

確率微分方程式の解の exact representation.

九大 エ 岡田 寛

確率微分方程式の解も、与えられたデータ (ベラトル場とブラウン運動またはセミマルティンゲール) の関数として具体的に表わすことは、応用上重要であるのみでなく理論的にも興味ある問題である。この報告では、解の表現を微分幾何の方法と確率微分方程式に絡み入れて論じたい。前半の1〜3節では準備として解の分解の問題及び解の微分同型の問題と論ずる。なお常微分方程式について述べる結果があるが、これについては Kno-Tsai-Chen [3] を参照したい。

§1. 解の例と微分同型の問題

M をパラコンパクト、連結な (必ず多様体で、次元は d とする) M に一重 Δ を付加した空間と $\hat{M} = M \cup \Delta$ とかく。 M がコンパクトのときには Δ は孤立点であり、コンパクトでないときは $\hat{M}$ に一重コンパクト化の位相が入っているものとする。

多様体 M 上に与えられた r 個の (α-ベクトル場 $X_1, \dots, X_r$ とある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ 上に与えられた r 個の連続なセミマルティゲール $M_t^1, \dots, M_t^r$ をもとにした確率微分方程式 (SDE)

$$(1.1) \quad d\xi_t = \sum_{j=1}^r X_j(\xi_t) \circ dM_t^j$$

を考へる. M 上の値をとる, $\mathcal{F}_t$ に適合した連続な道をもつ確率過程 ξ_t が, $\forall f \in C^\infty(M)$ ($= M$ 上の C^∞ 関数の全体) に対し

$$(1.2) \quad f(\xi_t) = f(\xi_0) + \sum_{j=1}^r \int_0^t X_j f(\xi_s) \circ dM_s^j, \quad t < \tau$$

を満たすとき, ξ_t を SDE (1.1) の解という. ただし τ は Δ に到達する最初の時間 (life time) であり, $\circ$ は Stratonovich 積分をあらわす. また $t \geq \tau$ では $\xi_t = \Delta$ を仮定する. 初期値 ξ_0 が M 上の一点 α であるとき, 解を $\xi_t(\alpha)$ であらわす.

明らかに解 $\xi_t(\alpha)$ は与えられたデータ $X_1, \dots, X_r, M_t^1, \dots, M_t^r$ 及び初期値 α の汎関数である. この汎関数が具体的に書き表わされる例をあげる.

例. まず $r=1$ のとき. $X_1 = X, M_t^1 = M_t$ とかく. 点 $\alpha \in M$ から出発するベクトル場 X の積分曲線を $Exp_t X(\alpha)$ であらわす. この定義される t の最大区間を $(X_1(\alpha), X_2(\alpha))$ とすると,

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \xi_t(\alpha) &\equiv Exp_{M_t} X(\alpha), \quad t < \tau \equiv \inf\{t > 0 \mid M_t \in (X_1(\alpha), X_2(\alpha))\} \\ &\equiv \Delta, \quad t \geq \tau \end{aligned}$$

は方程式 $d\xi_t = X(\xi_t) \circ dM_t$ の解である.

次に与えられた r 個のベクトル場 $X_1, \dots, X_r$ は可換, すなわち $X_i X_j = X_j X_i$ ($\forall i, j$) を満たすとする. このとき

$$(1.4) \quad \tilde{\gamma}_t(x) = \exp M_t^1 X_1 \circ \dots \circ \exp M_t^r X_r(x), \quad t < T \equiv T_1 \wedge \dots \wedge T_r$$

($\circ$ は合成写像. T_i は $\exp M_t^i X_i$ の life time) は (1.1) の解.

上の例でベクトル場 $X_1, \dots, X_r$ が全て定備 (即ち $X_i(x) = -\infty$, $X_i(x) = \infty$ $\forall x \in M$) ならば $T(x) = \infty$ となる. 更に (t, ω) を固定して, $\tilde{\gamma}_t$ を M 上の写像とみれば微分同型になっていることが, 表現 (1.4) からただちにわかる. しかし $X_1, \dots, X_r$ が可換でないときは, 解はこのように簡単には書けないので, $\tilde{\gamma}_t$ が微分同型であることを示すのは容易ではない. まず特別な場合にこれを示そう.

