

第1章 Landau の Fermi 液体理論

液体 ^3He は 10^{-1} K 以下で Landau の Fermi 液体理論でよく記述できる。この液体は金属中の伝導電子によく似ている。電子は 10 K 以下で超伝導状態になる。15 年ぐらい前から液体 ^3He も超伝導状態に似た状態になるだろうと予言されていた

(Pitaevskii, Balian and Werthamer, Morel and Anderson, Emery and Sessler, Bruckner Soda)。転移温度 T_c については種々の議論があった。1972 年に二つの新しい相が実験で観測された。これが予言されていた超流動相ではないかと思われる。この講義ではまず Fermi 液体理論と BCS 理論を概説し、次に非等方的 (anisotropic) BCS 理論を紹介する。さらに超流動状態における Fermi 液体効果について議論する。そして液体 ^3He の新しい相が上の理論とどこまで一致するかを調べる。最後に NMR について論ずる。

最初に Landau の正常 Fermi 液体理論を紹介しよう。^{1~3)} 文献 4 は微視的な立場からの Fermi 液体理論の正当化を行なっている。(これは半現象論的な立場と関係がある。) 用いる記号は文献 5, 6 による。

§ 1.1 自由 Fermi 気体

体積 Ω 中に N 個の Fermi 粒子がある系を考える。スピンは $\frac{1}{2}$, 質量は m とする。粒子間に相互作用がないから一粒子状態は平面波で記述される。

$$\text{エネルギー } \varepsilon_0(\underline{p}) = \frac{p^2}{2m}, \quad \text{スピン } \sigma = \frac{1}{2} \text{ or } -\frac{1}{2}$$

Pauli 原理によりこの系の基底状態は, $p \leq p_F$ なる平面波状態がすべて占められ, $p > p_F$ なる状態は空の状態である。ここで p_F は Fermi 運動量 (Fermi 球の半径) で

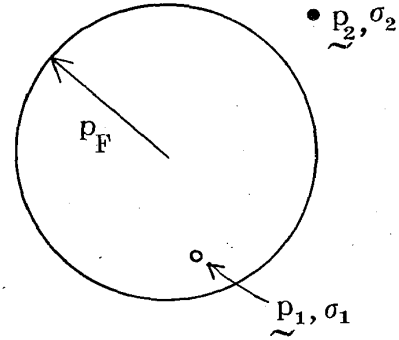
$$p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 N}{\Omega} \right)^{1/3}$$

の関係がある。今 Fermi 面近くの粒子を考えると

$$\varepsilon_0(\underline{p}) = \varepsilon_F + v_F(p - p_F) + \dots, \quad v_F = \left. \frac{d\varepsilon}{dp} \right|_{p_F} = \frac{p_F}{m}$$

と書ける。

励起状態は Fermi 面内 ($p_1 < p_F$) の粒子を 1 個とり出して Fermi 面の外 ($p_2 < p_F$) におけば得られる。このときの一粒子状態の変化を $\delta n(\underline{p}, \sigma)$ と書くと, $\delta n(\underline{p}_1, \sigma_1) = -1$, $\delta n(\underline{p}_2, \sigma_2) = +1$ である。一般に $p < p_F$ なら $\delta n < 0$, $p > p_F$ ならば $\delta n > 0$ である。



励起状態は δn によって完全に記述できる。例えば,

$$\text{全スピン} \quad \underline{S} = \sum_{\underline{p}^{\sigma}} \hbar \sigma \delta n(\underline{p}, \sigma) \quad (1.1)$$

$$\text{全運動量} \quad \underline{P} = \sum_{\underline{p}^{\sigma}} \underline{p} \delta n(\underline{p}, \sigma) \quad (1.2)$$

$$\text{全エネルギー} \quad E = E_0 + \sum_{\underline{p}^{\sigma}} \epsilon_0(\underline{p}) \delta n(\underline{p}, \sigma) \quad (1.3)$$

$$\text{スピンの流れ} \quad \underline{J}_S = \sum_{\underline{p}^{\sigma}} \frac{\underline{p}^{\sigma}}{m} \delta n(\underline{p}^{\sigma}) \quad (1.4)$$

種々の物理量は次に示す様に状態密度のみであらわせる。

$$\text{比熱:} \quad c_v = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \quad (1.5)$$

$$\text{スピン帯磁率:} \quad \chi = \frac{1}{4} (r\hbar)^2 \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \quad (\text{Pauli 常磁性}) \quad (1.6)$$

$$\text{圧縮率:} \quad \kappa = \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \quad (1.7)$$

