

乱流シェルモデルのリヤプノフスペクトル

山田 道夫

東京大学大学院数理科学研究科

大木谷耕司

広島大学総合科学部

1 はじめに

1987年に提案された流体乱流のシェルモデルは、カオス状態において慣性小領域をもつ自励的連立常微分方程式系で、種々の平均量や分布関数が Navier-Stokes 乱流とよく似た振る舞いをする事が知られている (Yamada and Ohkitani 1987)。当初このモデルは、流体乱流における伝統的概念、すなわち Kolmogorov スペクトルなどスケーリング則を中心とする1940年代以来の記述方法と、1980年代に次々と提案されたカオスの現象論的記述方法との関係を追求するために考案された。実際、アトラクタの次元が100万を超えることが確実な現実の乱流ではおよそ不可能な数値的処理も、このモデル(50次元程度)においては実行可能となりカオスパラメータに関するかなり詳細なデータを得られる場合がある。この一例がリヤプノフスペクトルであり、これまでの数値結果は、シェルモデルにおいては、リヤプノフ数の分布密度関数がゼロにおいて発散すること、また、ゼロに近いリヤプノフ数に対応するリヤプノフベクトルは慣性小領域にサポートを持つこと、などを示唆している。しかしリヤプノフスペクトルのこのような特徴が、乱流の伝統的記述方法の枠組みとどう関係しているのかは依然として不明なままであった。

ここでは、このシェルモデルのリヤプノフスペクトルが、実は、リヤプノフベクトルの波数空間における局在化を通じて、伝統的な Kolmogorov スケーリング則と密接に関連していること、またこの関係を用いると、非粘性極限におけるリヤプノフスペクトルの漸近形を得ることができることを示す。またこのことから、シェルモデルは、高次元カオスにおいてリヤプノフスペクトルの解析表現が現象論的に得られる例でもあることが分かる。一般に、微分方程式系においてカオス状態のリヤプノフスペクトルの解析表現が得られる例は極めてまれ(著者はその例を知らない)であるが、シェルモデルはその一例を与えることになると思われる。

2 シェルモデル

ここで扱うシェルモデルは次の形のものである (Yamada and Ohkitani 1987)。

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right)u_n = i[c_n^{(1)}u_{n+1}^*u_{n+2}^* + c_n^{(2)}u_{n-1}^*u_{n+1}^* + c_n^{(3)}u_{n-1}^{(*)}u_{n-2}^{(*)}] + f\delta_{n,4}$$

ここで $1 \leq n \leq N$ である。また ν は粘性定数、 $c_n^{(1)}, c_n^{(2)}, c_n^{(3)}, f$ は定数、 δ は Kronecker のデルタ、 $*$ は複素共役を表す。波数 k_n はスカラーとして2のべきで離散化されており ($k_n = k_0 2^n, k_0$: 定数)、各波数は1個の複素変数 u_n を伴っている。このモデルは3次元 Navier-Stokes 方程式のフーリエ空間における表現を念頭において提案されたものであり、カオス状態において時間的に平均したエネルギースペクトル

$$E(k_n) = \frac{\langle |u_n|^2 \rangle}{2k_n}$$

は慣性小領域で Kolmogorov スペクトル $E(k) \sim k^{-5/3}$ を持つことが知られている。モデルの詳細については Yamada and Ohkitani(1987) を見られたい。モデルの自由度 $2N$ は、十分広い慣性小領域が得られること、および現在の計算機で計算可能であること、の2条件を満たすように選ぶことになり、実際には $2N \sim 50$ 程度を用いる。(このときストレンジアトラクタのリアプノフ次元 D は30ないし40程度である)。このモデルは、間欠性(スケーリング指数)や分布関数などについて詳細に調べられている(M. Yamada and K. Ohkitani 1987, 1988abc, 1993; K. Ohkitani and M. Yamada, 1989, 1990; M. H. Jensen et al. 1991; L. Biferale et al. 1991, 1993; L. Kadanoff et al. 1994)。

