤啓助教授には有益なご意見を頂き感謝しております。日頃から議論をしていただいている早稲田大学の相澤洋二教授に大変感謝いたします。

参考文献

- [1] M.V. Berry and M. Robnik, J. Phys. A **17** (1984), 2413.
- [2] V.I. Arnold and A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, (Benjamin, N.Y., 1978)
; V.I. Arnold, Russ. Math. Surveys **18:6** (1963), 85.
- [3] M.V. Berry, Phil. Trans. R. Soc. A **287** (1977), 237 ; M.V. Berry, J. Phys. A **10** (1977), 2083.
- [4] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications* (2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957)
- [5] M.V. Berry and M. Tabor, Proc. R. Soc. Lond. A **356**(1977), 375 ; P. M. Bleher, J. Stat. Phys. **61**(1990), 869 ; P. M. Bleher, J. Stat. Phys. **63**(1991), 261 ;
- [6] M. Robnik and G. Veble, J. Phys. A **31**(1998), 4669.
- [7] M.L. Mehta, *Random Matrices*(2nd ed., San Diego, CA: Academic Press, 1991) Appendix A.2.
- [8] A.I. Shnirelman, Usp. Mat. Nauk. a) **30** N4 (1975), 265 ; B.V. Chirikov and D.L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **74**(1995), 518 ; K.M. Frahm and D.L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **78**(1997), 1440.
- [9] H. Makino and S. Tasaki, "Level spacing statistics of classically integrable systems - Investigation along the line of the Berry-Robnik approach-" (to appear in Phys. Rev. E).