

統計流体力学に於ける逐次近似解法

京大 数研 川原 琢 治

§1. まえがき

乱れの場の完全な統計的記述には、無限個の積平均値について論ずるか、それと等価である特性函数について論ずる必要がある。

ところで、一様な乱れの統計理論で通常行われるのは、数個の積平均値を取り扱うことである。その場合、問題となる方程式の非線型性のために、 N 次の積平均値を支配する方程式には、 $(N+1)$ 次の積平均値が現われ、方程式系は閉じない。そこで、この連鎖を打ち切るために異なる次数の積平均値間に、ある関係が仮定される。例えば、2, 3, 4, 次の積平均値に対する2つの方程式と、4次の積平均値と2次の積平均値との間の関係とを用いる、いわゆる、準正規分布理論などがそれである。

一方、無限個の積平均値を取り扱うことに相当する特性函数理論では、Hopfにより、特性函数方程式が導かれており、弱い乱れの極限で、正規分布が解であることが示されている。^[1]

ここでは、乱れが弱い場合について、積平均値理論を特性函数の立場から見なおすことを試みる。

考える乱れは, Burgers方程式に従う乱れであるとする。

これは, Navier-Stokes乱れの等方的な場合と similar であり, 問題の本質的な非線型性は保たれており, 1次元であるため簡単である等の利点があるからである。

§2では, Burgers乱れに対する特性汎函数方程式について述べる。

§3では, 特性汎函数を, 正規分布を第0近似として Taylor展開し, 積平均値理論との対応を調べる。ただし, 乱れの Reynolds数が小さい場合を考える。そして, 5次のキュムラントを無視する方が, 分布の立場からは, 4次のキュムラントを無視する準正規分布の仮定よりも, もっともらしいことが示される。

§4, §5では, 5次のキュムラントを無視した場合についてエネルギー・スペクトルの初期型を調べる。ただし, エネルギー・スペクトルの初期値として指数函数型をとり, 非粘性流体($\nu=0$)の場合を考える。

§2. Burgers乱れに対する特性汎函数方程式

Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$u = u(x, t)$: 速度, ν : 動粘性率

$u(x, t)$ を Fourier変換し, 波数空間における速度場 $v(k, t)$ を考える。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) \exp\{ikx\} dk$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) v(k, t) = -i \int_{-\infty}^{\infty} k' v(k', t) v(k-k', t) dk' \quad (2)$$

$$\text{ただし } v^*(k) = v(-k)$$

条件 $z^*(k) = z(-k)$, $k \rightarrow \infty$ のとき $z(k) \rightarrow 0$,

$$\text{内積 } (z, v) = \int_{-\infty}^{\infty} z(k) v^*(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} z(k) v(-k) dk$$

をみたす波数空間のすべての点で定義された $z(k)$ を導入し, Hopf 方程式の導出と同じ手続きにより, Burgers 乱れに対する特性汎函数方程式 (3) を得る.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\infty} \nu k^2 z(k) \frac{\partial \phi}{\partial z(k) dk} dk = \iint_{-\infty}^{\infty} k' z(k+k'') \frac{\partial^2 \phi}{\partial z(k') dk' \partial z(k'') dk''} dk' dk'' \quad (3)$$

ここに, $\phi = \phi(z(k); t)$ は次の条件をみたす特性汎函数である.

$$\phi(0, t) = 1, \quad |\phi(z(k); t)| \leq 1, \quad \phi^*(z(k); t) = \phi(-z(k); t)$$

§3. 逐次近似

次の形の特性汎函数を仮定する.

$$\phi(z(k); t) = \exp X(z(k); t)$$

$$\begin{aligned} X(z(k); t) = & -\frac{1}{2!} \iint_{-\infty}^{\infty} A(k, k'; t) z(k) z(k') \delta(k+k') dk dk' \\ & -\frac{1}{3!} \iiint_{-\infty}^{\infty} B(k, k', k''; t) z(k) z(k') z(k'') \delta(k+k'+k'') dk dk' dk'' \\ & -\frac{1}{4!} \iiint_{-\infty}^{\infty} C(k, k', k'', k'''; t) z(k) z(k') z(k'') z(k''') \delta(k+k'+k''+k''') dk dk' dk'' dk''' \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式で, z について 2 次の項だけをとると正規分布, 3 次の項までをとると $z \rightarrow \pm \infty$ のいずれかで発散するおそれがあるので, 特性汎函数の条件をみたすために z の 4 次を加える. また, (4)式で, 波数について δ -函数とあいたのは, 位相分布の一様性(一様な乱れ)を仮定すると, 任意の q に対して $\phi(e^{ikq} z(k)) = \phi(z(k))$ とはらねばならぬからである.