このモデルは、カオス状態において平均量が Kolmogorov scaling を満たすという点が特徴的であるが、このカオスの特徴づけるカオスパラメータを計算するとなると手間がかかり、代表的な量の中ではリアプノフスペクトル

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N} \quad (\lambda_i \geq \lambda_j (i \geq j))$$

が实际的に可能な殆ど唯一の量と思われる(多くのカオスパラメータは、ストレンジアトラクターの次元が1桁の前半でないと実際に計算することができない)。これまで調べられた数値結果は、リアプノフ数の分布密度関数がゼロにおいて発散すること、また、ゼロに近いリアプノフ数 λ_j に対応するリアプノフベクトル $v^{(j)}$ が慣性小領域にサポートを持つこと、などを示唆している。

3 リアプノフベクトルのサポート

シェルモデルにおけるリアプノフスペクトル v^j のこのような特徴の由来を調べるため、リアプノフベクトルのサポートの時間平均スペクトル

$$E^{(j)}(k_n) = \langle |v_n^{(j)}|^2 \rangle$$

を作り、この等高線を $j-n$ 平面(すなわち、横軸がリアプノフ数の番号 j 、縦軸が波数の(2を底とする)対数 n)に描く。図1は、ストレンジアトラクタの次元 D が $D \sim 34$ の場合に、描いた等高線である。この図の特徴を、リアプノフ数の大きさに注意してまとめると次のようになる。

1. 個々のリヤブノフベクトルの波数空間におけるサポートは特定の波数付近に局在している。
2. リヤブノフベクトルのサポートの中心は、最大リヤブノフ数 ($j = 1$) において、 $n \sim D/2$ にある。
3. サポートの中心の波数は、リヤブノフ数の番号 j が増加するにつれ減少して $n \sim 0$ 付近に至る。なお、この範囲ではリヤブノフ数は正であり、 $n \sim 0$ に対応するリヤブノフ数はゼロに近い。
4. 更に j が大きくなると、サポートの中心の波数は再び増加し $j \sim D$ で $n \sim D/2$ に達する。これらに対応するリヤブノフ数は負である。
5. 更に j が大きくなると、サポートの中心の波数は更に増加し $n \geq D/2$ となる。これらに対応するリヤブノフ数は負であり、その絶対値は、もとの方程式の散逸項の係数 νk_n^2 に漸近的に一致する (図省略)。
6. 以上のような特徴の結果として、 $D/2 \geq j \geq 0$ の範囲では、一つの j をサポートの中心に持つリヤブノフベクトルは2つあり、それらのリヤブノフ数は、一つは正、他の一つは負である。

これらの特徴は、アトラクタのリヤブノフ次元 D が散逸波数より小さい波数領域の自由度の数に対応すること (すなわち D は慣性小領域の大きさに対応すること)、各波数は (複素変数の実部と虚部の) 2つの自由度を持つこと、などと consistent であることを注意しておく。

4 リヤブノフスペクトルと Kolmogorov scaling 則

上の観察は数値結果を基にして得られたものであるが、数値計算の時間的経済的制約から、リヤブノフベクトルの時間平均結果は必然的に誤差を含んでいる。そこで上の観察にもとづいて、アトラクタが十分大きい ($D \gg 1$) とき慣性小領域の (すなわち $j \lesssim D$ の) リヤブノフベクトルについて、漸近的に、次の命題が成り立つと仮定しよう。

1. 個々のリヤブノフベクトルの波数空間におけるサポートは局在化しており、それぞれのサポートは特定の波数付近にある。
2. $1 \leq j < D/2$ に対応するリヤブノフ数は正であり、 $D/2 < j$ に対応するリヤブノフ数は負である。
3. j 番目のリヤブノフベクトルのサポートの波数を n_j とすると
 - (a) $1 \leq j \leq D/2$ のとき $n_j = D/2 - j + 1$
 - (b) $D/2 < j \lesssim D$ のとき $n_j = j - D/2$

