

Duffing 方程式の Bifurcation について

豊田工専 伊藤敏和

§0 序

これは、J. Hale の論文 (プレプリント) “Bifurcation in the Duffing equation with independent parameters I, II” の紹介です。

この中で、J. Hale は

$$(0.1) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + u = p_1 u - p_2 u^3 + p_3 \cos t$$

$$(0.2) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + u = p_1 u + p_4 \frac{du}{dt} - p_2 u^3 + p_3 \cos t$$

の方程式の周期 2π の解の個数がパラメーター (p_1, p_2, p_3) , (p_1, p_2, p_3, p_4) をそれぞれ $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ の原点の近傍で変化させた時にどのように変化するかを考察している。

考察の困難さの一つに、(0.1), (0.2) 式の周期解の有界性がパラメーターの変化によ、ア、く、ず、れ、る、こ、と、が、あ、る。

我々は、S. Bancroft が perturbation の方法によ、ア、

ある仮定のもとに、解の有界性と連続性をだしている、が、この仮定が成立しない場合に非常に興味をおぼえる。実際に (0.1) 式の場合において、仮定が成立しない式を具体的に計算してみると、J. Hale が分岐面として求めた式と全く同じと見えくろいです。

一方、カタストロフ理論の応用を (0.1), (0.2) 式について試みている論文は J. P. Holmes and D. A. Rand [5] にである。

§1 Perturbation による方法.

$f(t, x, \lambda)$ は $(t, x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ 上の関数であって、 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}$ は連続であるとする。このとき微分方程式

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x, \lambda) + d(t)$$

の周期 T の解について考察する。

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(t, x, 0) = 0$$

$$\mathbb{R}^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = (y_1, \dots, y_k), \quad A(t) = (a_{ij}(t))$$

$$1 \leq i, j \leq n$$

とする。 $\mathbb{R}^k$ の単位球面を S^{k-1} とし、 E を S^{k-1} の compact 部分集合とする。又 $\lambda \in \mathbb{R}^k$ に対し $|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2}$ は自然なノルムとする。このとき $\sigma > 0$ に対して cone を考

える。

$$C(E, \sigma) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n \mid |\lambda| \leq \sigma, \frac{\lambda}{|\lambda|} \in E \text{ if } \lambda \neq 0 \right\}$$

次に $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ と $\frac{dy}{dt} = -yA(t)$ との周期 T の解の基底をそれぞれ $\phi_j(t)$, $j=1, \dots, p$, $\psi_j(t)$, $j=1, 2, \dots, p$ とし、 $n \times p$ 行列 $\Phi(t)$ と $p \times n$ 行列 $\Psi(t)$ を作る。

$$\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_p(t)), \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_p(t) \end{pmatrix}$$

さらに $\frac{dx}{dt} = A(t)x + d(t)$

の特殊解を $x_p(t)$ とする。このとき、 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^p$ への写像 $H(a_0, \lambda)$ を次のように定義する。

$$H(a_0, \lambda) = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi(t) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x_p(t) + \Phi(t)a_0, 0) \lambda dt$$

又、 $\mathcal{P}_T$ の記号でも、 $\mathcal{P}_T = \{x; \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{連続}, x(t+T) = x(t)\}$ なる周期 T の写像のあつまりを表わし、 $x \in \mathcal{P}_T$ に対して $|x| = \sup_t |x(t)|$ でも、 $\|\cdot\|$ norm をきめる。

定理 1

上記の記号のもとで、 E から $\mathbb{R}^p$ への連続写像 a_0 が次の条件 $(H_1), (H_2)$ をみたす。

$$(H_1) ; H(a_0(\lambda), \lambda) = 0$$

$$(H_2) ; \det \left| \frac{\partial H}{\partial a_0} (a_0(\lambda), \lambda) \right| \neq 0 \quad \text{for } \forall \lambda \in E$$

$\Rightarrow \sigma = \sigma(E) > 0$ が存在して、次のことが成立する。

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x, \lambda) + d(t)$$

は周期 T の解 x^* をもち、

$$x^* ; C(E, \sigma) \longrightarrow \mathcal{P}_T$$

なる写像は $C(E, \sigma)$ 上で一様有界、しかも

$C(E, \sigma) - \{0\}$ 上で連続である。又、

$$x^*(t, \lambda) = x_p(t) + \Phi(t) a_0\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right) + w^*(t, \lambda)$$