ここで $(dn/d\epsilon)$ は Fermi 面上での状態密度である。

$$\left(\frac{dn}{d\epsilon}\right) = \frac{3mN}{p_F^2} = \frac{3N}{2\epsilon_F} \quad (1.8)$$

また r は磁気回転比 (gyromagnetic ratio) である。 ($r = g\mu_B/\hbar$)

§ 1.2 Landau の Fermi 液体理論

次に実在する系を考える。(例えば液体 ^3He)。相互作用がなければ自由 Fermi 気体になる。 $t = -\infty$ で自由気体と考え相互作用を断熱的に加える。即ち

$$\hat{V}(t) = \eta(t) \hat{V}$$

($\eta(t)$ は $\eta(-\infty) = 0$, $\eta(0) = 1$ なるなめらかな函数である。) ここで $\hat{V}$ は粒子間の真の相互作用である。摂動で計算すると $t = -\infty$ での自由粒子の状態は断熱的にかわる。つまり $t = -\infty$ で $\Psi = \Psi_n$ (自由 Fermi 気体の固有状態) とすると, $t = 0$ での状態 $\Psi(0) = \Psi'_n$ は

$$\Psi(0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 \hat{V}_H(t) dt\right\} \Psi_n \equiv \Psi'_n$$

となる。ここで $\hat{V}_H(t)$ は $\hat{V}$ の Heisenberg 表示で

$$\hat{V}(t) \equiv e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V} e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}$$

とあらわせる。($\hat{H}_0$ は運動エネルギーのハミルトニアンである。)

つまり Ψ'_n と Ψ_n との間に一対一対応がつく。Landau の Fermi 液体理論の基本は Ψ_n が自由 Fermi 気体の基底状態なら Ψ'_n は相互作用のある系での基底状態であり Ψ_n が自由 Fermi 気体の低い励起状態なら Ψ'_n は相互作用のある系の低い励起状態である, という仮定にある。

この仮定が正しいかどうかは最初からは証明できない。水素にこのような考えをもちこむことは全く間違っている。相互作用のある系の基底状態は分子結晶である。また Na, Al などの金属でも正しくない。ところで ^3He の場合にはどうかといえば, Landau の仮定を使って出てくる理論の予言がかなり実験とあっている。よって ^3He では Landau の仮定は正しいと考えてよいだろう。さて Ψ_n は $\delta n(\underline{p}, \sigma)$ で記述でき, Ψ_n

Ψ'_n とには一対一対応があるから Ψ'_n も $\delta n(\underline{p}, \sigma)$ で記述できるはずである。つまり相互作用のある系の低い励起状態は $\delta n(\underline{p}, \sigma)$ を用いて記述できる。

では全スピン $\underline{S}$ ，全運動量 $\underline{P}$ などはどう書けるであろうか。A を演算子 $\hat{A}$ の期待値とすると、自由 Fermi 気体のとき $A = \sum_{\underline{p}\sigma} a(\underline{p}, \sigma) \delta n(\underline{p}, \sigma)$ であれば相互作用のある系でも同様に書けるであろうか。答は次の通りである。

$$[\hat{A}, \hat{V}_H(t)] = 0 \rightarrow \text{Yes.}$$

$$[\hat{A}, \hat{V}_H(t)] \neq 0 \rightarrow \text{No.}$$

(証明)

$\hat{A}$ の自由 Fermi 気体における固有値を次のようにとる。

$$\hat{A} \Psi_n = a_n \Psi_n$$

相互作用のある系においては

$$\hat{A} \Psi'_n = \hat{A} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 \hat{V}_H(t) dt \right\} \Psi_n$$

ここで $[\hat{A}, \hat{V}_H(t)] = 0$ とすると

$$= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 \hat{V}_H(t) dt \right\} \hat{A} \Psi_n$$

$$= a_n \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 \hat{V}_H(t) dt \right\} \Psi_n$$

$$= a_n \Psi'_n$$

$$\therefore \hat{A} \Psi'_n = a_n \Psi'_n$$

(例)

$$[\hat{S}, \hat{H}_0] = [\hat{S}, \hat{V}] = 0 \quad \therefore [\hat{S}, \hat{V}_H(t)] = 0$$

$$[\hat{P}, \hat{H}_0] = [\hat{P}, \hat{V}] = 0 \quad \therefore [\hat{P}, V_H(t)] = 0$$