定理 1.1. $X_1, \dots, X_r$ を定備なベクトル場とする. これらから生成される Lie 環 $\mathfrak{L}$ が有限次元ならば $\tilde{\gamma}_t$ は微分同型である.

証明. 上の仮定から $\mathfrak{L}$ の各元は定備であり, 更に次の Lie 群 G の存在が知られている. (Palais [4]).

(i) G は M の Lie 変換群, 即ち $G \times M \rightarrow M$ の C^∞ -写像 φ で
(a) $\varphi(g, \cdot): M \rightarrow M$ は微分同型, (b) $\varphi(e, x) = x$, $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$. を満たすものがある.

(ii) $g \rightarrow \varphi(g, \cdot)$ は G から $G(M) (= M$ 上の微分同型のなす群) の中への isomorphism.

(iii) $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{G}$ の Lie 環とすると, $\forall \hat{X} \in \mathfrak{g}$ に対し L の元 X が存在して

$$\hat{X}(f \circ \varphi)(q, x) = Xf \circ \varphi(q, x), \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

が成立する. (左辺の $\hat{X}$ は x を固定して q のみに作用させる).

今 $X_1, \dots, X_r$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_r$ をとり G 上の確率微分方程式

$$d\xi_t = \sum_{j=1}^r \hat{X}_j(\xi_t) \circ dM_t^j$$

を考へる. 解 $\xi_t(q)$ は conservative であることが知られている. (Itô [37]). ここで $\xi_t(x) = \varphi(\xi_t(e), x)$ とおくと, ξ_t は SDE (1.1) の解である. 実際 $f \in C^\infty(M)$ に対し

$$\begin{aligned} df(\xi_t) &= d(f \circ \varphi)(\xi_t(e), x) = \sum_j \hat{X}_j(f \circ \varphi)(\xi_t(e), x) \circ dM_t^j \\ &= \sum_j X_j f(\xi_t(x)) \circ dM_t^j. \end{aligned}$$

明らかに ξ_t は微分同型である. (証明終)

Lie 環 $\mathfrak{L}$ が有限次元でなければ, $X_1, \dots, X_r$ が定備であるとしても L の元は必ずしも定備にはならない. (例: $\mathbb{R}^2$ で $X = y \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial}{\partial y}$). したがって解は必ずしも conservative にならず, 一般に ξ_t が微分同型になることは期待出来ない. しかし局所微分同型になることを示そう. まず解 ξ_t の滑らかさについて次の定理が知られている.

定理 1.2. (Gihman-Skorohod [6]). (t, ω) を固定すると, ξ_t は $\mathcal{Q}_t = \{x \mid z(x, \omega) > t\}$ から M の中への C^∞ 写像である.

次に $\xi_t(\omega)$ の Jacobi 行列を考へる. 再び (t, ω) を固定し, $\xi_t(\omega)$ の近傍の局所座標 $z = (x^1, \dots, x^d)$, $\xi_t(\omega)$ の近傍の局所座標 $y = (y^1, \dots, y^d)$ とする. $\xi_t^i = y^i(\xi_t(\omega))$ とおき, Jacobi 行列

$$\Phi_t = \left(\frac{\partial \xi_t^i(\omega)}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,\dots,d}$$

を考へる.

命題 1.3. (Ikeda-Watanabe [17]). Φ_t は正則行列である.

証明. まず $M = \mathbb{R}^d$ で $(x^1, \dots, x^d) = (y^1, \dots, y^d)$ の場合を調へる.