$\phi = \exp X$ (3) 式に代入

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} + \nu \int_{-\infty}^{\infty} k^2 z(k) \frac{d\phi}{dX} \frac{\partial X}{\partial z(k) dk} dk \\ = \iint_{-\infty}^{\infty} k' z(k'+k'') \left\{ \frac{d\phi}{dX} \frac{\partial^2 X}{\partial z(k') dk' \partial z(k'') dk''} + \frac{d^2 \phi}{dX^2} \frac{\partial X}{\partial z(k') dk'} \frac{\partial X}{\partial z(k'') dk''} \right\} dk' dk'' \end{aligned}$$

両辺の $\frac{d\phi}{dX} = \frac{d^2 \phi}{dX^2} = \exp X$ ($\neq 0$) を約すると $X(z(k), t)$ に対する (5) 式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} + \nu \int_{-\infty}^{\infty} k^2 z(k) \frac{\partial X}{\partial z(k) dk} dk \\ = \iint_{-\infty}^{\infty} k' z(k'+k'') \left\{ \frac{\partial^2 X}{\partial z(k') dk' \partial z(k'') dk''} + \frac{\partial X}{\partial z(k') dk'} \frac{\partial X}{\partial z(k'') dk''} \right\} dk' dk'' \quad (5) \end{aligned}$$

(4) 式で仮定した $X(z(k), t)$ を (5) 式に代入, その中の係数を比較すると,

$$\begin{aligned} \boxed{2\text{次}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \nu(p^2 + q^2) \right\} A(p, q, t) \delta(p+q) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} a \{ B(a, p-a, q, t) + B(a, p, q-a, t) \} \delta(p+q) da \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{3\text{次}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \nu(p^2 + q^2 + r^2) \right\} B(p, q, r, t) \delta(p+q+r) \\ = \{ pA(-p, p, t) \{ A(-q, q, t) + A(r, r, t) \} + qA(-q, q, t) \{ A(-p, p, t) + A(r, r, t) \} \\ + rA(-r, r, t) \{ A(-p, p, t) + A(-q, q, t) \} \} \delta(p+q+r) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} a \{ C(a, p-a, q, r, t) + C(a, p, q-a, r, t) + C(a, p, q, r-a, t) \} \delta(p+q+r) da \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{4\text{次}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \nu(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) \right\} C(p, q, r, s, t) \delta(p+q+r+s) \\ = \{ -p \{ A(-q, q, t) B(-r, r, s, t) + A(r, r, t) B(-q, q, s, t) + A(-s, s, t) B(-q, r, q, r, t) \} \\ - q \{ A(-p, p, t) B(-r, r, s, t) + A(r, r, t) B(-p, p, s, t) + A(-s, s, t) B(-p, r, p, r, t) \} \\ - r \{ A(-p, p, t) B(-q, q, s, t) + A(-q, q, t) B(-p, p, s, t) + A(-s, s, t) B(-p, q, p, q, t) \} \\ - s \{ A(-p, p, t) B(-q, r, q, r, t) + A(-q, q, t) B(-p, r, p, r, t) + A(r, r, t) B(-p, q, p, q, t) \} \} \\ \times \delta(p+q+r+s) \quad (8) \end{aligned}$$

p, q, r, s, a は波数, t は時間.

その1次の係数は, つねに0になる. その5次以上の係数は, 今の展開では考えない.

ここで積平均値について考察する。

任意の次数の積平均値は特性汎函数の汎函数微分によって次のように与えられる。

$$i^n \overline{v^*(k_1, t) \cdots v^*(k_n, t)} = \left[\frac{\partial^n \phi}{\partial z(k_1) dk_1 \cdots \partial z(k_n) dk_n} \right]_{z=0}$$

(4)式で仮定1に ϕ に対して

$$\overline{v(k, t) v(-k, t)} = A(k, k, t) \quad (9)$$

$$\overline{v(k, t) v(k', t) v(-k-k', t)} = -i B(k, k', k+k', t) \quad (10)$$

$$\overline{v(k, t) v(k', t) v(k'', t) v(-k-k'-k'', t)} = 2A(k, k, t) A(k', k', t) + A(k, k', t) A(k'', k'', t) - C(k, k', k'', k+k'+k'', t) \quad (11)$$

$A(k, k, t)$ はエネルギースペクトル函数,

$B(k, k', k+k', t)$, $C(k, k', k'', k+k'+k'', t)$ はエネルギー伝達函数

$v^*(k, t) = v(-k, t)$ と (9)(10)(11) より次のことがわかる。

- $A(k, k, t)$: k に関して実偶函数
- $B(k, k', k+k', t)$: k, k' に関して実部は奇函数, 虚部は偶函数,
- $C(k, k', k'', k+k'+k'', t)$: k, k', k'' に関して実部は偶函数, 虚部は奇函数.