をみたす。こゝで、 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} w^*(t, \lambda) = 0$

我々は条件 $(H_1), (H_2)$ に興味をもつ。それで、

$$(1.2) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + u + \gamma u^3 = F \cos \omega t$$

の場合に具体的に計算してみる。

$$\omega^2 = 1 + \beta, \quad t = \omega \tau, \quad \gamma, F, \beta \ll 1$$

$$p_1 = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad p_2 = \frac{\gamma}{1+\beta}, \quad p_3 = \frac{F}{1+\beta} \quad \text{とおけば,}$$

(1.2) 式は

$$(1.3) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + u = \frac{\beta}{1+\beta} u - \frac{\gamma}{1+\beta} u^3 + \frac{F}{1+\beta} \cos t$$

$$= p_1 u - p_2 u^3 + p_3 \cos t$$

となり、(0.1) 式になる。

$$a_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix} \text{ と表示したとき,}$$

$$H(a_0, \lambda) = \begin{bmatrix} \beta r \cos \psi - \frac{3}{4} \gamma r^3 \cos \psi + F \\ \beta r \sin \psi - \frac{3}{4} \gamma r^3 \sin \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta a_1 - \frac{3}{4} \gamma (a_1^2 + a_2^2) a_1 + F \\ \beta a_2 - \frac{3}{4} \gamma (a_1^2 + a_2^2) a_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{となるから, } \frac{\partial H}{\partial a_0}(a_0, \lambda) = \begin{bmatrix} \beta - \frac{9}{4} \gamma a_1^2 - \frac{3}{4} \gamma a_2^2, & -\frac{3}{4} \gamma \cdot 2 a_1 a_2 \\ -\frac{3}{4} \gamma \cdot 2 a_1 a_2, & \beta - \frac{9}{4} \gamma a_2^2 - \frac{3}{4} \gamma a_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det \left| \frac{\partial H}{\partial a_0}(a_0, \lambda) \right| = (\beta - \frac{9}{4} \gamma r^2)(\beta - \frac{3}{4} \gamma r^2)$$

よって, 条件 $(H_1), (H_2)$ は次のようになる。

$$(1.4) \quad \beta r \cos \psi - \frac{3}{4} \gamma r^3 \cos \psi + F = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (1.5) \quad \beta r \sin \psi - \frac{3}{4} \gamma r^3 \sin \psi = 0 \\ (1.6) \quad (\beta - \frac{9}{4} \gamma r^2)(\beta - \frac{3}{4} \gamma r^2) \neq 0 \end{array} \right\} (H_1)$$

$$(1.6) \quad (\beta - \frac{9}{4} \gamma r^2)(\beta - \frac{3}{4} \gamma r^2) \neq 0 \quad (H_2)$$

だから, (1.5) より, $\sin \psi \cdot (\beta r - \frac{3}{4} \gamma r^3) = 0$.

$\sin \psi = 0$ より $\psi = 0$ or π .

$$\psi = 0 \text{ のとき } r(\beta - \frac{3}{4} \gamma r^2) + F = 0$$

$$\psi = \pi \text{ のとき } r(\beta - \frac{3}{4} \gamma r^2) - F = 0$$

となる。もし、 $F \neq 0$ なら $\beta - \frac{3}{4} \gamma r^2 \neq 0$. 故に.

$$(1.7) \quad r(\beta - \frac{3}{4} \gamma r^2) + F = 0$$

$$(1.8) \quad \beta - \frac{9}{4} \gamma r^2 \neq 0$$

が $(H_1), (H_2)$ より得られる。

結論として, (1.7), (1.8) 式と $\gamma^2 + \beta^2 + F^2 = 1$ をみたすならば, (1.2) 式は $2\pi/\omega$ -周期解は $\lambda = (\gamma, \beta, F)$ に関して一様有