この場合 X_j はこの座標を用いて $X_j = \sum_i X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ と表わされ, $\xi_t = (\xi_t^1, \dots, \xi_t^d)$ は

$$d\xi_t^i = \sum_k X_k^i(\xi_t) \circ dM_t^k$$

を満たす. 之に $\frac{\partial}{\partial x^j}$ を作用させる

$$d \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^j} = \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial x^l} X_k^i(\xi_t) \frac{\partial \xi_t^l}{\partial x^j} \circ dM_t^k.$$

故に Φ_t は次の行列微分方程式を満たす.

$$d\Phi_t = \sum_k \left(\frac{\partial X_k^i}{\partial x^j} \right) \Phi_t \circ dM_t^k, \quad \Phi_0 = \text{単位行列}$$

之の adjoint 方程式

$$d\Phi_t = - \sum_k \Phi_t \left(\frac{\partial X_k^i}{\partial x^j} \right) \circ dM_t^k$$

をとると $d(\Phi_t \Phi_t) = 0$. ゆゑに $\Phi_t \Phi_t = \text{単位行列}$ となり,

Φ_t は逆行列をもつことがわかる.

次に多様体の場合. (t, ω) を固定し, 道 $\xi_s(\omega)$, $0 \leq s \leq t$ に沿ふ座標近傍 $U_1, \dots, U_n$ を

$$(\xi_s(x), \frac{k-1}{n}t \leq s \leq \frac{k}{n}t) \subset O_k, \quad k=1, \dots, n$$

と 4.2.2 のようにする. 今 $s = \frac{k-1}{n}t$ で x を通る解 $\xi_s^k(x)$

とかくと

$$\xi_t(x) = \xi_t^n \circ \xi_{\frac{n-1}{n}t}^{n-1} \circ \dots \circ \xi_{\frac{1}{n}t}^1(x).$$

$\xi_{\frac{k}{n}t}^k$ の Jacobi 行列を $\Phi_{\frac{k}{n}t}^k$ とすると

$$\Phi_t = \Phi_t^n \dots \Phi_{\frac{1}{n}t}^1$$

が成立する. 各 Φ_t^i は正則行列だから, Φ_t は正則行列である.

系. ξ_t は局所微分同型である.

§2. 解の分解

多様体 M 上の点 x の接空間を $T_x(M)$ とかく. 今 $\varphi: M \rightarrow M$ の C^∞ 写像とし, その定義域を $\mathcal{Q}$ とする. $x \in \mathcal{Q}$ に対し線形写像 $\varphi_{*,x}: T_x(M) \rightarrow T_{\varphi(x)}(M)$ を $\varphi_{*,x} X_x f = X_x(f \circ \varphi)$ (ただし $X_x \in T_x(M)$, $f \in C^\infty(M)$) によって定義し, φ の微分という.

φ の Jacobi 行列が任意で正則ならば $\varphi_{*,x}$ は isomorphism である. このとき M 上のベクトル場 X に対し新しい $\mathcal{Q}$ 上のベクトル場 $(\varphi)_*^{-1}(X)$ を

$$(\varphi)_*^{-1}(X)_x = (\varphi)_{*,\varphi(x)}^{-1} X_{\varphi(x)}$$

によって定義する. 明らかに

$$(\varphi)_*^{-1}(X)(f \circ \varphi)(x) = X f(\varphi(x))$$

が成立する.

$\tilde{x}_t(\omega)$ を SDE (1.1) の解とし, $t(\omega)$ をその last time とする.

(t, ω) を固定し $\mathcal{A}_t = \{x \mid t(\omega) > t\}$ とおく. $\tilde{x}_t$ は局所微分同型だから, イタトル場 X に対し $(\tilde{x}_t)_*^{-1}(X)$ が $\mathcal{A}_t$ 上で定義される. これは q_t に適合した, イタトル場の値をとる確率過程である. さて $(X_1, \dots, X_r, M_1^1, \dots, M_r^r)$ とは別に S 個のイタトル場 $\{Y_1, \dots, Y_s\}$ と S 個の連続なセミマルティンガール $N_1^1, \dots, N_r^s$ が与えられているとする. これと $\tilde{x}_t$ をもとにして確率微分方程式

$$(2.1) \quad dq_t = \sum_{j=1}^s (\tilde{x}_t)_*^{-1}(Y_j) \circ dM_t^j$$

を考える. 解 q_t は高々 $\tilde{x}_t$ の last time t まで定義可能である. したがって q_t の last time σ は t より小さい. 二つの解 $\tilde{x}_t$ と q_t の合成により得らる確率過程 $\tilde{x}_t \circ q_t$ のみたす確率微分方程式を求めよう.

