

穴あきレンズ空間の R^4 への埋藏について

神戸大理 細川 藤次 (Fujitsugu Hosokawa)

神戸大理 鈴木 晋一 (Shin'ichi Suzuki)

3次元多様体であるレンズ空間が4次元ユークリッド空間 R^4 に埋藏できないことはすでに良く知られている。[3], [6] また、穴あきレンズ空間 $L(2n, q)_0$ は R^4 に埋藏できないが [1], 穴あきレンズ空間 $L(2n+1, q)_0$ は R^4 に埋藏することができることもすでに知られている [9]。ここで、穴あきレンズ空間 $L(p, q)_0$ は、レンズ空間 $L(p, q)$ から1点の近傍を除いたものである。

V を solid torus とし、 k を ∂V 上の (p, q) 型結び目とする。すなわち、 p, q は整数で、 m を ∂V 上の meridian, l を longitude とすると、 k は ∂V 上で $pl + qm$ にホモロークな単純閉曲線である。 k を attaching 1-sphere とする V の 2-handle を $h^2(p, q)$ とすると、穴あきレンズ空間 $L(p, q)_0$ は Heegaard 分解 $V \cup h^2(p, q)$ で表される。[7]

また、 $L(p, q)_0$ と $L(p', q')_0$ とが同相になるのは、 $p=p'$ で

$$q \equiv \pm q' \pmod{p} \text{ または } qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

が成立する ことである ことも良く知られている。

この論文では、 R^4 に埋藏された穴あきレンズ空間が、 R^4 中でどんな位置にあるかを調べることを目的とする。

ϕ を $L(p, q)_0 \equiv V \cup h^2(p, q)$ から R^4 への同相写像とする。
 $\phi(V)$ は R^4 の中の solid torus であるが、これは R^4 における ambient isotopy $\{\eta_u\}_{u \in I}$ によって、超平面 $R^3[0]$ の中の平凡な solid torus $V_0 = \eta_1(\phi(V))$ に移すことができる。

ここで、 R^4 を $R^3 \times [-\infty, \infty]$ と考え、 $R^3 \times (t)$ を $R^3[t]$ で表すことにする。

m_0 を ∂V_0 の meridian, l_0 を ∂V_0 の preferred longitude とする。
 つまり、 m_0 は V_0 の中で円板の境界となり、 l_0 は $R^3[0] - \text{Int } V$ で円板の境界となっていていゝとする。

このとき、 $\eta_1 \phi(m) = m_0$, $\eta_1 \phi(l) = l_0 + \alpha m_0$ (α : 整数) が一般に成り立つ。

このとき、2-handle $\eta_1 \phi h^2(p, q)$ の V_0 への attaching 1-sphere を k_0 とすると、 k_0 は ∂V_0 上の $(p, q + \alpha p)$ 型結び目となる。

すなわち、 $\eta_1 \phi L(p, q)_0$ は、 m_0, l_0 に関する Heegaard 分解 $V_0 \cup h^2(p, q + \alpha p)$ を持つことがわかる。

$h^2(p, q + \alpha p)$ を $D^2 \times [-1, 1]$ と考え、attaching 1-sphere k_0 は $D^2 \times 0$ の境界で、 $D^2 \times 0$ は $R^4 - \text{Int } V_0$ に proper に埋藏

し 2 いる円板となつて 2 いる。

$\eta\phi L(p, q)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p, q + \alpha p)$ が R^4 の中でどんな位置にあるかを調べるためには, z -handle $h^2(p, q + \alpha p)$ が, すなわち, $D^2 \times 0$ が R^4 の中でどんな位置にあるかを調べればよいことがわかる。