界かつ連続である。

我々は条件 $(H_1), (H_2)$ が成り立たない場合に非常に興味をもつ。

それは, $\mathbb{R}^3 \ni \lambda = (\gamma, \beta, F)$ に対して,

$$(1.9) \quad \begin{cases} (i) & r(\beta - \frac{3}{4}\gamma r^2) + F = 0 \\ (ii) & \beta - \frac{\gamma}{4}r^2 = 0 \\ (iii) & \gamma^2 + \beta^2 + F^2 = 1 \end{cases}$$

となる。この (1.9) 式より r, F を消去すると

$$(1.10) \quad \frac{4}{9}\beta^3 - \frac{\gamma}{4}\beta^2 - \frac{\gamma}{4}(\gamma^2 - 1)\gamma = 0$$

が得られる。この式を (p_1, p_2, p_3) でもって書きかえると,

$$(1.11) \quad p_1^3 = \left(\frac{\gamma}{4}\right)^2 p_2 p_3^2 \quad (\text{ただし } p_2 > 0)$$

となる。

この (1.11) 式が §2 で J. Hale が求めている分岐方程式を近似する式である。

§2. $\frac{d^2 u}{dt^2} + u = p_1 u - p_2 u^3 + p_3 \cos t$ のパラメーター $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ に関する 2π -周期解の個数の変化。

$$\mathcal{P} = \{v; \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \text{ 連続}, v(t+2\pi) = v(t)\},$$

$v \in \mathcal{P}$ に対し, $|v| = \sup_t |v(t)|$ でもって norm を決める。

Duffing 方程式

$$(2.1) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + u = p_1 u - p_2 u^3 + p_3 \cos t, \quad (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$$

の 2π -周期解の個数を考察するとき基本になつた命題は次のようなものである。

定理 1

$$(2.2) \quad \frac{d^2 V}{dt^2} + V = p_1 V - V^3 + \sigma \cos t, \quad (p_1, \sigma) \in \mathbb{R}^2$$

において, $(p_1, \sigma) = 0$ の近傍 $U \subset \mathbb{R}^2$ と $V=0$ の近傍 $V \subset \mathcal{O}$ が存在して, 次のことが成立する。

もし, $\sigma \neq 0$ ならば V 内の 2π -周期解は偶関数 (i.e. $V(t) = V(-t)$) である。

証明は [3] にある。

(2.1) 式を考察する前に。

$$(2.3) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + u = p_1 u - p_2 u^3$$

について, 知られている事実を思いおこす。詳細は J. Hale [1] をみよ。

命題 2

次のことが成立する $R > 0$ と点 $(p_1, p_2) = (0, 0)$ の近傍 $U \subset \mathbb{R}^2$ が存在する。

$$(2.3) \text{ が定数でない } 2\pi\text{-周期解をもつ} \iff p_1 \cdot p_2 > 0$$

そして, この解は相変位をのぞいて一意的であり,

$$|u(t)| \leq K |p_1/p_2|^{1/2} \quad \text{が成立する。}$$

命題3

(2.3)の方程式において, $(p_1, p_2) = (0, 0)$ の近傍 $U \subset \mathbb{R}^2$ が存在して, 次のことが成立する。

(i) $p_1 \cdot p_2 > 0, p_2 > 0 \implies 2\pi$ -周期解は3つあり, それは, $u=0$ と定数でない 2π 周期解が2つである。

(ii) $p_1 \cdot p_2 > 0, p_2 < 0 \implies 2\pi$ 周期解は5つあり, それは, $u=0, u = \pm \left[\frac{(1-p_1)}{|p_2|} \right]^{1/2}$ と定数でない 2π 周期解が2つである。

(iii) $p_1 \cdot p_2 \leq 0, p_2 > 0$ 或 $p_1 \neq 0, p_2 = 0 \implies 2\pi$ 周期解は1つであり, それは $u=0$ である。

(iv) $p_1 \cdot p_2 \leq 0, p_2 < 0 \implies 2\pi$ 周期解は3つあり, それは $u=0, u = \pm \left[\frac{(1-p_1)}{|p_2|} \right]^{1/2}$ である。

(v) $p_1 = 0, p_2 = 0 \implies$ どの解も 2π -periodic

(注意)