定理 2.1. $\tilde{x}_t(\omega) \equiv \tilde{x}_t \circ q_t(\omega)$, $t < \sigma(\omega)$ は次の SDE の解.

$$(2.2) \quad d\tilde{x}_t = \sum_{j=1}^r X_j(\tilde{x}_t) \circ dM_t^j + \sum_{j=1}^s Y_j(\tilde{x}_t) \circ dN_t^j.$$

証明のために次の補題が必要である.

補題 2.2. (伊藤の公式) $F_t(\omega, \omega)$ は $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega$

$\rightarrow \mathbb{R}^1$ の可測写像であり, 次の性質をもつとする.

(i) (t, ω) を固定すれば, $F_t(\cdot)(\omega)$ は C^2 -写像

(ii) x を固定すれば, $F_t(\omega)$ は連続なセミマルティンガールで

$$F_t(x) = F_0(x) + \sum_j \int_0^t f_s^j(x) \circ dN_s^j$$

とあらわされる. ここに $N_t^1, \dots, N_t^m$ は連続 $\mathcal{F}$ セミマル 4 = $\mathcal{F}'$ -
 ルで, $f_s^j(\omega, \omega)$, $j=1, \dots, m$ は $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ の可測な関
 数で上記 (i) の性質を ^(4.5) 満足すると連続 $\mathcal{F}$ セミマル 4 = $\mathcal{F}'$ -
 ルになることを示す.

このとき連続 $\mathcal{F}$ セミマル 4 = $\mathcal{F}'$ -ル $M_T = (M_t^1, \dots, M_t^d)$ に対し
 次の公式が成立する.

$$(2.3) \quad F_t(M_t) = F_0(M_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F_s}{\partial x^i}(M_s) \circ dM_s^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t f_s^j(M_s) \cdot dN_s^j$$

(証明略)

定理 2.1 の証明. $f \in C^2(M)$ とし $F_t(x) = f \circ \xi_t(\omega)$ とおくと,

$$dF_t(x) = \sum_{j=1}^r X_j f(\xi_t(x)) \circ dM_t^j.$$

局所座標で書けば $\eta_t = (\eta_t^1, \dots, \eta_t^d)$ は連続 $\mathcal{F}$ セミマル 4 = $\mathcal{F}'$ -
 ルだから公式 (2.3) によると

$$dF_t(\eta_t(x)) = \sum_i \frac{\partial F_t}{\partial x^i}(\eta_t(x)) \circ d\eta_t^i + \sum_j X_j f(\xi_t \circ \eta_t(x)) \circ dM_t^j$$

右辺の第一項は

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \frac{\partial (f \circ \xi_t)}{\partial x^i}(\eta_t(x)) (\xi_t)_*^{-1}(Y_j)^i(\eta_t(x)) \circ dN_t^j \\ &= \sum_j (\xi_t)_*^{-1}(Y_j)^i (f \circ \xi_t)(\eta_t(x)) \circ dN_t^j \\ &= \sum_j Y_j f(\xi_t \circ \eta_t(x)) \circ dN_t^j. \end{aligned}$$

故に

$$df(\xi_t(x)) = \sum_j Y_j f(\xi_t(x)) \circ dN_t^j + \sum_i X_i f(\xi_t(x)) \circ dM_t^i$$

が成立する.

(証明終)

系. ヲクトル場 $X_1, \dots, X_r$ が $X_j = Y_j + Z_j$, $j=1, \dots, r$ と分解されているとする. η_t 及び ξ_t が

$$d\eta_t = \sum_j Y_j(\eta_t) \circ dM_t^j$$

$$d\xi_t = \sum_j (\eta_t)_*^{-1}(Z_j)(\xi_t) \circ dM_t^j$$

の解とすると, $\eta_t \circ \xi_t$ は元の方程式 (1.1) の解である.