定理 1. 穴あきレンズ空間 $L(p, q)_0$ が R^4 に埋藏されているとすると、埋藏写像 ϕ は次の条件を満たすようにすることができる。

- (1) $\phi L(p, q)_0$ は Heegaard 分解 $V_0 \cup h^2(p + q + \alpha p)$ を持つ。
 V_0 は $R^3[0]$ の平凡な solid torus で, z -handle $h^2(p, q + \alpha p)$ の attaching 1-sphere k_0 は ∂V_0 上の $p l_0 + (q + \alpha p) m_0$ にホモトープな単純閉曲線である。

ここで, l_0, m_0 は ∂V_0 上の、それぞれ preferred longitude, meridian である。

- (2) z -handle $h^2(p, q + \alpha p)$ を $D^2 \times [-1, 1]$ とすると,
 $k_0 = \partial D^2 \times 0$ で, $D^2 \times 0$ は $R^4 - \text{Int } V$ の中の locally flat な円板で、次の条件を満たしている。

- maximal bands $\subset R^3[2]$
- minimal bands $\subset R^3[-1] \cup R^3[1]$
- saddle bands $\subset R^3 \times (1, 2)$
- $(D^2 \times 0) \cap R^3[0] = k_0 \cup O_1 \cup \dots \cup O_\mu$

$\gamma = \bar{z}$, $O_i (i=1, 2, \dots, \mu)$ は meridian m_0 を V_0 の外へたしすぎた単純閉曲線 $\bar{z}$, $O_1 \cup \dots \cup O_\mu$ は平凡なからみ目になっている。図(1)

$$(3) (D^2 \times [-1, 1]) \cap R^3[t] = ((D^2 \times 0) \cap R^3[t]) \times [-1, 1], (-\infty < t < \infty)$$

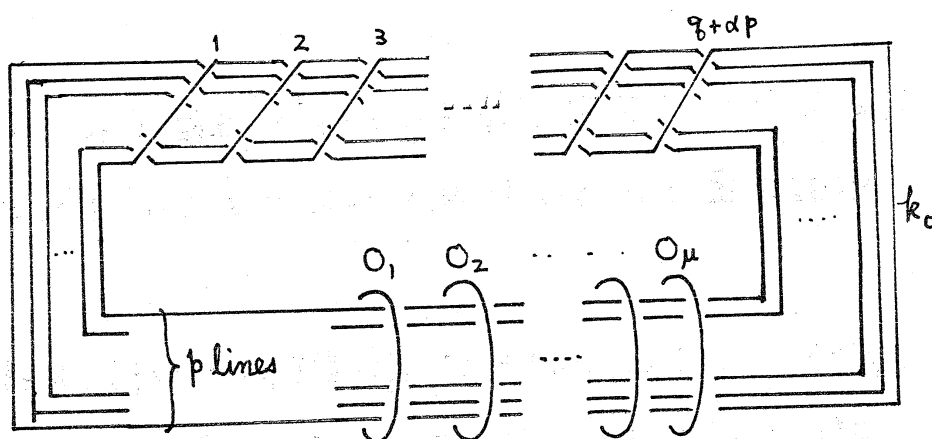


図 1 からみ目 $l(p, q+dp, \mu)$

定理 1 の証明は省略する。

R^4 の中に埋藏されている穴あきレンズ空間 $L(p, q+dp)_0$ が定理 1 の条件を満たしているとき, $L(p, q+dp)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p, q+dp)$ は R^4 中の標準的位置にある、という=とにする。また, 定理 1 に出てくるからみ目 $k_0 \cup O_1 \cup \dots \cup O_\mu$ を $l(p, q+dp; \mu)$ で表し, $L(p, q+dp)_0$ のからみ目、という=とにする。

$l(p, q+dp; \mu)$ は $R^3 \times [0, \infty)$ で locally flat な穴あき円板 $(D^2 \times 0) \cap R^3 \times [0, \infty)$ の境界となっている。つまり, a slice link in the weak sense [2] になっている。