Reynolds 数が小さい (すなわち v が小さい) 場合には $A \sim O(v^2)$, $B \sim O(v^3)$, $C \sim O(v^4)$ であるから展開(6)(7)(8)でその5次以上の係数を考えなければ、たのほ、 $O(v^5)$ を無視したことになる。

以上の性質を用いて(6)(7)(8)式を書きかえる。

方程式には実部だけが現われるので、以下簡単のために

$$A(k, k, t) \Rightarrow A(k, t), \quad \text{Re } B(k, k', k+k', t) \Rightarrow B(k, k', t), \quad \text{Re } C(k, k', k'', k+k'+k'', t) \Rightarrow C(k, k', k'', t)$$

などを書く。また t を省くこともある。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right\} A(k, t) = -k \int_{-\infty}^{\infty} B(k, k', t) dk' \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu(k^2 + k'^2 + kk') \right\} B(k, k', t) \\ &= (k+k')A(k)A(k') - kA(k')A(k+k') - k'A(k)A(k+k') \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} k'' \{ C(k, k', k'') + C(k-k'', k', k'') + C(k, k'-k'', k'') \} dk'' \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu(k^2 + k'^2 + k''^2 + kk' + k'k'' + k''k) \right\} C(k, k', k'', t) \\ &= -k \{ A(k')B(k'', k+k'') + A(k'')B(k'-k-k'') + A(k+k+k'')B(k', k'') \} \\ &-k' \{ A(k)B(k'', k+k'') + A(k'')B(k, k+k'') + A(k+k+k'')B(k, k'') \} \\ &-k'' \{ A(k)B(k', k+k'') + A(k')B(k, k+k'') + A(k+k+k'')B(k, k') \} \\ &+ (k+k'+k'') \{ A(k)B(k', k'') + A(k')B(k, k'') + A(k'')B(k, k') \} \end{aligned} \quad (14)$$

方程式系(12)(13)(14)は、 A, B, C に関して閉じている。

$B=C=0$ とあくと、方程式(12)は、エネルギー・スペクトル函数 $A(k, t)$ に対する熱伝導型方程式(弱い乱れの極限)になる。

$C=0$ 、すなわち、4次のキュムラントを0とあくと、準正規分布仮定に一致する。⁽²⁾

§4. 初期エネルギー・スペクトル

慣性項によるエネルギーの初期伝達を調べるために、(12)(13)(14)式で

$\nu=0$ とあき、 A, B, C を時間 t で巾級数展開し、その係数を決める。

$$A(k, t) = A_0(k, 0) + tA_1(k, 0) + \frac{t^2}{2!}A_2(k, 0) + \frac{t^3}{3!}A_3(k, 0) + \frac{t^4}{4!}A_4(k, 0) + \dots$$

$$B(k, k', t) = B_0(k, k', 0) + tB_1(k, k', 0) + \frac{t^2}{2!}B_2(k, k', 0) + \dots$$

$$C(k, k', k'', t) = C_0(k, k', k'', 0) + tC_1(k, k', k'', 0) + \frac{t^2}{2!}C_2(k, k', k'', 0) + \dots$$

$t=0$ でエネルギー伝達はない, i.e. $B_0(k, k', 0) = C_0(k, k', k'', 0) = 0$ と仮定し,

A, B, C の展開を (12)(13)(14) 式に代入し, t の各巾の係数を比較すると.