これから式(1.1), (1.2)は相互作用のある系でも正しい。しかし $[\hat{J}_s, \hat{V}_H(t)] \neq 0$, $[\hat{E}, \hat{V}_H(t)] \neq 0$ ゆえ式(1.3), (1.4)は正しくない。つまり相互作用のある系では次のようになる。

$$\underline{S} = \sum_{\underline{p}\sigma} \hbar \sigma \delta n(\underline{p}, \sigma), \quad \underline{P} = \sum_{\underline{p}\sigma} \underline{p} \delta n(\underline{p}, \sigma) \quad (1.9)$$

$$J_s \neq \sum_{\underline{p}\sigma} \frac{\underline{p}\sigma}{m} \delta n(\underline{p}, \sigma), \quad E \neq E_0 + \sum_{\underline{p}\sigma} \epsilon_0(\underline{p}) \delta n(\underline{p}, \sigma) \quad (1.10)$$

では Ψ_n' はエネルギーのどの程度よい固有状態であろうか。準粒子は衝突することにより寿命 τ をもつ。この衝突でエネルギー・運動量は保存されなくてはならない。しかし Fermi 統計のため Pauli 原理を満たさなければならぬので、Fermi面の近くの低い励起状態にある準粒子の衝突する確率は非常に小さくなる。実際エネルギーを Fermi面(ϵ_F)から測るとすれば、衝突確率 $\sim \epsilon^2$ となり、寿命は大変長くなる(有限温度の場合には衝突確率 $\sim (k_B T)^2$ となる)。これから Ψ_n' で表わされる準粒子による記述は少なくとも低温または低い励起状態についてはかなりよい近似である。この近似がよいための必要条件は

$$\hbar \tau^{-1} \ll \epsilon_F \quad (1.11)$$

である。もう一つ条件

$$\hbar \tau^{-1} \ll k_B T \quad (1.12)$$

については現在まだ議論されているが、少なくとも静的な性質については多分(1.11)だけで十分であると思う。我々が後に考える ^3He の新しい相については $T \lesssim 3\text{mK}$ であるから(1.11)(1.12)ともに満たされている。

この準粒子による記述を使ってエネルギーを表わそう。 Ψ_n' が近似的にエネルギーのいい固有状態であるからエネルギーは $\delta n(\underline{p}\sigma)$ で表わせるだろう。

$$E = E\{\delta n(\underline{p}, \sigma)\} = \widetilde{E}_0 + \sum_{\underline{p}\sigma} \varepsilon(\underline{p}, \sigma) \delta n(\underline{p}, \sigma) + \frac{1}{2} \sum_{\underline{p}\underline{p}'\sigma\sigma'} f(\underline{p}\underline{p}', \sigma\sigma') \delta n(\underline{p}\sigma) \delta n(\underline{p}', \sigma') \quad (1.13)$$

但し

$$\varepsilon(\underline{p}, \sigma) = \frac{\delta E}{\delta n(\underline{p}, \sigma)}, \quad f(\underline{p}\underline{p}', \sigma\sigma') = \frac{\delta^2 E}{\delta n(\underline{p}, \sigma) \delta n(\underline{p}', \sigma')}$$

従って準粒子の有効エネルギー $\widetilde{\varepsilon}(\underline{p}, \sigma)$ は

$$\widetilde{\varepsilon}(\underline{p}, \sigma) = \varepsilon(\underline{p}, \sigma) + \sum_{\underline{p}'\sigma'} f(\underline{p}\underline{p}', \sigma\sigma') \delta n(\underline{p}', \sigma') \quad (1.14)$$

ここで第一項は準粒子自身のエネルギーであり、第二項は他の準粒子との相互作用から来るエネルギーである。全エネルギーは $O(\Omega)$ であるから ε と f の体積依存性は

$$\varepsilon(\underline{p}\sigma) \sim O(1), \quad f(\underline{p}\underline{p}', \sigma\sigma') \sim O\left(\frac{1}{\Omega}\right)$$

である。もしも $\sum \delta n \sim O(1)$ ならば、 $\widetilde{\varepsilon}$ の第二項 $\sim O\left(\frac{1}{\Omega}\right) \ll 1$ となり無視しうる。しかし $\sum \delta n \sim O(\Omega)$ ならば $\widetilde{\varepsilon}$ の第二項がきいてくる。つまり沢山の準粒子が励起されている時には $\widetilde{\varepsilon}$ の第2項がきいてくるわけである。

次に $\widetilde{\varepsilon}$ の性質を調べる。

$$(i) \quad \varepsilon(\underline{p}, \sigma)$$

対称性から

$$\varepsilon(\underline{p}, \sigma) \equiv \varepsilon(|\underline{p}|) = \varepsilon(p_F) + v_F(p - p_F) + \dots$$

$$(v_F \equiv \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right|_{p_F})$$