さて, $L(p, q)_0 \in \mathbb{R}^3$ で標準的位置にある穴あるレンズ空間
 $\tilde{Z}$, Heegaard 分解 $V_0 \cup h^2(p, q)$ を持つ, $h^2(p, q) \cong D^2 \times [-1, 1]$
~~である~~, $L(p, q)_0$ のからみ目 $l(p, q; \mu) = k_0 \cup O_1 \cup \dots \cup O_\mu$
 $= \partial((D^2 \times 0) \cap \mathbb{R}^3[0, \infty))$ とする。

$$l^+(p, q; \mu) = k_0^+ \cup O_1^+ \cup \dots \cup O_\mu^+ = \partial((D^2 \times 1) \cap \mathbb{R}^3[0, \infty))$$

$$l^-(p, q; \mu) = k_0^- \cup O_1^- \cup \dots \cup O_\mu^- = \partial((D^2 \times -1) \cap \mathbb{R}^3[0, \infty))$$

とすると, これは $\mathbb{R}^3[0]$ 内のからみ目であり,

$$\text{link}(l^+(p, q; \mu), l^-(p, q; \mu)) = 0$$

が成立している。また, $O^+ = O_1^+ \cup \dots \cup O_\mu^+$, $O^- = O_1^- \cup \dots \cup O_\mu^-$ は
それぞれ, $\mathbb{R}^3(-\infty, 0]$ 内で, μ の円板の境界で, 互いに
交っていないから,

$$\text{link}(O^+, O^-) = 0$$

また, k_0^+ , k_0^- は, それぞれ (p, q) 型の torus 結び目で,
 O_i^+ , O_i^- は図1の O_i と同じ位置にあるから,

$$\text{link}(k_0^+, k_0^-) = \varepsilon p q \quad (|\varepsilon| = 1)$$

$$\text{link}(k_0^+, O_i^-) = \text{link}(O_i^+, k_0^-) = \varepsilon_i p \quad (|\varepsilon_i| = 1, i = 1, \dots, \mu)$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} & \text{link}(l^+(p, q; \mu), l^-(p, q; \mu)) \\ &= \text{link}(k_0^+, k_0^-) + \sum_{i=1}^{\mu} (\text{link}(k_0^+, O_i^-) + \text{link}(O_i^+, k_0^-)) + \text{link}(O^+, O^-) \\ &= \varepsilon p q + 2p \sum_{i=1}^{\mu} \varepsilon_i = p \left(\varepsilon q + 2 \sum_{i=1}^{\mu} \varepsilon_i \right) = 0 \end{aligned}$$

となる。このことから次の定理が成立する。

定理2 $L(p, q)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p, q)$ が R^4 で標準的位置にある穴
 あきレンズ空間で, $L(p, q)_0$ のかきみ目が $l(p, q; \mu)$
 $= k_0 \cup 0_1 \cup \dots \cup 0_\mu$ のとき, 次の (1), (2) が成立する。

(1) q は偶数である。

(2) $q = 2m$ とすると $\mu = |m| + 2d$, ($d \geq 0$) で

$$\text{link}(k_0, 0_i) = -p \quad (i = 1, \dots, |m| + d)$$

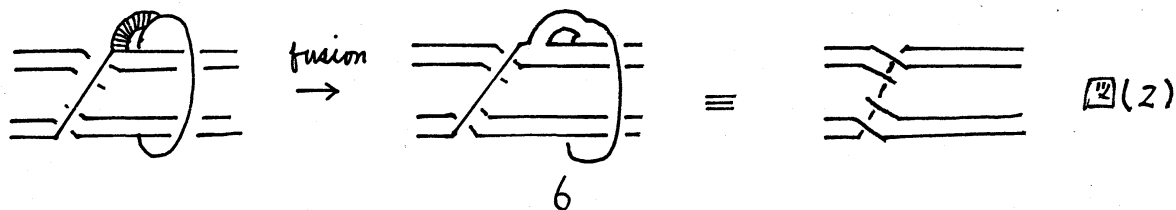
$$\text{link}(k_0, 0_i) = p \quad (i = |m| + d + 1, \dots, \mu)$$