注意. $Y_i Z_j = Z_j Y_i$, $i, j=1, \dots, r$ のとき $(\eta_t)_*^{-1}(Z_j) = Z_j$ となる. 故に (1.1) の解 ξ_t は $d\eta_t = \sum Y_j \circ dM_t^j$ と $d\xi_t = \sum Z_j \circ dM_t^j$ の解に分解される. §1 の例はこの場合である.

§3. 解の微分同型 II.

1 節で解 ξ_t は局所微分同型であることと示した. この節では ξ_t はその定義域 Q_t から M の中への 1 対 1 写像, したがって M の中への微分同型写像であることと示したい. この事実は $M_t^1, \dots, M_t^r$ が t の滑らかな関数なときは, 常微分方程式あるいは幾何で知られた事実である. 我々の場合にこのことと示す一つの方法は, $M_t^1, \dots, M_t^r$ を滑らかな関数で近似することである. これについては Ikeda-Watanabe [7] 又はこの報告書を参照したい. ここでは, 前節の解の分解の方法を使って証明しよう. まず

補題 3.1. ξ_t は (1.1) の解とし, $\eta_t \in$

$$(3.1) \quad d\eta_t = - \sum_{j=1}^r (\xi_t)_*^{-1}(X_j) \circ dM_t^j$$

の解とすれば

$$\xi_t \circ \eta_t(x) = x, \quad t < \tau(x)$$

$$\eta_t \circ \xi_t(x) = x, \quad t < \tau(x)$$

が成立する。ただし、 τ 及び η_t の life time である。

証明. $\xi_t \circ \eta_t(x) = x$ は定理 2.1 から明らか。この関係式より

$(\xi_t)_* (\eta_t)_*^{-1}$ は $T_x(M)$ 上の恒等写像。ゆえに $(\eta_t)_* = (\xi_t)_*^{-1}$ が成立する。今 $\hat{\xi}_t = \eta_t \circ \xi_t$ とおくと

$$d\hat{\xi}_t = -\sum (\xi_t)_*^{-1}(X_j) \circ dM_t^j + \sum (\eta_t)_*(X_j) \circ dM_t^j = 0$$

故に $\hat{\xi}_t(x) = x$ 。

定理 3.2. ξ_t による $\mathcal{D}_t$ の像を $\mathcal{E}_t$ とする。 ξ_t は $\mathcal{D}_t$ から $\mathcal{E}_t$ への微分同型である。

証明. $x, y \in \mathcal{D}_t$ が $\xi_t(x) = \xi_t(y)$ を満たすとするとき、

$\eta_t \circ \xi_t(x) = \eta_t \circ \xi_t(y)$ 。故に補題より $x = y$ 。即ち ξ_t は 1 対 1 写像である。 (証明終)

解 ξ_t が conservative ならば $\mathcal{D}_t = M$ である。更に (3.1) の解 η_t も conservative ならば $\mathcal{E}_t = M$ である。実際任意の $x \in M$ に対し $\xi_t(\eta_t(x)) = x$ であるから $x \in \mathcal{E}_t$ である。故に次の命題が成立する。

命題 3.3. ξ_t 及び (3.1) の解 η_t が共に conservative ならば ξ_t は M の微分同型である。

系. M がコンパクト多様体ならば、 ξ_t は微分同型である。

多様体 M がコンパクトでない場合は, ξ_t 及び η_t は必ずしも conservative にはならない. これらが conservative になる十分条件を求めよう.

補題 3.4. M をコンパクトでないリーマン多様体とし, ξ_t をその上の conservative な解とする. M 上のある点 x_0 と距離 d に対し

$$\sup_{d(x, x_0) \geq n} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{1 + d(x_0, \xi_t(x))^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

を満たすならば ξ_t は微分同型である.

証明. $K_n = \{x \mid d(x, x_0) \geq n\}$ とし, η_t が K_n の到達時間 σ_n とすると, $\sigma_n \uparrow \sigma$ ($= \eta_t$ の life time) かつ $\xi_{t_{\sigma_n}} \circ \eta_{t_{\sigma_n}}(x) = x$ が成立する. 今 $\sigma(x) < t$ とすれば $\eta_{t_{\sigma_n}}(x) \rightarrow \Delta$ ($n \rightarrow \infty$). ゆえに仮定より $\xi_{t_{\sigma_n}} \circ \eta_{t_{\sigma_n}}(x) \rightarrow \Delta$ となつて矛盾する. ゆえに $\sigma \geq t$ でなければならず, η_t は conservative である.