$$A_1(k, 0) = A_3(k, 0) = A_5(k, 0) = \dots = 0$$

$$B_2(k, k', 0) = B_4(k, k', 0) = \dots = 0$$

$$C_1(k, k', k'', 0) = C_3(k, k', k'', 0) = \dots = 0$$

$$B_1(k, k', 0) = (k+k')A_0(k)A_0(k') - kA_0(k')A_0(k+k') - k'A_0(k)A_0(k+k')$$

$$A_2(k, 0) = -k \int_{-\infty}^{\infty} B_1(k, k', 0) dk'$$

$$\begin{aligned} C_2(k, k', k'', 0) = & -k \{ A_0(k')B_1(k', -k-k'') + A_0(k'')B_1(k', -k-k') + A_0(k+k+k'')B_1(k, k'') \} \\ & -k' \{ A_0(k)B_1(k', -k-k'') + A_0(k'')B_1(k, -k-k'') + A_0(k+k+k'')B_1(k, k'') \} \\ & -k'' \{ A_0(k)B_1(k', -k-k'') + A_0(k')B_1(k, -k-k'') + A_0(k+k+k'')B_1(k, k') \} \\ & + (k+k+k'') \{ A_0(k)B_1(k', k'') + A_0(k')B_1(k, k'') + A_0(k'')B_1(k, k') \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3(k, k', 0) = & (k+k') \{ A_0(k)A_2(k') + A_0(k')A_2(k) \} \\ & -k \{ A_0(k')A_2(k+k') + A_0(k+k')A_2(k') \} \\ & -k' \{ A_0(k)A_2(k+k') + A_0(k+k')A_2(k) \} \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} k'' \{ C_2(k, k', k'', 0) + C_2(k-k'', k', k'', 0) + C_2(k, k'-k'', k'', 0) \} dk'' \end{aligned}$$

$$A_4(k, 0) = -k \int_{-\infty}^{\infty} B_3(k, k', 0) dk'$$

以上より $A_2(k, 0)$, $A_4(k, 0)$ を求めると

$$A_2(k, 0) = -2k^2 A_0(k) \int_{-\infty}^{\infty} A_0(k') dk' + k^2 \int_{-\infty}^{\infty} A_0(k') A_0(k+k') dk' \quad (15)$$

$$A_4(k, 0) = -k \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & (k+k') \{ A_0(k)A_2(k') + A_0(k')A_2(k) \} \\ & -k \{ A_0(k')A_2(k+k') + A_0(k+k')A_2(k') \} \\ & -k' \{ A_0(k)A_2(k+k') + A_0(k+k')A_2(k) \} \end{aligned} \right\} dk' \quad \textcircled{A}$$

$$-k \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k'' \{ C_2(k, k', k'', 0) + C_2(k-k'', k', k'', 0) + C_2(k, k'-k'', k'', 0) \} dk'' \right\} dk' \quad \textcircled{B}$$

$$\begin{aligned}
&= 4k^4 A_0(k) \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(k') A_0(k'') dk' dk'' \\
&\quad - \iint_{-\infty}^{\infty} (4k^4 + 4k'k^3 + 4k'^2k^2) A_0(k') A_0(k'') A_0(k+k') dk' dk'' \\
&\quad + \iint_{-\infty}^{\infty} (2k^4 + 4k'k^3 + 2k'^2k^2) A_0(k') A_0(k'') A_0(k+k'+k'') dk' dk'' \\
&\quad + 8k^4 A_0(k) \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(k') A_0(k'') dk' dk'' \\
&\quad - \iint_{-\infty}^{\infty} (4k^4 - 10k'k^3 + 2k'^2k^2 + 4k'^3k) A_0(k') A_0(k'') A_0(k+k') dk' dk'' \\
&\quad + \iint_{-\infty}^{\infty} (6k^4 + 10k'k^3 + 4k'k''k^2) A_0(k') A_0(k'') A_0(k+k'+k'') dk' dk'' \\
&= 12k^4 A_0(k) \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(k') A_0(k'') dk' dk'' \\
&\quad + \iint_{-\infty}^{\infty} (-8k^4 + 6k'k^3 - 6k'^2k^2 - 4k'^3k) A_0(k') A_0(k'') A_0(k+k') dk' dk'' \\
&\quad + \iint_{-\infty}^{\infty} (8k^4 + 14k'k^3 + 2k'^2k^2 + 4k'k''k^2) A_0(k') A_0(k'') A_0(k+k'+k'') dk' dk''
\end{aligned} \tag{16}$$

以上で求めた $A_2(k, 0)$, $A_4(k, 0)$ によって $A(k, t)$ は次のように時間 t で展開できる。

$$A(k, t) = A_0(k) + \frac{t^2}{2!} A_2(k, 0) + \frac{t^4}{4!} A_4(k, 0) + \dots \tag{17}$$

(16)式の前半で、④の部分は $C=0$ とおいた(準正規分布仮定)場合に
出る項で、⑤の部分は $C \neq 0$ による附加項である。

$A(k, t)$ の時間 t の展開で、 t^2 までとるときは $C=0$ でも exact,
 t^4 までとるときは $C \neq 0$ とすれば exact である。

§5 初期エネルギー・スペクトルの例.