この定理から, 次の系を得る。

系 穴あきレンズ空間 $L(2n, q)_0$ は R^4 に埋藏する こと は でき
 ない。

今迄の考察から, $L(p, q)_0$ が R^4 に埋藏される ^{標準的位置に} こと である ^{てい} から
 み目 $l(p, q; \mu)$ が a slice link in the weak sense になる こと と
 同値になる ことがわかる。

さて, 図2のような fusion により, 上を通る線と下を通る
 線にある こと ができる。という操作を考えると, $l(p, q; \mu)$
 が a slice link in the weak sense という こと と, $l(p, q + 2p; \mu + p)$
 が そうなる こと と 同値である ことが 容易にわかる。



このことから、次の定理を得る。

定理3 $L(p, q)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p, q)$ が R^4 で標準的位置にあるならば、 $L(p, q \pm 2p)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p, q \pm 2p)$ も標準的位置に実現することが可能である。

定理4, $2n+1, 2m$ がたがいになを整数のとき、

(1) $L(2n+1, 2m)_0 \equiv V_0 \cup h^2(2n+1, 2m)$ は R^4 の標準的位置に実現することができる。

(2) からみ目 $l(2n+1, 2m; |m|+2d)$ が a slice link in the weak sense となる整数 $d \geq 0$ が存在する。

そこで、次の問題が出てくる。

問題 どんな整数 d に対して $l(2n+1, 2m; |m|+2d)$ が a slice link in the weak sense となるか？

この問題がわかると、穴あきレンズ空間の境界となる2次元結び目のクラスがわかることになる。

しかし、一般的な解答は相当難しいようであるが、 $d=0$ のときにある程度その本質があるように思われる。

ここでは、 $d=0$ のとき、ある条件下で解けることがわかることを示す。定理の証明は論文[10]を参照してもらい、ここで考え方の大筋を示すことにする。

$l(2n+1, 2m; |m|)$ が a slice link in the weak sense ならば,
 $l(2n+1, 2m+2\alpha(2n+1); |m|+|\alpha(2n+1)|)$ もまたそうなることから,

$$-|2n+1| < 2m < |2n+1|$$

としよとく, また, torus 結の目の性質より

$$0 < 2m < |2n+1|$$

のときを考えると十分である。よって,

$$2n+1 = 2am \pm r, \quad a > 0, \quad 0 < r < m, \quad r \text{ と } 2m \text{ は素}$$