定理 3.5. M をユークリッド空間とする. ベクトル場 X_j の通常の座標による表現を $X_j = \sum X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ とする. 関数 X_j^i の各変数による偏微分が有界関数ならば, ξ_t は微分同型である.

証明. m を正の整数とし $f(x) = (1 + |x|^2)^{-m}$ とおく. 伊藤の公式により

$$f(\xi_t(x)) = f(x) + \sum_{j=1}^n \int_0^t X_j f(\xi_s) dM_s + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t X_i X_j f(\xi_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s$$

今 N_t^i 及び A_t^i をそれぞれ M_t^i の マルコフ過程及び有界変動過程の部分とする. ($M_t^i = N_t^i + A_t^i$). 必要ならば時間変換することにより, $t > s$ のとき $\langle N^i \rangle_t - \langle N^i \rangle_s \leq t - s$, $A_t^i - A_s^i \leq t - s$ をみたすと仮定してよい. 上式の両辺を $\pm$ 乗して平均をとって計算すれば次の不等式を得る

$$E[f(\xi_t(x))^2] \leq (r+2) \left\{ f(x)^2 + (r+1) \left(\int_0^t E[f(\xi_s(x))^2] ds \right) \right\}$$

ただし c は定数. Gronwall の不等式より

$$E[f(\xi_t(x))^2] \leq (r+2) e^{(r+2)(r+1)t} f(x)^2$$

を得る. また $|\frac{\partial}{\partial x_i} f| \leq c_{\text{const}} \cdot f(x)$ からも同様に

$$E\left[\left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_t(x))\right|^2\right] \leq c_{\text{const}} \cdot f(x)^2$$

が成立する.

x を極座標 (r, θ) と用いて表わすと,

$$\frac{\partial}{\partial r} (f \circ \xi_t(r, \theta)) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \cdot \frac{\partial \xi_t^i(r, \theta)}{\partial r}$$

より

$$\frac{\partial}{\partial r} \xi_t^i(r, \theta) = \sum_{j,k} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x^k} X_j^i(\xi_s) \frac{\partial \xi_s^k(r, \theta)}{\partial r} dM_s^j + \frac{\partial x^i}{\partial r}$$

であるが, $\frac{\partial}{\partial x^k} X_j^i$ は仮定によつて有界だから $E\left[\left|\frac{\partial}{\partial r} \xi_t^i(r, \theta)\right|^2\right]$ は (r, θ) に依り有界となる. 故に

$$\begin{aligned} E\left[\left|\frac{\partial}{\partial r} f \circ \xi_t(r, \theta)\right|^2\right] &\leq c_{\text{const}} \cdot \sum_i E\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\left|\frac{\partial \xi_t^i}{\partial r}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_{\text{const}} \cdot f(x) \end{aligned}$$

Doob の martingale 不等式を用いる

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\frac{\partial}{\partial r} f \circ \xi_t(r, \theta)\right|^2\right] \leq \text{const} \cdot f(\alpha)$$

が成立する。よって

$$\varphi_n(\theta) = \left(\int_n^\infty \sup_{0 \leq t \leq T} \left|\frac{\partial}{\partial r} f \circ \xi_t(r, \theta)\right|^2 + |f \circ \xi_t(r, \theta)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}$$

とある。上の評価より $E[\varphi_n(\theta)^2] < \infty$ ($\forall n$) となるから、 $\varphi_n(\theta) < \infty$

a.s. である。ゆえに $\varphi_n(\theta) \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成立する。とすると

$\varphi_n(\theta)$ は $\mathbb{R}$ の連続関数だから Dini の定理により $\varphi_n(\theta)$ は 0 に

一様収束する。故に Sobolev の不等式

$$\sup_{r \geq n} \sup_{0 \leq t \leq T} |f \circ \xi_t(r, \theta)| \leq 2\varphi_n(\theta)$$

に注意すれば

$$\sup_{\substack{r \geq n \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \sup_{0 \leq t \leq T} |f \circ \xi_t(r, \theta)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

が成立することからわかる。故に ξ_t は補題の条件を満たす。

4. 解の表現. 可解の場合.