指数函数型

エネルギー・スペクトルの初期分布を次のようにとる.

$$A_0(k) = a e^{-x^2} \quad x = \frac{k}{k_0}, \quad k_0: \text{const}, \quad a: \text{const}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{これに対応する相関函数は } f(r) = e^{-\frac{r^2}{4}} \quad y = k_0 r \\ f(r) = \frac{u(x)u(x+r)}{u^2} \end{array} \right)$$

(15)(16)式に $A_0(k)$ を代入.

$$\frac{A_2(k, 0)}{k_0^3 a^2} = x^2 \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} - 2\sqrt{\pi} e^{-x^2} \right) \quad (18)$$

$$\frac{A_4(k, 0)}{k_0^6 a^3} = 4\pi x^4 e^{-x^2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} (x^2 + 3x^4) e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\sqrt{3}\pi}{27} (6x^2 + 8x^4) e^{-\frac{x^2}{3}} \quad \textcircled{A}$$

$$+ 8\pi x^4 e^{-x^2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} (x^2 - 9x^4) e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\sqrt{3}\pi}{27} (-6x^2 + 28x^4) e^{-\frac{x^2}{3}} \quad \textcircled{B}$$

$$= x^4 \left(12\pi e^{-x^2} - 6\sqrt{2}\pi e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} e^{-\frac{x^2}{3}} \right) \quad (19)$$

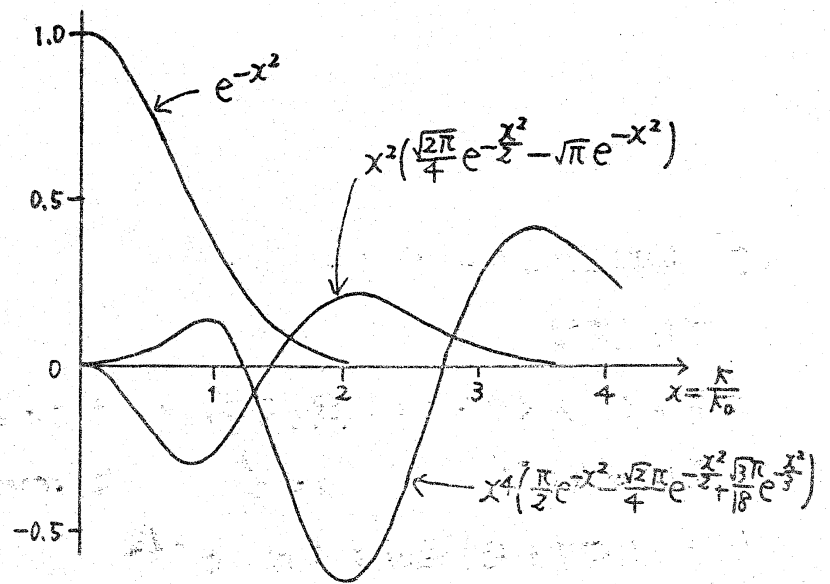
(17), (18), (19) 式から,

$$\begin{aligned} \frac{A(k, t)}{a} &= e^{-x^2} + (k_0^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} t)^2 x^2 \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} e^{-\frac{x^2}{2}} - \sqrt{\pi} e^{-x^2} \right) \\ &+ (k_0^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} t)^4 x^4 \left(\frac{\pi}{2} e^{-x^2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18} e^{-\frac{x^2}{3}} \right) + \dots \quad (20) \end{aligned}$$

