

カスプ形式の周期について

九大理 門寺 芽治

この報告の目的は Shimura [7], Manin [4] にはじまるカスプ形式の周期の有理性の問題に関して Razar [5] を補い Shimura [8], [9] にあるような一般的な結果を導く1つの方法を示すことにある (cf. Hatada [2], Shokurov [10]). [5] では $\Gamma_0(N)$ 上の Haupttypus の場合だけしか扱われておらず結果も制限付きではあるが, この方法は Shimura 同型をそのままの形で使うもので簡明で見通しが良くそのまま主合同部分群上の eigenform の場合へ拡張される. さらに Ramanujan-Petersson の不等式についての1つの注意によ, この eigenform の周期と Fourier 係数との間の簡単な関係から周期の有理性の一般的な結果が導かれる (cf. [3]).

1. 周期の有理性の結果. $k \geq 2$ を整数, $\rho_{k-2}: GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_k(\mathbb{C})$ をテンソル表現, $dz_{k-2} = {}^t(z^{k-2}dz, z^{k-3}dz, \dots, dz)$ を上半平面上のベクトル値微分形式とする. 自然数 N に対し

$$\Gamma_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

として, Eichler cohomology 群 $H_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}) = Z_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}) / B^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ および Γ_N 上の重 k のカスプ形式の空間 $S_k(\Gamma_N)$ から parabolic な 1-cocycle 群 $Z_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ へ

$$\delta_0(g)_\gamma = \int_{\gamma(i\infty)}^{i\infty} g(z) dz_{k-2}, \quad g \in S_k(\Gamma_N), \gamma \in \Gamma_N$$

で定義される $\mathbb{C}$ -線型写像 δ_0 を考える. δ で δ_0 から導かれる $H_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ への $\mathbb{C}$ -線型写像を表せば, δ_0 および δ は $\mathbb{C}$ -線型な埋め込みで

$$\dim_{\mathbb{C}} H_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}) = 2 \dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma_N)$$

であることが知られている. Razar の手法 [5] に基づいてこれを証明する.

定理 (Shimura). $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z / N} \in S_k(\Gamma_N)$, $a_1 = 1$ を階数 N のすべての Hecke 作用素 T_n , $n \geq 1$ の同時固有函数とする. このとき

1) 定数 $u^{\pm} \neq 0$ が存在して, すべての有理数 x に対し

$$\frac{1}{u^{\pm}} \left\{ \int_x^{i\infty} f(z) dz_{k-2} \pm (-\rho_{k-2}(\varepsilon)) \int_{-x}^{i\infty} f(z) dz_{k-2} \right\} \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3, \dots)^{k-1}$$

が成り立つ. ただし $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

2) $K_f = \mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3, \dots)$ とおけば K_f の $\mathbb{C}$ への各埋め込み σ に対して定数 $u_\sigma^\pm \neq 0$ が存在して

$$\left[\frac{1}{u_\sigma^\pm} \left\{ \int_x^{i\infty} f(z) dz_{k-2} \pm (-\rho_{k-2}(\varepsilon)) \int_{-x}^{i\infty} f(z) dz_{k-2} \right\} \right]^\sigma$$

$$= \frac{1}{u_\sigma^\pm} \left\{ \int_x^{i\infty} f^\sigma(z) dz_{k-2} \pm (-\rho_{k-2}(\varepsilon)) \int_{-x}^{i\infty} f^\sigma(z) dz_{k-2} \right\}$$

がすべての有理数 x に対して成り立つ。ここで $f^\sigma(z)$ は

$$f^\sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\sigma e^{2\pi i n z / N}$$

で定義される $S_k(\Gamma_N)$ の元とする。

証明は2つの部分からなる。

I. $x = \gamma(i\infty)$, $\gamma \in \Gamma_N$ の場合に定理を示すこと。

II. 任意の有理数 x に対して問題の周期を I の場合の周期と f の Fourier 係数とで具体的に表示すること。これから特に定理が I の場合に帰着されることかわかる。

3. Razar の方法。I に関しては [5] における議論を、そこでの $\Gamma_0(N)$ を Γ_N で置きかえてやればほとんど同じにできる。まず Shimura 同型によって

$$(1) \quad H_p^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}) = \delta(S_k(\Gamma_N)) \oplus \overline{\delta(S_k(\Gamma_N))}$$