この節では SDE (1.1) を定義するベクトル場 $X_1, \dots, X_r$ は全て完備でありかつそれらから生成される Lie 環 $\mathcal{L}$ は有限次元の可解 Lie 環とする。このとき Lie の定理によって、 $\mathcal{L}$ の ideal の減少列で

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_n > \mathcal{L}_{n-1} > \dots > \mathcal{L}_1 = \{0\}, \quad \dim \mathcal{L}_k = k$$

をみたすものがある。そこで $\mathcal{L}$ の基 $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ を、各 $k \leq n$ で $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ が $\mathcal{L}_k$ の基になるように選んでおく。

今 $Z \in \mathcal{L}$ に対し $Z \rightarrow \mathcal{L}$ の線形写像 $\text{ad}_Z \in \text{ad}_Z X = [Z, X]$ によって定義する。 $\mathcal{L}$ の基 $\{Y_i\}$ 上の様にとると、 $\text{ad}_Z Y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} Y_j$ 。行列 (c_{ij}) を ad_Z と書くことにする。 ad_Z は三角行列であって

$$\text{ad}_Z = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} * & & 0 \\ * & \ddots & \\ * & & * \end{matrix}}_k & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{n-k} \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}}_k & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{n-k} \end{array} \right) \begin{matrix} \{n-k\} \\ \{n-k\} \end{matrix}, \quad Z \in \mathcal{L}_k \text{ のとき}$$

と表わされる。 $\mathcal{L}$ が非零 Lie 環ならば、対角線上の要素は全て 0 である。

定理 4.1. $Y_1, \dots, Y_n$ を $\mathcal{L}$ の基とすると、SDE (4.1) の解 $\bar{X}_t$ は次の表理をもつ

$$\bar{X}_t(\omega) = \text{Exp } N_t^Y Y_n \circ \dots \circ \text{Exp } N_t^1 Y_1(\omega).$$

ただし $N_t^1, \dots, N_t^n$ は $M_t^1, \dots, M_t^n$ から次の初等的演算 (i) (ii) (iii) を有限回行って得られる連続なセミマル 4-ゲルである。

- (i), 一次結合, 積
- (ii) $M_t^1, \dots, M_t^n$ による Stratonovich 積分
- (iii) e^Z に代入.

特に $\mathcal{L}$ が nilpotent ならば $N_t^1, \dots, N_t^n$ は上の (i), (ii) の演算の 4 によって得られる。

証明. 方程式 (1.1) を定義するベクトル場 $X_1, \dots, X_r$ は全て

$Y_1, \dots, Y_n$ の一次結合であらわされる. 今 $X_j = \sum a_{jh} Y_h$ とする
と (1.1) は

$$d\tilde{S}_t = \sum Y_h \circ d\tilde{M}_t^h, \quad \tilde{M}_t^h = \sum_j a_{jh} M_t^j$$

と表わされる. 以下では簡単のため M_t^h と M_t と書くことにす
る. またベクトル記号 $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, $M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n)$ と使
ってこの方程式を $d\tilde{S}_t = (Y, \circ dM_t)$ と書く.

まず解 $\tilde{S}_t$ を次の二つの方程式の解に分解する.

$$dS_t^n = Y_n \circ dM_t^n$$

$$d\eta_t^n = \sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{S}_t)_*^{-1}(Y_j) \circ dM_t^j.$$

定理 2.1 のより $\tilde{S}_t = S_t^n \circ \eta_t^n$ が成り立つ. とする. 次の補
題により

$$d(\tilde{S}_t^n)_*^{-1}(Y_j) = \text{ad}_{Y_n}(S_t^n)_*^{-1}(Y_j) \circ dM_t^n$$

だから

$$(\tilde{S}_t^n)_*^{-1}(Y_j) = e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}} Y_j.$$