となる。

このとき、各リヤプノフ数にはそれぞれ特定の波数が対応することになる。そこで、リヤプノフ数の次元が $1/(\text{時間})$ であることに注意して、さらに次のことを仮定しよう。

- (#) 慣性小領域において、 j 番目 ($j \sim D$) のリヤプノフ数 λ_j の絶対値は、それに対応する波数 $k_{n_j} = k_0 2^{n_j}$ の (Kolmogorov scaling による) 特性時間 ($\epsilon^{-1/3} k_{n_j}^{-2/3}$) の逆数に比例する。

この仮定は、リヤプノフベクトルの波数空間におけるサポートが (慣性小領域内の) 特定の波数付近に強く局在していることを基礎にして、リヤプノフ数が、Kolmogorov 流の次元解析によってエネルギー散逸率 ϵ と波数 k を用いて表現できる、とするものである。上に述べた仮定と合わせ用いると、リヤプノフ数 λ_j の値について次の表現が得られる。

1. $1 \leq j < D/2$ のとき $\lambda_j \sim \epsilon^{1/3} k_{n_j}^{2/3} \sim 2^{-2j/3}$
2. $D/2 \leq j \sim D$ のとき $\lambda_j \sim -\epsilon^{1/3} k_{n_j}^{2/3} \sim -2^{2(j-D/2+1)/3}$

この結果を整理するため、生のリヤプノフ数の代わりにそれらを Kolmogorov エントロピー $H = \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j$ で割った値 λ_j/H を用いることにする。このことは、時間 t の代わりに新しい時間 $\tau = at$, ($a = \sum_{j=1}^{D/2} \lambda_j$) を導入すること、すなわち Kolmogorov エントロピー $H = \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j$ が 1 となるように時間をスケールすることと同等である。このような時間軸のスケールはストレンジアトラクタの幾何学的構造やその上の不変測度の構造を変えないことを注意しておく。

さて、いま

$$H = \sum_{j=1}^{D/2} \lambda_j \sim \frac{2^{D/3} - 1}{2^{2/3} - 1}$$

であるから上の結果は

1. $1 \leq j < D/2$ のとき $\lambda_j/H = (2^{2/3} - 1) \frac{2^{D/3}}{2^{2/3} - 1} 2^{-2j/3} \sim (2^{2/3} - 1) 2^{-2j/3} \quad (D \rightarrow \infty)$
2. $D/2 \leq j \sim D$ のとき $\lambda_j/H = \frac{2^{2(j-D/2+1)/3} (2^{2/3} - 1)}{2^{2/3} (2^{D/3} - 1)}$

のように書き換えられる。この表現は不定の定数を含んでいないことを注意しておく。数値結果をこの現象論と比較するため、いくつかの粘性値 (従ってアトラクタのいくつかの次元) の場合について、正のリヤプノフ数に関して、数値的に得られた λ_j/H の値をプロットしたものが図2である。図2では λ_j/H と j をそれぞれ縦軸 (対数軸) と横軸に選び、上の現象論の結果を一点鎖線で示した。図中、アトラクタのリヤプノフ次元は、バツ印で示したものが最も小さくひし形が最も大きい。リヤプノフ次元の増加とともに、数値結果が現象論から得られる表式とよく一致することが分かる。なお同様に、 $\sum_{i=1}^j \lambda_i/H$ と j の関係も

$$\sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{H} = 1 - 2^{2j/3}$$

のように得られ、数値結果とよく一致する (図3)。また、負のリヤブノフ数 $j > D/2$ に対しては、正のリヤブノフ数の場合ほど良くはないものの、やはり、数値結果と現象論の一致が見られる (図4)。