命題3において, 2π 周期解は $|u(t)| \cdot |p_2|^{1/2} \leq K, (K > 0)$

が成立している。

命題4

(2.1) の方程式において, $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 0)$ の近傍 $U \subset \mathbb{R}^3$ が存在して, 次のことが成立する。

各 $(p_1, p_2, p_3) \in U$, $p_2 < 0$ に対し, (2.1) 式は p_3 に関して連続な偶関数の 2π 周期解をもつもち, それは $p_3 = 0$ のときには $\pm \left[\frac{(1-p_1)}{|p_2|} \right]^{\frac{1}{2}}$ に一致する。

他のすべての (2.1) の 2π -周期解は $p_3 = 0$ のとき, (2.3) 式の $u = 0$ 又は定数でない周期解に一致する。

だから, 以下では $p_2 > 0$ のとき, p_3 に関して連続な偶関数の 2π 周期解を求めれば, (2.1) の方程式の 2π -周期解の (p_1, p_2, p_3) による個数の変化がもとまる。

そこで, $u = V \cdot p_2^{\frac{1}{2}}$ とおくと, (2.1) 式は

$$(2.4) \quad \frac{d^2 V}{dt^2} + V = p_1 V - V^3 + \sigma \cos t$$

となる。ただし, $\sigma = p_2^{\frac{1}{2}} \cdot p_3$ とおく。

写像 $P; \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ を次のように定義する。

$$Ph(t) = \frac{1}{\pi} \cos t \int_0^{2\pi} h(s) \cos s ds, \text{ for } h \in \mathcal{P}$$

命題5

任意の $h \in \mathcal{P}$ に対し,

$$\frac{d^2V}{dt^2} + V = f \text{ が } \mathcal{D} \text{ 内に解をもつ} \iff P f = 0$$

命題 6

$\forall f \in \mathcal{D}$ に対して,

$$(2.5) \quad \frac{d^2V}{dt^2} + V = (I-P)f$$

の解であつて, $PV = 0$ をみたすのはただ一つ存在する。この解を $\mathcal{K}(I-P)f$ とかく。

我々は $(I-P)\mathcal{D}$ から $(I-P)\mathcal{D}$ への連続線型作用素 $\mathcal{K}$ を $(I-P)f$ に対して, (2.5) 式の解 $\mathcal{K}(I-P)f$ を対応させることと定義する。

$\mathcal{D}$ 内での (2.5) 式の一般解は

$$(2.6) \quad V = r \cos t + \mathcal{K}(I-P)f$$

とかける。ただし, r は任意の定数である。

$$(2.7) \quad f(t, V, p_1, \sigma) = p_1 V - V^3 + \sigma \cos t$$

とおくとき, 次の定理は重要である。

定理 7

V が (2.4) 式の解であつて $\mathcal{D}$ に入ることと, 次の (a), (b), (c) が成立することとは同値である。

$$(2.8) \quad \begin{cases} (a) & V = r \cos t + W, \quad W \in (I-P)\mathcal{D} \\ (b) & W = \mathcal{K}(I-P)f(t, r \cos t + W, p_1, \sigma) \\ (c) & P f(t, r \cos t + W, p_1, \sigma) = 0 \end{cases}$$

この定理でも、 τ 、我々は (2.4) 式の 2π 周期解をもとめるのに、まず (2.8) - (b) より W^* を求めて、その W^* を (2.8) - (c) に代入して、 r を p_1, σ の関数と思、 τ を求め、この r と W^* とを (2.8) - (a) に代入すれば、それが求めるものである。

まず (2.8) - (b) から W^* を求めるのは次の命題による。

命題 8

$\delta > 0, \varepsilon > 0$ があ、 τ 、次のことが成立する。

$|r| < \delta, |p_1| + |\sigma| < \varepsilon$ ならば、(2.8) - (b) の解 $W^*(r, p_1, \sigma)$ が $(I-P)$ の内にただ一つ存在して、その解 $W^*(r, p_1, \sigma)$ は r, p_1, σ に関して解析的であり、 $W^*(0, p_1, 0) = 0$ をみたす。

我々は命題 8 で求めた $W^*(r, p_1, \sigma)$ を (2.8) - (c) に代入した式を分岐方程式という。

$$(2.9) \quad g(r, p_1, \sigma) = Pf(t, r \cos t + W^*(r, p_1, \sigma), p_1, \sigma) = 0$$