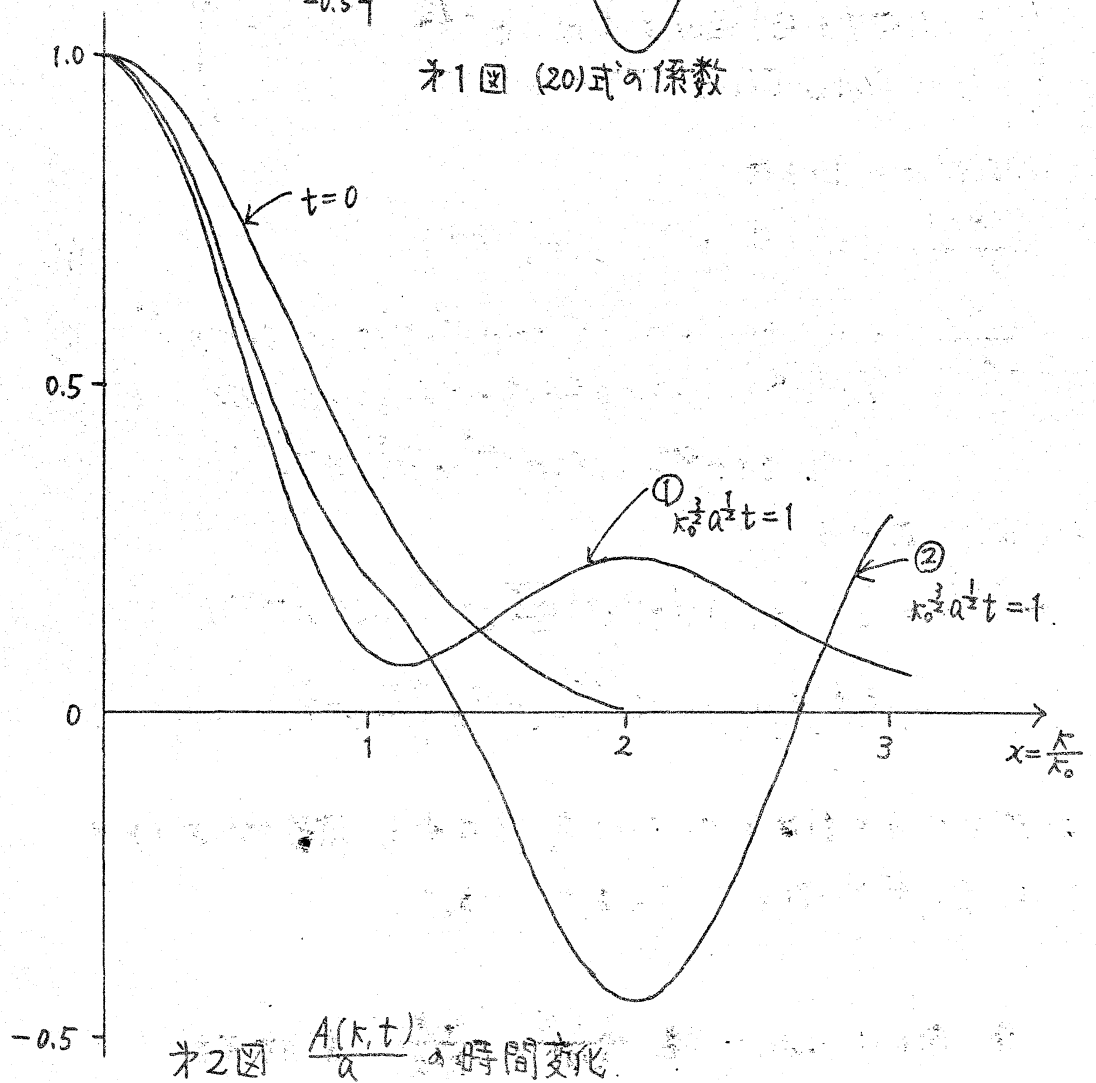
(20)式から $A(k, t)$ は x が小さいとき, すなわち, 波数が小さいとき
には, 良い展開になっていることがわかる.

オ1図には, (20)式の係数 $\frac{A_2(k, 0)}{k_0^3 a^2}$, $\frac{A_4(k, 0)}{k_0^6 a^3}$ を図示する.

オ2図には, $\frac{A(k, t)}{a}$ の時間変化を図示する.



第1図 (20)式の係数



第2図 $\frac{A(k, t)}{a}$ の時間変化

第2図で、①②と書いた曲線は、時刻 $t = (k_0^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}})^{-1}$ での、 $\frac{A(k,t)}{a}$ を表わす。曲線①は(20)式で t^2 の項までとった場合であり、曲線②は、 t^4 までとった場合を示す。 t^4 までとった曲線②は、時間的には κ が大きい領域で、曲線①よりもはやく、負のエネルギー・スペクトルを示す。しかし、展開(20)は κ が大きいところでは使えるので、 κ が小さい(波数が小さい)領域だけについて第2図を見ると、曲線②の方が、時間的にゆっくり減少しているので、負のエネルギー・スペクトルが遅く出現すると思われる。

文 献

- [1] Hopf, E, Statistical hydrodynamics and functional calculus.
J. Rat. Mech. Anal. 1 (1952) 87
- [2] Reid, W.H, On the transfer of energy in Burgers' model of turbulence. Appl. Sci. Res. A6 (1956) 85