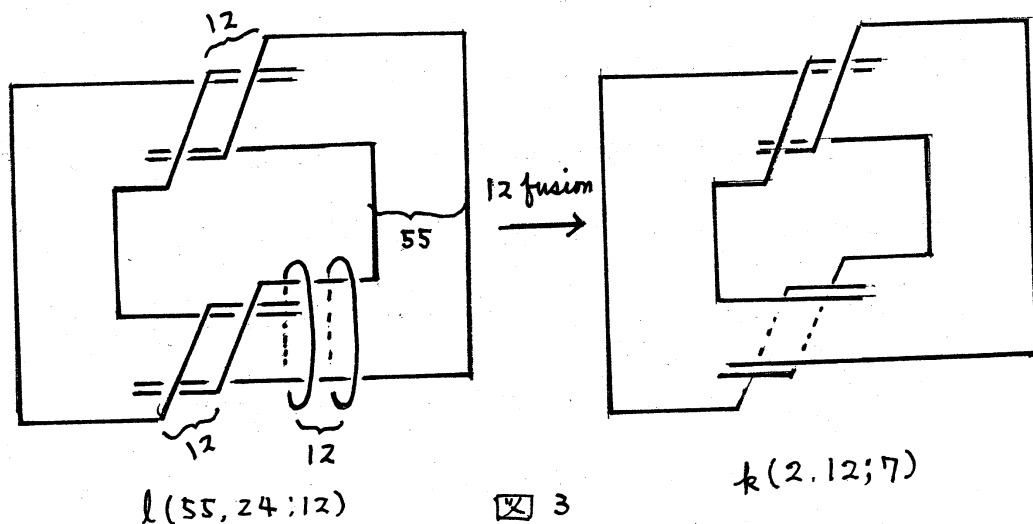
となる a, m, r を考えるとき, 次の定理が成り立つ。

定理 5, $m' \equiv m \pmod{r}$ かつ $r < m' < 2r$ とするとき,

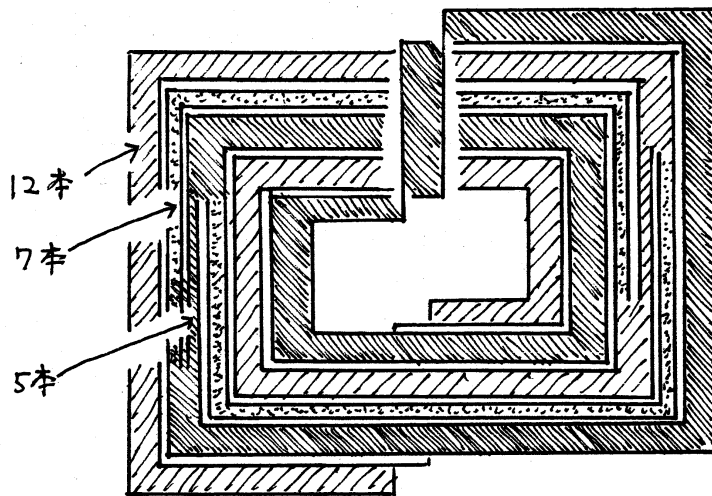
$$m' - r \equiv \pm 1 \pmod{(2r - m')}$$

が成り立つならば, $l(2am \pm r, 2m; m)$ は a slice link
in the weak sense である。

例. $a=2, m=12, r=7$ で $2n+1=2am+r$ の場合: $l(55, 24; 12)$



$l(55, 24; 12)$ に図2と同じ fusion を12回ほど = して図3の
 右の結び目 $k(2, 12, 7)$ にする。 $k(2, 12, 7)$ を図4の上のよう
 に上を通る線と下を通る線に分けて、図4の下のようにずら
 し、ねじれを調節して図5のようにする。