が成り立つ。ここで記号 δ は $H_p^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ における自然な複素共役写像を表す。また

$$(g|[\varepsilon])(z) = \overline{g(-\bar{z})} \quad (g \in S_k(\Gamma_N)),$$

$$(Q|\tilde{\varepsilon})_Y = -\rho_{k-2}(\varepsilon) Q_{\varepsilon Y \varepsilon} \quad (Q \in Z'_p(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}), Y \in \Gamma_N)$$

で $S_k(\Gamma_N)$ 上の R -線型変換 $[\varepsilon]$ および $Z'_p(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ 上の $\mathbb{C}$ -線型変換 $\tilde{\varepsilon}$ を定義すれば

$$(2) \quad \overline{\delta_0(g|[\varepsilon])} = \delta_0(g)|\tilde{\varepsilon} \quad (g \in S_k(\Gamma_N))$$

が成り立つ。さらに $S_k(\Gamma_N)$ 上の Hecke 作用素 T_n に対応して $Z'_p(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ 上の $\mathbb{C}$ -線型変換 $\tilde{T}_n$ を

$$\begin{cases} (Q|\tilde{T}_n)_Y = \sum_i \rho_{k-2}(\alpha_i^L) Q_{Y_i} & (Q \in Z'_p(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}), Y \in \Gamma_N) \\ \{\alpha_i\} = \left\{ \eta_a \begin{pmatrix} a & bN \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a > 0, ad = n, (a, N) = 1, 0 \leq b < d \right\} \\ \alpha_i Y = Y_i \alpha_{j(i)} \end{cases}$$

によって定義する。ただし $\alpha_i^L = \det(\alpha_i) \alpha_i^{-1}$ で各 a に対して $SL_2(\mathbb{Z})$ の元 η_a で $\eta_a \equiv \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \pmod{N}$ なりものを 1 つ固定しておく。 $\tilde{T}_n$ から導かれる $H_p^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ 上の $\mathbb{C}$ -線型変換を $\hat{T}_n$ で表せば、そのとき

$$(3) \quad \begin{cases} \delta(g|T_n) = \delta(g)|\hat{T}_n & (\text{すべての自然数 } n \text{ に対して}) \\ \delta_0(g|T_p) = \delta_0(g)|\tilde{T}_p & (p \equiv 1 \pmod{N} \text{ なるすべての素数 } p \text{ に対して}) \end{cases}$$

が成り立つ。

いま $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\pi i n z / N}$, $a_1 = 1$ をすべての T_n の同時固有函数とする。このとき $(f|[\varepsilon])|T_n = \bar{a}_n (f|[\varepsilon])$, $n \geq 1$ であるが, (1), (3) によって $\{\hat{T}_n\}_{n \geq 1}$ の固有値 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ に属する同時固有空間

は $\delta_0(f)$ および $\overline{\delta_0(f|[\varepsilon])}$ の cohomology 類で張られることが容易にわかる. さらに 2つの cocycles $\delta_0(f) \pm \overline{\delta_0(f|[\varepsilon])}$ を考えると, これらは (1), (2), (3) によって次の cocycle に関する条件を満足する.

$$(4) \quad \begin{cases} 1. \text{ すべての } n \text{ に対して } \mathcal{C}(Q^\pm)/\hat{T}_n = a_n \mathcal{C}(Q^\pm). \\ 2. \quad Q^\pm/\tilde{\varepsilon} = \pm Q^\pm. \\ 3. \quad Q^\pm_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = 0. \\ 4. \text{ すべての素数 } p \equiv 1 \pmod{N} \text{ に対して } Q^\pm/\hat{T}_p = a_p Q^\pm. \end{cases}$$

ただし $\mathcal{C}(Q^\pm)$ は $Q^\pm$ の属する cohomology 類を表す.

一方 $Z'_p(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ は $Z'_p(\Gamma_N, \mathbb{Q}^{k-1})$ にその基底をもち, したがって $\hat{T}_n, \tilde{\varepsilon}$ はともに $\mathbb{Q}$ 上に定義される. それゆえ条件 (4) を満足する自明でない cocycles $Q^\pm$ は $Z'_p(\Gamma_N, K_f^{k-1})$ に属するものが存在する. また条件 (4) の 1, 2 を満足する cohomology 類の空間はそれぞれ $\mathbb{C}$ 上 1 次元であるが, さらに条件 3, 4 によってこれらの類の代表を正規化することによって (4) の 4 条件を満足する cocycle の空間も $\mathbb{C}$ 上 1 次元になる. よって定数 $u^\pm \neq 0$ が存在して

$$\delta_0(f) \pm \overline{\delta_0(f|[\varepsilon])} = u^\pm Q^\pm$$

とかける. また $Q^\pm$ の σ -共役 $(Q^\pm)^\sigma$ は f^σ に対して同様の性質 (4) を有していることから定数 $u_\sigma^\pm \neq 0$ があって

$$\delta_0(f^\sigma) \pm \overline{\delta_0(f^\sigma|[\varepsilon])} = u_\sigma^\pm (Q^\pm)^\sigma$$

