

Equivariant Completion

甲南大 隅 広 秀 康

k : 任意標数の代数的閉体.

G : k 上定義された線型代数群.

X : k 上定義された代数的多様体で, G が X に作用している. 簡単のため, この様な X を G -多様体ということにする.

線型代数群が, 代数的多様体に作用しているとき, 次の様な基本的な事柄が成り立つ. 詳しい内容及び証明は, ここでは省略することとし, 次の論文を見てください.

Equivariant Completion: Journ. of Math. of Kyoto Univ.

1974, Vol 14. (to appear)

Theorem 1. G を連結線型代数群, X を正規準射影的 G -多様体とすると, $\exists \varphi: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ (埋め込み)

$\exists \rho: G \rightarrow \mathrm{PGL}(N)$ (表現) で, 次の図式を可換にするように ρ の存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \\
 \downarrow \rho \times \varphi & \searrow & \downarrow \varphi \\
 \mathrm{PGL}(N) \times \mathbb{P}^N & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^N
 \end{array}$$

但し, $\sigma: G \times X \rightarrow X$ は G が X への作用,
 $\rho: \mathrm{PGL}(N) \times \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$ は $\mathrm{PGL}(N)$ が $\mathbb{P}^N$ への自然な作用.

即ち, 連結線型代数群の正規準射影代数的多様体への作用は, すべて, 線型であることが解かる.

Theorem 2. G を連結線型代数群 (又は, トーラス群), X を正規代数的 G -多様体とするとき, $\exists U = (U_\alpha): X$ の開近傍系で次の条件を満たすものがとれる.

- (i) 各 U_α は G -不変である.
- (ii) 各 U_α は準射影的 (又はアフィン) 多様体である.

Remark (1). Th. 1 と Th. 2 をあわせて考えると, 連結線型代数群 (又は, トーラス群) の正規代数的多様体への作用は, いくつかの正規準射影的 (又は, アフィン) 多様体への線型作用をばら合せて得られるものであることが解かる.

(2). 研究会発表の後, Th. 1, Th. 2 は, 任意の係数にわたって成り立つことが解かった. 即ち, 代数的関係と係数

件を導くことが出来る。

Th.1 と Th.2 を利用して、代数幾何学において、有用な、Chow's lemma, と永田雅宜氏の、 π の代数的多様体を proper π の代数的多様体に埋め込むことが出来る」という結果を次の様に主張出来る。

Theorem 3 (Equivariant Chow's lemma) G を連結系型代数群, X を G -多様体とすると, $\exists (\tilde{X}, \varphi)$ が存在し次の条件を満たす。

- (i) $\tilde{X}$ は埋射的 G -多様体。
- (ii) $\varphi: \tilde{X} \rightarrow X$ は G -不変 π 双有理射影的写像。
- (iii) $\exists U$ (X の G -不変開部分集合) が存在し,
 $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}: \varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ (同型)

Theorem 4 (Equivariant Completion) G を線型代数群 (必ずしも、連結でなくても良い), X を正規 G -多様体とすると, $\exists \bar{X}$ で次の条件を満たすものが存在する。

- (i) $\bar{X}$ は proper π G -多様体。
- (ii) X は $\bar{X}$ の G -不変開部分多様体とし, $\bar{X}$ に埋め込める。この種の二つの条件を満たす G -多様体を X の equivariant completion と呼ぶことにする。

Theorem 4 を証明するにあたり、 G -twisted valuation ring が大切な役割をはたす。これは X の局数体

$k(X)$ の valuation map とする。このとき、 U が X の 局所分多様体 Y に
中心をもち、 $U \subset Y$ とする。 Y が G -orbit に中心をもち、 $U \subset Y$ 、 $k(X)$
の valuation map $\bar{v}$ を作ることも出来る。 $\bar{v}$ は U の G -twisted
valuation map である。

Th. 4 の応用として、

Theorem 5. G は線型代数群 (必ずしも、連結でなくても良い)
 X, Y は G -多様体、 $f: X \rightarrow Y$ は G -不変写像、 $\bar{Y}$ は Y の
(局所平坦) equivariant completion とする。 $\exists (\bar{X}, \bar{f})$ 以下の条
件を満たすものが存在する。

- (i) $\bar{X}$ は X の equivariant completion
 - (ii) $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ は G -不変写像で、次の図式は可換である。
- $$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & \bar{X} \\ \downarrow f & \searrow & \downarrow \bar{f} \\ Y & \xrightarrow{\quad} & \bar{Y} \end{array}$$

Remark (1) Th. 5 は, Habuchi 氏により、証明を済ませ
た。

(2) Th. 1 ~ Th. 4 の結果は relative case のときも拡張
する事は大切な問題と思ふ。