とあらわされる. 故に

$$(4.1) \quad d\eta_t^n = \sum_{j=1}^{n-1} e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}} Y_j \circ dM_t^j = (Y, \circ e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}} d\hat{M}_t)$$

となる. ところで ad_{Y_n} は ad_{Y_n} の転置行列であり, $\hat{M}_t =$
 $(M_t^1, \dots, M_t^{n-1}, 0)$. 行列 $e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}}$ は三角行列だから, ベクト
ル $M_t^{n-1} = \int_0^t e^{M_s^n \text{ad}_{Y_n}} \circ d\hat{M}_s$ の最初の成分は 0 である. 故に

$$d\eta_t^n = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j \circ dM_t^{n-1,j}$$

とかけると $M_t^{n-1} = (M_t^{n-1,1}, \dots, M_t^{n-1,n-1}, 0)$.

次に η_t^n を次の二つの方程式の解に分解する.

$$\begin{aligned} d\zeta_t^{n-1} &= Y_{n-1} \circ dM_t^{n-1, n-1} \\ d\eta_t^{n-1} &= \sum_{j=1}^{n-2} (\zeta_t^{n-1})_*^{-1}(Y_j) \circ dM_t^{n-1, j} \end{aligned}$$

より同じ理由で η_t^{n-1} はイタトル場 $Y_1, \dots, Y_{n-2}$ に属する SDE である.

$$d\eta_t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} Y_j \circ dM_t^{n-2, j}$$

とあらわされる. したがって $M_t^{n-2} = (M_t^{n-2, 1}, \dots, M_t^{n-2, n-2}, 0, 0)$ は

$$M_t^{n-2} = \int_0^t e^{M_s^{n-1, n-1}} \text{ad}_{Y_{n-1}} \circ d\hat{M}_s^{n-1}, \quad \hat{M}_t^{n-1} = (M_t^{n-1, 1}, \dots, M_t^{n-1, n-1}, 0, 0) \quad \text{に}$$

よって定義される連続なセミマル4-ゲールである. この論法をくり返せば

$$\begin{aligned} \xi_t^n &= \zeta_t^n \circ \zeta_t^{n-1} \circ \dots \circ \zeta_t^2 \circ \eta_t^2 \\ &= \text{Exp } M_t^n Y_n \circ \text{Exp } M_t^{n-1, n-1} Y_{n-1} \circ \dots \circ \text{Exp } M_t^{2, 2} Y_2 \circ \text{Exp } M_t^{2, 1} Y_1 \end{aligned}$$

となる. ここで $M_t^n, M_t^{n-1, n-1}, \dots, M_t^{2, 1}$ の定義をみれば, これは $M_t^1, \dots, M_t^n$ から (i) ~ (iii) の演算を有限回行って得られるセミマル4-ゲールであることは明らか.

また $e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}}$ の要素は M_t^n の多項式のみで指数関数は理山ゆえに, $M_t^{n-1, n-1}$ は (i), (ii) の演算の4によって得られる. $M_t^{n-2, n-2}$ についても同様である. 故に定理は証明された.

補題 4.2. ξ_t を (1.1) の解とし, X を任意のイタトル場とすると, イタトル場の値をとる確率過程 $X_t \equiv (\xi_t)_*^{-1}(X)$ は次の確率微分方程式を満たす.

$$dX_t = \sum_j [X_j, X_t] \circ dM_t^j = \sum_j \text{ad}_{X_j} X_t \circ dM_t^j.$$

(証明略).

文 献

- [1] N. Ikeda-S. Watanabe: Stochastic differential equations and diffusion processes. To appear
- [2] K. Ito: Brownian motions in a Lie group. Proc. Japan Acad. 8 (1950), 4-10.
- [3] Kuo-Tsai-chen: Decomposition of differential equations. Math. Annalen. 146 (1962), 263-278
- [4] R. S. Palais: A global formulation of the Lie theory of transformation groups. Mem. Amer. Math. Soc. No 22 (1957)
- [5] Y. Yamato: Stochastic differential equations and nilpotent Lie algebra. Z. W. 47 (1959), 213-229.
- [6] I. I. Gihman - A. V. Skorohod, Stochastic differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 1972.