5 3次元 Navier-Stokes 乱流のリヤブノフ数分布

前節までのモデルにおける結果を用いて3次元乱流に関する予想が次のように得られる。モデルの結果の要点は、リヤブノフベクトルのサポートが波数空間において局在化するということである。これは、リヤブノフベクトルが表す運動に特徴的なスケールが存在し、リヤブノフ数はそのスケールの運動の特性時間の逆数で与えられることを示している。いまこのことが3次元乱流においても成り立つと仮定しよう。ここでは乱流が一辺の長さが L の立方体の中に (例えば周期境界条件のもとに) あり、粘性は十分小さく、以下で考える運動はすべて慣性小領域にあるとする。いま n を自然数とすると、大きさ $r = L/n$ の渦は総計 n^3 個存在する。この数は、スケールが r 以上のすべての運動モードの総数に等しい。このような運動のうち最も小さなスケールの運動に伴うリヤブノフ数 λ は、スケール r の運動の Kolmogorov 特性時間の逆数に等しい。すなわち $\lambda \sim r^{-2/3} \sim n^{2/3}$ となる。従って

$$n^3 \sim \lambda^{9/2}$$

が得られる。この式は、リヤブノフ数が λ 以下の運動モードの数 (左辺)、即ち、値が λ 以下のリヤブノフ数の数が $\lambda^{9/2}$ であることを示している。故に、リヤブノフ数の分布密度関数 $P(\lambda)$ は上の関係式を微分して次のように得られる。

$$P(\lambda)d\lambda \sim \lambda^{7/2}d\lambda$$

ここで得られた分布密度関数の形は、現在の計算機的能力では数値的に確かめることはほとんど不可能であることを注意しておきたい。実際それに要する CPU 時間は数十年のオーダーに見積られる。あくまで数値的方法でチェックしようとするなら、計算機能力の飛躍的な進歩が必要であろう。

またこの分布密度関数は $\lambda = 0$ においても発散しないことを指摘しておく。これはシェルモデルのリヤブノフ数の分布密度が $\lambda = 0$ で発散していたことと対照的である (なお前節の議論を進めることでこの発散のオーダーが $1/\lambda$ であることが分かる)。シェルモデルにおける発散は、波数の離散化が2のべきで行われたために、波数ゼロ (すなわちリヤブノフ数ゼロ) にモードが集積したことによる。これに対して3次元乱流では波数ゼロにおけるモードの集積は存在せず、従って分布密度関数の発散も生じない。

6 まとめ

乱流のシェルモデルにおいてリヤブノフベクトルを調べ、そのサポートが波数空間において特定の波数付近に局在化していること、および、その波数における特性時間の逆数が

リヤブノフ数を与えること、を見いだした。この結果、シェルモデルにおいて、リヤブノフ数の（アトラクタの次元 $\rightarrow \infty$ における）漸近的な解析的表現を得た。すなわちシェルモデルは、常微分方程式系の高次元カオスにおいて、リヤブノフ数の解析的表式が得られる例を与えている。さらにこの結果を3次元 Navier-Stokes 乱流に適用して、3次元乱流のリヤブノフ数の分布密度を $P(\lambda)d\lambda \sim \lambda^{7/2}d\lambda$ と予想した。

参考文献

1. M.Yamada and K.Ohkitani, J.Phys.Soc.Japan, 56(1987)4210; Phys.Rev.Lett., 60(1988) 983; Prog.Theor.Phys. 79(1988)1265; Phys.Lett., A134(1988)165; *Unstable and Turbulent Motion of Fluids*, World Scientific,(1993)188.
2. K.Ohktani and M.Yamada, Prog. Theor. Phys., 81 (1989) 329; Prog.Theor.Phys., 84(1990)415.
3. M.H.Jensen et al., Phys.Rev. A43(1991)798.
4. L.Biferale et al.,Physica A185(1991)19; Phys.Fluids A5(1993)428.
5. L.Kadanoff et al. (1994) preprint.

 1

Lyapunov vector
on support