$k(2, 12, 7)$

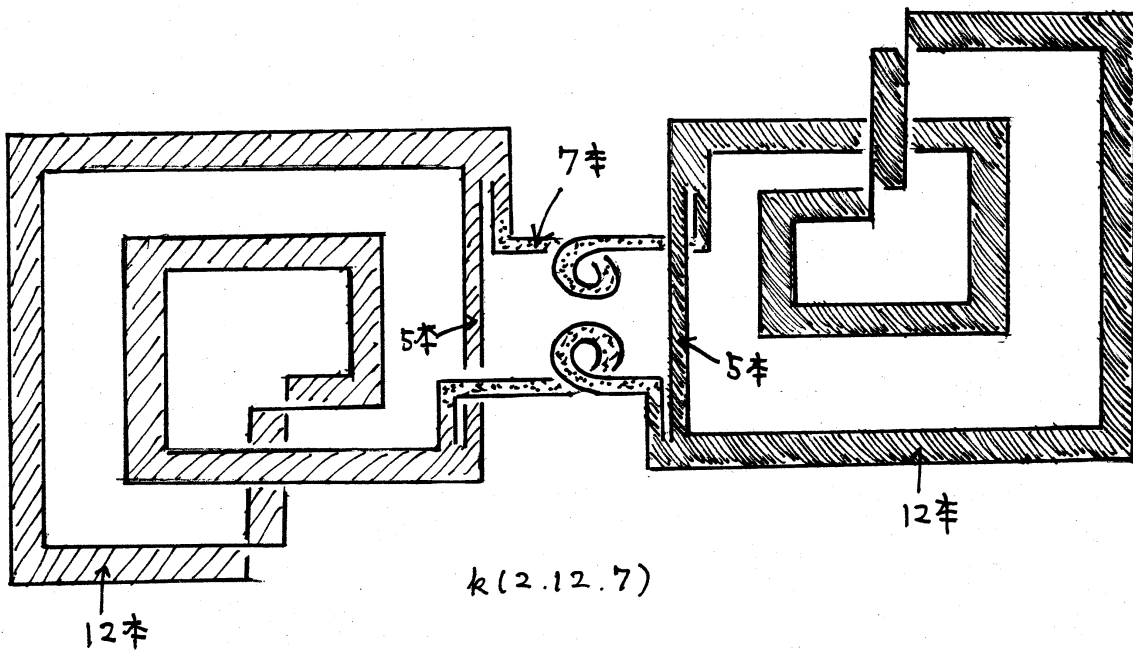


図 4

9

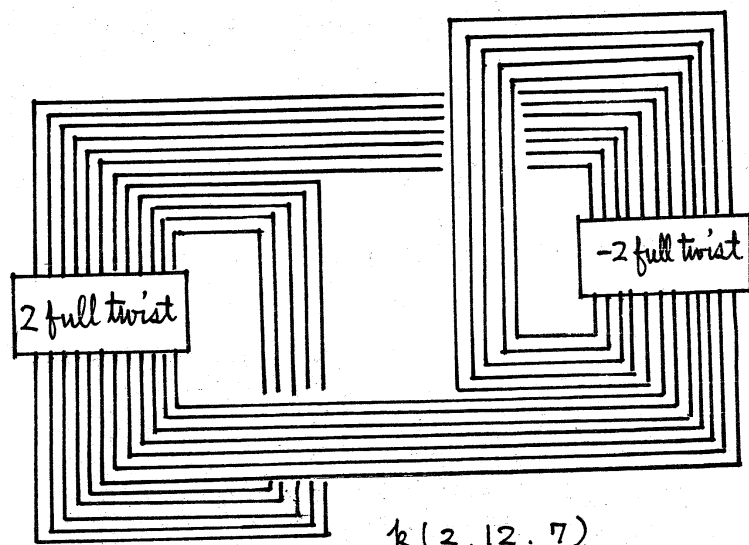

 $k(2, 12, 7)$

図 5

図5の真中に縦に通る左右5本ずつの線を ^{fission}~~fusion~~ band でつなぎ、~~fusion~~ fission をすることにより、左右の twist を解消するようにする。そこで、fission band のつなぎ方が問題となる。この場合は図6のようにつなぎ、fission する。