具体的にかくと、

$$(2.10) \quad g(r, p_1, \sigma) = p_1 r - \frac{3}{4} r^3 + \sigma + \frac{p_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos t W^*(t) dt \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos t [3r^2 \cos^2 t W^*(t) + 3r \cos t W^*(t)^2 + W^*(t)^3] dt$$

以下において、 $g(r, p_1, \sigma) = 0$ の点 $(r, p_1, \sigma) = (0, 0, 0)$ の近傍での解を求める。

$g(r, 0, 0) = -\frac{3}{4}r^3$ より $(0, 0, 0)$ の近傍では高々3根しかもたない。それで, (p_1, σ) をパラメータとして
 $g(r, p_1, \sigma) = 0$ の重根を求める。

$$(2.11) \quad \begin{cases} g(r, p_1, \sigma) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial r}(r, p_1, \sigma) = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial(g, \frac{\partial g}{\partial r})}{\partial(p_1, \sigma)} \Big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 陰関数の定理から $\delta_1 > 0$ があって $|r| < \delta_1$ ならば
 $p_1(r), \sigma(r)$ と r の中級数でかけて,

$$(2.12) \quad \begin{cases} p_1(r) = \frac{9}{4}r^2 + o(r^3) \\ \sigma(r) = -\frac{3}{2}r^3 + o(r^4) \end{cases}$$

となる。

$\mathbb{R}^2$ 内の曲線 Γ は (2.12) 式でパラメトライズされたものとする。
 $\Gamma = \{(p_1, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1(r) = \frac{9}{4}r^2 + o(r^3), \sigma(r) = -\frac{3}{2}r^3 + o(r^4)\}$
 さらに, Γ 上では

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, p_1, \sigma) = -\frac{9}{2}r + o(r^2)$$

となるから, $(p_1, \sigma) \neq 0$ なる $g(r, p_1, \sigma) = 0$ は Γ 上で重根をもつ。

又, (2.10) 式の $p_1 r - \frac{3}{4}r^3 + \sigma$ の部分に注目すると,
 $p_1 r - \frac{3}{4}r^3 + \sigma = 0$ の実根は (p_1, σ) の変化によって次のようになる。
 (の個数)

$$-\frac{16}{81}p_1^3 + \sigma^2 < 0 \quad \longrightarrow \quad 3\text{个}$$

$$-\frac{16}{81}p_1^3 + \sigma^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad 2\text{个}$$

$$-\frac{16}{81}p_1^3 + \sigma^2 > 0 \rightarrow 1 \text{ ㄱ}$$

一方 $\frac{\partial f}{\partial \sigma}(0,0,0) = 1$ より,

次のことが成り立つ。

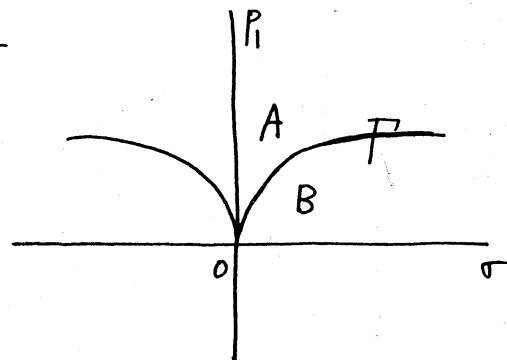
(i) $(p_1, \sigma) \in A$

$$\Rightarrow f=0 \text{ は 3 根.}$$

(ii) $(p_1, \sigma) \in B \Rightarrow f=0 \text{ は 1 根}$

(iii) $(p_1, \sigma) \in \Gamma, (p_1, \sigma) \neq 0 \Rightarrow f=0 \text{ は 1 根と重根.}$

$$(p_1, \sigma) \in \Gamma, (p_1, \sigma) = 0 \Rightarrow 3 \text{ 重根 } 1 \text{ ㄱ}$$



これを $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ のパラメーターに書きなおすと、
分岐面は $p_1^3 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 p_3^2 \cdot p_2$ によつて近似される面となる。