よ

とかけることもわかる。

3. 周期と Fourier 係数. いま x を任意の有理数として固定する. 奇素数 $p \equiv 1 \pmod{N}$ をとり Hecke 作用素

$$T_p = p^{\frac{k}{2}-1} \sum_i \alpha_i, \quad \{\alpha_i\} = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pm N \\ 0 & p \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & \pm \frac{p-1}{2}N \\ 0 & p \end{pmatrix} \right\}$$

を考える. そのとき

補題. 1) 各 α_i に対し $\alpha'_i(x) = \alpha_i(x)$ なる $\alpha'_i \in \Gamma_N$ が存在する.

2) 関係式

$$\left\{ a_p - \sum_i p_{k-2}(\alpha_i^L \alpha'_i) \right\} \left| \int_x^{i\infty} f(z) dz_{k-2} \pm (-p_{k-2}(x)) \int_{-x}^{i\infty} f(z) dy_{k-2} \right\} \\ = \sum_i p_{k-2}(\alpha_i^L) \left\{ \delta_0(f)_{\alpha'_i} \pm \overline{\delta_0(f|[\varepsilon])}_{\alpha'_i} \right\}$$

が成り立つ.

3) 行列 $\sum_i p_{k-2}(\alpha_i^L \alpha'_i)$ は次の形の行列と相似である.

$$\begin{pmatrix} 1+p^{k-1} & & * \\ p+p^{k-2} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{k-2}+p \end{pmatrix}$$

が成り立つ. 1) は $\alpha'_i(x) = \alpha_i(x)$, $\alpha'_i \in \Gamma_N$ を解くことにより得られ, さらにこれから 3) が得られる. 2) は 1) および $f|T_p = a_p f$ より容易に得られる.

特にこの補題により 2) における係数行列の可逆性すなわち a_p がどの $p^l + p^{k-1-l}$ ($0 \leq l \leq k-2$) と異なる素数 $p \equiv 1 \pmod{N}$ の存在が保証されれば任意の有理数 x に対しこの定理が証明されることになる。この保証は k が偶数の場合は例えば Rankin の評価式 $a_n = O(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}})$ から得られる。 k が奇数の場合は Deligne-Serre [1] から従う次の結果によって十分に保証される。

定理. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \in S_k(N, \chi)$ ($k \geq 2$) を *normalized newform* とする。このとき素数の集合

$$\mathcal{P} = \{p \mid a_p^2 = 4\chi(p)p^{k-1}, p \nmid N\}$$

の密度は 0 である。

証明. K_f は完全分解する有理素数の無限集合を $\mathcal{L}$, 各 $l \in \mathcal{L}$ に対し f に付随する l -進表現 $\rho_l: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}_l)$ の reduction mod l $\tilde{\rho}_l: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ の像を G_l とする。 G_l の元でその特性多項式が重根をもつものの全体を G_l° , また $\mathcal{P}_l = \{\tilde{\rho}_l(\text{Frob}(p)) \mid p \in \mathcal{P}, p \nmid l\}$ ($\text{Frob}(p)$ は p に付随する Frobenius 置換) とすると

$$(5) \quad \inf_{l \in \mathcal{L}} \frac{\#\mathcal{P}_l}{\#G_l} = 0$$

を示すことによって Tchebotarev の密度定理から上の主張が得られる。まず G_l は次の 4 つの場合が考えられる。

- i) $SL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l) \subseteq G_l$.
- ii) G_l は $GL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ の Borel 部分群に含まれる.
- iii) G_l は $GL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ の Cartan 部分群 C_l の正規化群 N_l に含まれ C_l 自身には含まれない.
- iv) G_l の $PGL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ における像は $\Omega_4, \gamma_4, \Omega_5$ のいずれかに同型である.