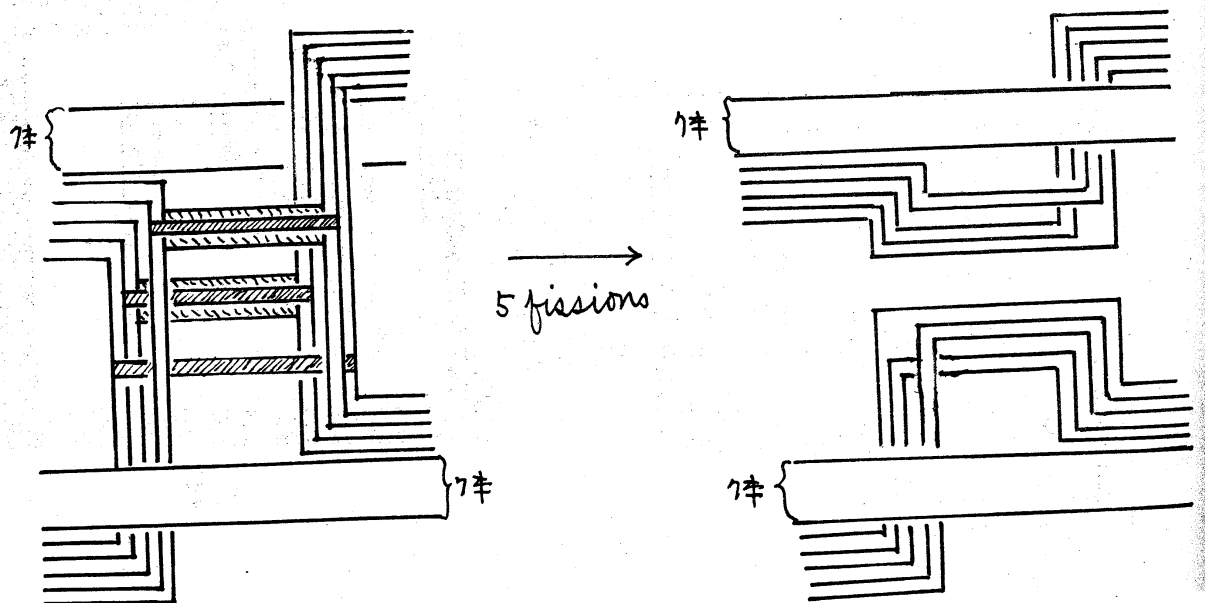


図 6

は 5 回の *fission* で components が 6 の からみ目になるが、そのうち 4 つの components は容易に分離し、図 7 の下の からみ目が残る。

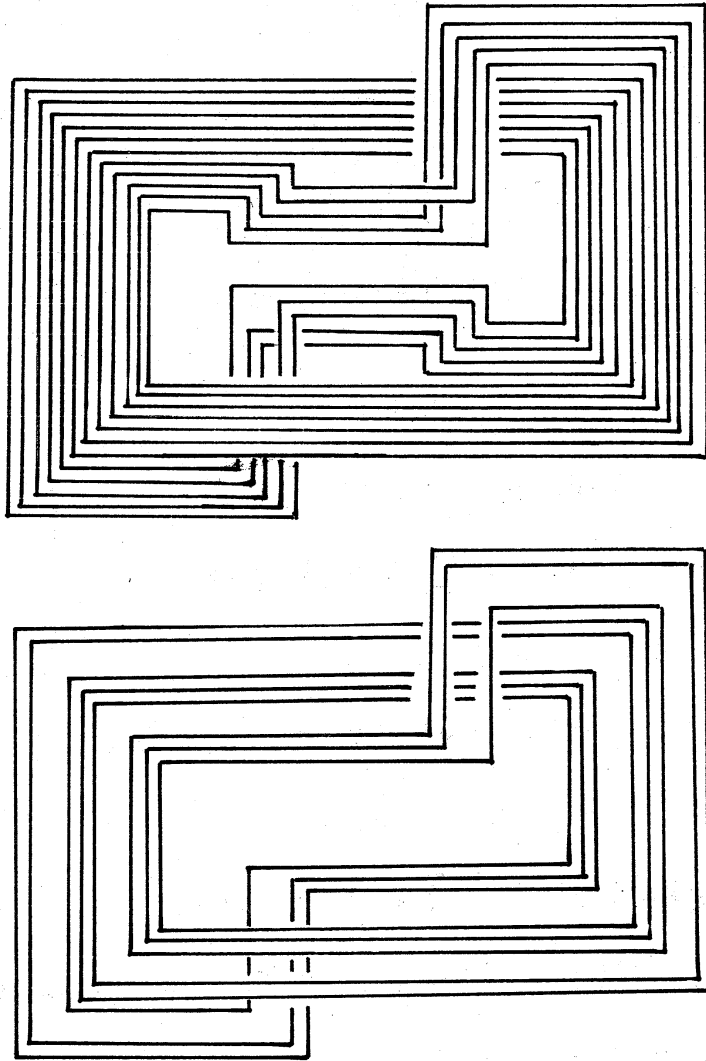
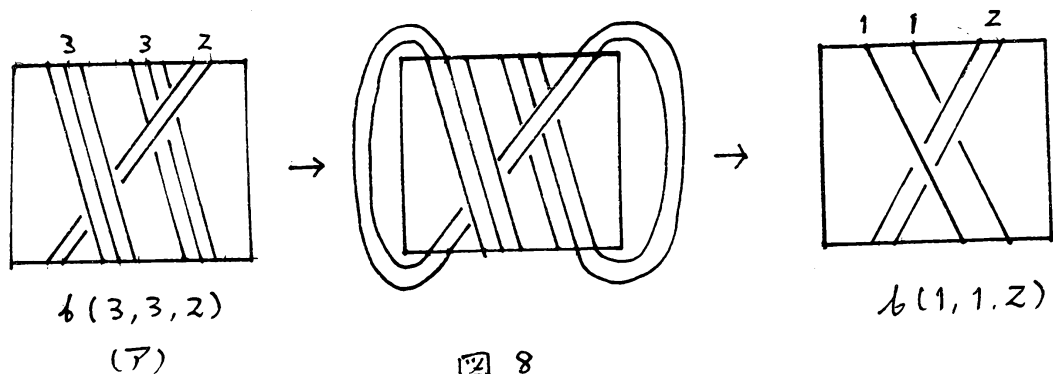