定理 9

$p_2 > 0$ のとき,

(2.1) 式の偶関数の
2π 周期解の個数
は次のようになる。

(i) $(p_1, p_2, p_3) \in A_1$

$$\Rightarrow 3 \text{ ㄱ}$$

(ii) $(p_1, p_2, p_3) \in S$

$$\Rightarrow 2 \text{ ㄱ}$$

(iii) $(p_1, p_2, p_3) \in B_1 \Rightarrow 1 \text{ ㄱ}$

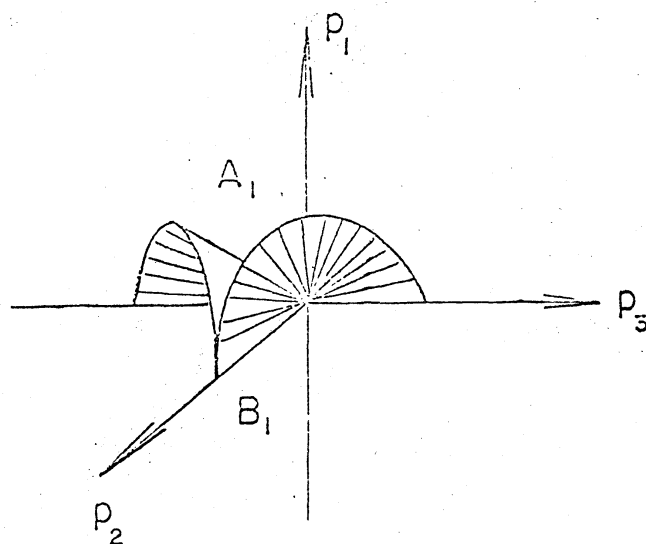


Figure 2.