これらの4つの場合の中から無限個の $l \in \mathcal{L}$ に対して成立するような場合を選んで、これらの l について $\inf \#p_l/\#G_l = 0$ とみれば十分である. ii) ~ iv) の場合はだいたい同様なので、ここでは i) および iii) の場合だけを考えることにする. $p_l \subseteq G_l^\circ$ だから i) の場合は

$$\frac{\#G_l^\circ}{\#G_l} \leq \frac{2l}{l^2-1}$$

よりわかる. 以下 iii) の場合を考える. このとき $\#p_l/\#G_l$ であるから、 p_l の $PGL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ における像は自明となる. G_l の $PGL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ における像の位数が有界でなければ (5) は明らかだから以下これらは有界と仮定する. いま $\tilde{\rho}_l$ と自然準同型 $N_l \rightarrow N_l/C_l = \{\pm 1\}$ との合成写像を考えたと N_l を割る素数 p_l が存在して $Frob(p) (p \nmid N_l)$ のこの写像による像は平方剰余記号 $(\frac{p}{p_l})$ と一致する. $\tilde{\rho}_l(Frob(p)) \notin C_l$ ならば $tr \circ \tilde{\rho}_l(Frob(p))$ は0であるから $(\frac{p}{p_l}) = -1$ なる p に対しては $a_p \equiv 0 \pmod{l}$ が

また $(\frac{p}{\ell}) = +1$ なる p に対しては $a_p^2 \equiv \chi(p)p^{k-1} \{ \zeta^{2e(p)} + \zeta^{-2e(p)} + 2 \}$
 (mod ℓ) が成り立つ. ここで ζ は p, ℓ によらないある 1 の根
 で $e_\ell(p) \in \mathbb{Z}$ である. もし無限個の p に対して $\ell_\ell = \ell$ ならば
 $p \in \mathcal{P}$ に対して $(\frac{p}{\ell}) = +1$ であることから $\mathcal{P}$ の密度は 0 である.
 したがって無限個の p に対して ℓ_ℓ は N を割る素数 ℓ に等しい
 と仮定する. そのとき先の合同式から $(\frac{p}{\ell}) = -1$ ならば $a_p = 0$,
 $(\frac{p}{\ell}) = +1$ ならば $e(p) \in \mathbb{Z}$ があって

$$a_p^2 = 4\chi(p)p^{k-1} \{ \zeta^{2e(p)} + \zeta^{-2e(p)} + 2 \}$$

が成り立つ. これは k が偶数ならば $K_f/\mathbb{Q}$ が有限次拡大であ
 ることに矛盾する. k が奇数の場合は χ_ℓ を ℓ -adic cyclotomic
 character として $\rho_\ell = \rho \otimes \chi_\ell^{\frac{k-1}{2}}$ を考えると, この ℓ -進表現の指
 標は有限個の値しかとらないことになる.

補題. $GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ のコンパクト部分群 H について, $\{tr(x) | x \in H\}$
 が有限ならば H は有限群か, または $GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ の適当な元で同
 時に上半三角化され, その対角成分には有限個の 1 の根しか
 現われない.

したがって $\rho_\ell \cong \chi_\ell^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & * \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は有限位数の指標) であ
 るか, さもなくば ρ_ℓ の像は有限群となる. 前者の場合は
 Rankin の評価式 $\sum_{p \leq x} |a_p|^2 p^{-\alpha(p)} \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \rightarrow \infty)$ ([1]) に矛盾し, 後者
 の場合も f に付随するゼータ関数が Artin の L 関数になるこ
 とから不合理を生じる (cf. [6]).

文 献

- [1] P. Deligne and J.P. Serre, *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. 7 (1974), 507-530.
- [2] K. Natada, *Periods of primitive forms*, Proc. Japan Acad. 53A (1977), 174-177.
- [3] Y. Kadotera, *Periods of cusp forms*, to appear.
- [4] Ju. I. Manin, *Periods of parabolic forms and p -adic Hecke series*, Mat. Sbornik, 92, 134 (1973), 378-401.
- [5] M. J. Razar, *Values of Dirichlet series at integers in the critical strip*, Lecture Notes in Math., 627, 1976, 1-10.
- [6] K. A. Ribet, *Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus*, Lecture Notes in Math., 601, 1976, 17-52.
- [7] G. Shimura, *Sur les intégrales attachées aux formes automorphes*, J. Math. Soc. Japan, 11 (1959), 291-311.
- [8] G. Shimura, *The special values of zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math., 29 (1976), 783-804.
- [9] G. Shimura, *On the periods of modular forms*, Math. Ann., 229 (1977), 211-221.
- [10] V. V. Shokurov, *Modular symbols of arbitrary weight*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 10 (1976), 95-96.