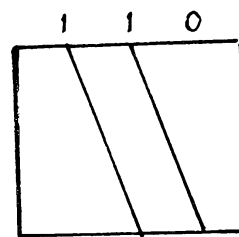
図 7

図 7 の下に残った からみ目が components が 2 の 平凡な からみ目になることがわかれば、 $k(2, 12, 7)$ が a slice knot になることがわかり、最初の $l(55, 24; 12)$ が a slice link in the weak sense であることが示されたことになる。

図7の下のからみ目は、一般には複雑になるが、これを braid になおしてみると、図8の(ア)となる。この braid $b(3, 3, 2)$ で表すことにする。 $b(3, 3, 2)$ は一部を上下つなぐ操作で $b(1, 1, 2)$ に変形される。



$b(1, 1, 2)$ は最後は $b(1, 1, 0)$ と右図のようになり、平凡なからみ目であることがわかる。



$k(2, 12, 7)$ は上の証明では ribbon knot になっていることもわかる。

一般的に困難な点は、最初の fusion もどのようにしたらいいか？、という点と、次に図6で示した fission band もどのようにつけたらいいか？という点がある。そのため、定規5のような条件がつけられた。

最初の fusion を同じようにした場合、fission band もどのようにつけてもうまくいかない例もあるので、問題の解決は、更に工夫が必要である。

定理の証明など省略したものが多いが、詳細は [10] を参照されたい。

References

- [1] D.B.A. Epstein : Embedding punctured manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 175~176.
- [2] R.H. Fox : Some problems in knot theory, Topology of 3-Manifolds and Related Topics (M.K. Fort, Jr. (ed)), Prentice Hall, N.J., (1962), 168~176
- [3] W. Hantzsche : Einlagerung von Mannigfaltigkeiten in Euklidische Räume, Math. Z., 43 (1938), 38~58.
- [4] F. Hosokawa and A. Kawauchi : Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, Osaka J. Math., 16 (1979), 233-248.
- [5] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki : Descriptions on surfaces in four-space I, Normal forms, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10 (1982), 75~125.
- [6] H. Schubert : Knoten mit zwei Brüchen, Math. Z., 65 (1950), 133~170.
- [7] H. Seifert und W. Threlfall : Lehrbuch der Topologie, Teubner, Leipzig - Berlin, (1934)
- [8] S. Suzuki : Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 4 (1976), 241-371

- [9] E. C. Zeeman : On twisting spun knot, Trans. Amer. Math. Soc., 115 (1965), 471~495.
- [10] F. Hosokawa and S. Suzuki : On Punctured Lens Spaces in 4-space, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10 (1982) 323-344.