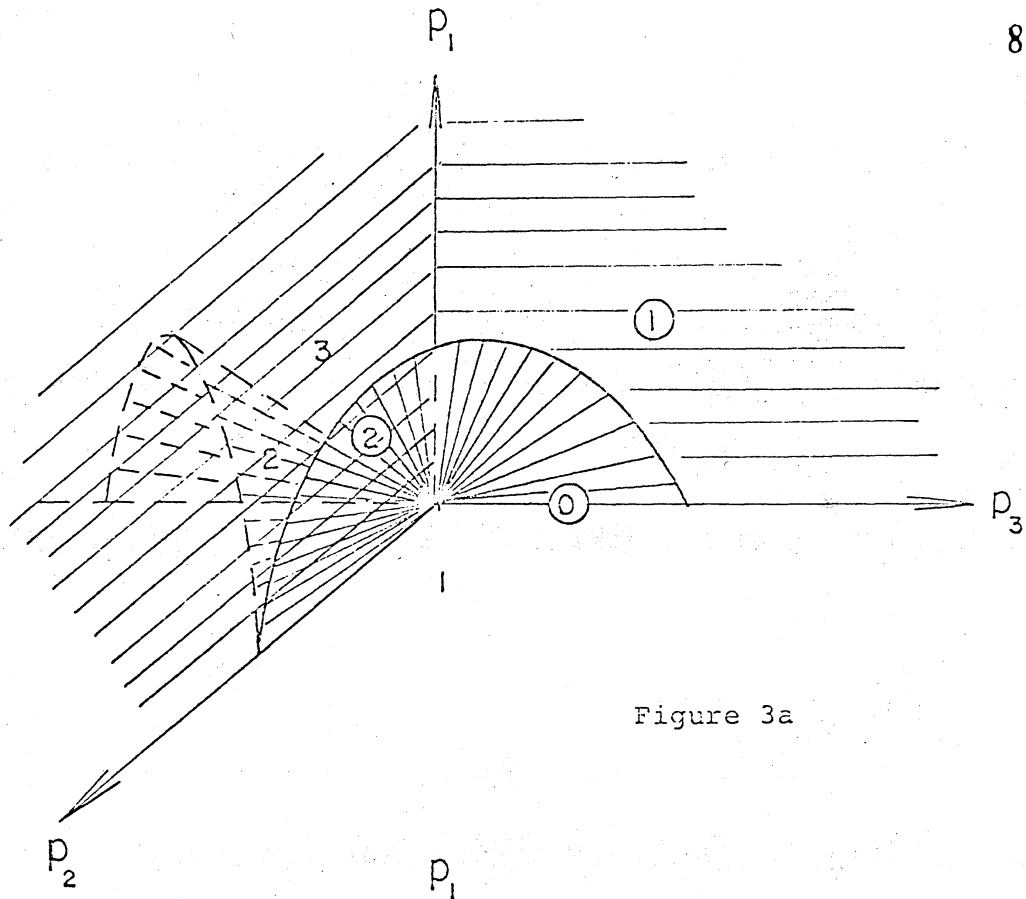


Figure 3a

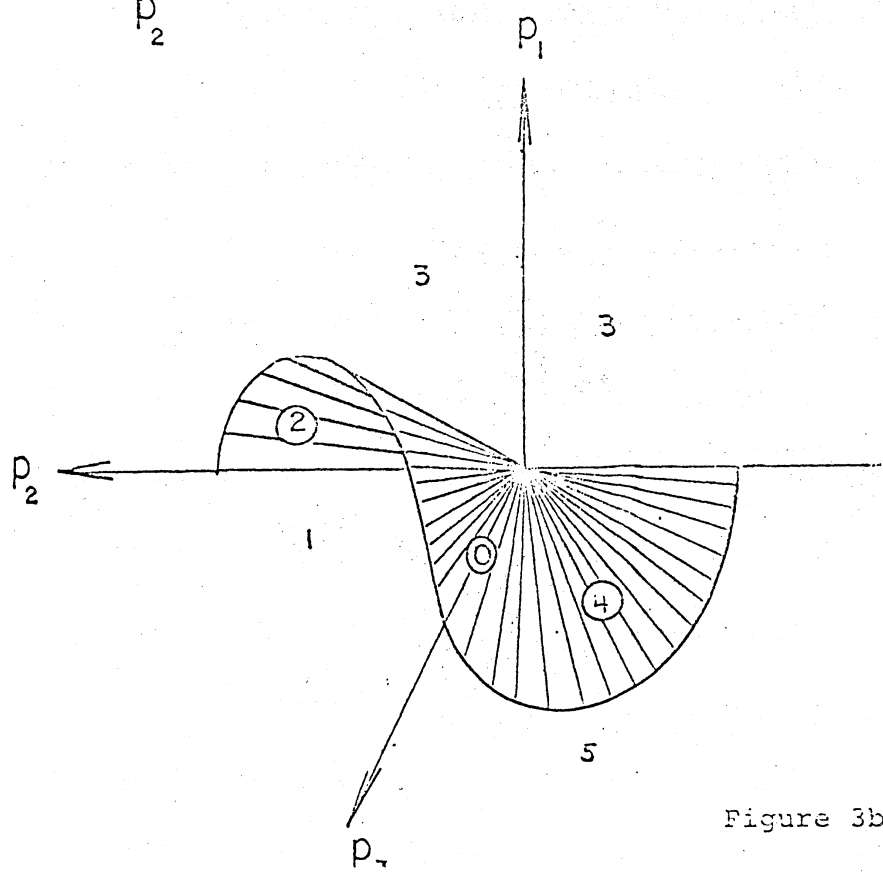


Figure 3b

以上、定理9と命題3をまとめると図 3a, 3bになる。

§3 おわりに.

定理9の分岐面 S は $p_1^3 = (\frac{9}{4})^2 p_3^2 \cdot p_2$ により近似されるのであるが、この $p_1^3 = (\frac{9}{4})^2 p_3^2 \cdot p_2$ の式は §1 の (1.11) 式である。
(0.2) 式に対する考察は全く同じやり方で [3] にある。

— 文 献 —

1. J. Hale ; Ordinary Differential Equations.
Wiley - Interscience, 1969.
2. J. Hale ; Bifurcation in the Duffing equation with independent parameters, I.
3. J. Hale ; Bifurcation in the Duffing equation with independent parameters II.
4. S. Bancroft ; Perturbations with several independent parameters, J. Mathematical Analysis and Applications, 50 (1975), pp. 384-414
5. P.J. Holmes and D.A. Rand ; The bifurcations of Duffings equation : an application of catastrophe theory. J. Sound and Vibration, 44 (1976), 237-253.