ここで有効質量 m^* を自由 Fermi 気体にならって次のように定義する。

$$m^* \equiv \frac{p_F}{v_F}$$

すると Fermi 面での状態密度は

$$\left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right) = \frac{3N}{p_F v_F} = \frac{3Nm^*}{p_F^2} = \left(\frac{m^*}{m}\right) \left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right)_f \quad (1.15)$$

$\left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right)_f$ は自由 Fermi 気体の状態密度)

よって一粒子エネルギーは一個のパラメタ m^* のみで表わせる。

(ii) $f(\underline{p}\underline{p}', \sigma\sigma')$

対称性から

$$f(\underline{p}\underline{p}', \sigma\sigma') = f(\hat{\underline{p}} \cdot \hat{\underline{p}}', \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}')$$

ここで $\hat{\underline{p}} \equiv \underline{p}/|\underline{p}|$ は $\underline{p}$ 方向の単位ベクトルである。

(低温では準粒子は Fermi 面の近くでのみ励起されているので $|\underline{p}|, |\underline{p}'| \sim p_F$ であり, 大きさは大切でなくその方向のみを考えればよい。このことは詳しい計算によって確認できる。)

Legendre 展開すると

$$f(\hat{\underline{p}} \cdot \hat{\underline{p}}', \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \{f_{\ell} + g_{\ell} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}'\} P_{\ell}(\hat{\underline{p}} \cdot \hat{\underline{p}}') \quad (1.16)$$

ここで P_{ℓ} は Legendre 多項式, f_{ℓ}, g_{ℓ} はパラメタ, σ はスピン行列 ($\frac{1}{2} \times$ Pauli 行列) である。前述のように $f_{\ell} \sim 0(\frac{1}{\Omega})$ であり, しかも f_{ℓ} はエネルギーの次元をもつので, $O(1)$ で, かつ次元のないパラメタを用いる方が便利である。よく使われる記号は次のものである。

$$F_{\ell} \equiv f_{\ell} \left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right), \quad Z_{\ell} \equiv g_{\ell} \left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right) \quad (1.17)$$

この F_{ℓ}, Z_{ℓ} がエネルギーの二粒子部分を記述する。即ち, 二粒子部分には無限のパラメタが入ってくる。

(これはソ連的記号である。 A_{ℓ}, B_{ℓ} と書いたり, $F_{\ell} = f_{\ell} \left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right) / (2\ell+1)$ した

りする文献もある。)

§ 1.3 一般化された分子場

前節で Landau の Fermi 液体理論の基本を述べた。今度はあまり知られていない見方(一般化された分子場の考え方)を紹介する。まず簡単な例から始める。

(i) 一般的には二粒子部分を記述する f は複雑であるが簡単のため次のように仮定しよう。

$$f(\hat{\underline{p}} \cdot \hat{\underline{p}}', \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}') = \text{const} \equiv f_0$$

すると,

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\underline{p}, \sigma) &= \varepsilon(\underline{p}, \sigma) + \sum_{\underline{p}', \sigma'} f_0 \delta n(\underline{p}', \sigma') = \\ &= \varepsilon(\underline{p}, \sigma) + f_0 \sum_{\underline{p}' \sigma} \delta n(\underline{p}', \sigma') \end{aligned}$$

第二項の f_0 の係数は全粒子数の変化をあらわすから

$$\tilde{\varepsilon}(\underline{p}, \sigma) = \varepsilon(\underline{p}, \sigma) + f_0 \delta N$$

ここで $\rho = N/\Omega$, $\overline{f_0} \equiv \Omega f_0$ と定義して体積によらない量を導入すると

$$\tilde{\varepsilon}(\underline{p}, \sigma) = \varepsilon(\underline{p}) + \overline{f_0} \delta \rho$$

第一項は相互作用のない時のエネルギー, 第二項は Hartree 型の有効ポテンシャルをあらわす。

(ii) 次にスピン依存性を考えて f を次の形に仮定しよう。

$$f(\hat{\underline{p}} \cdot \hat{\underline{p}}', \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}') = f_0 + g_0 \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}'$$

すると

$$\tilde{\varepsilon}(\underline{p}, \sigma) = \varepsilon(\underline{p}) + \sum_{\underline{p}' \sigma'} (f_0 + g_0 \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}') \delta n(\underline{p}', \sigma')$$

$$\begin{aligned}
 &= \varepsilon(\underline{p}) + f_0 \sum_{\underline{p}', \sigma'} \delta n(\underline{p}', \sigma') + g_0 \underline{\sigma} \cdot \sum_{\underline{p}', \sigma'} \underline{\sigma}' \delta n(\underline{p}', \sigma') \\
 &= \varepsilon(\underline{p}) + f_0 \delta N + \hbar^{-1} g_0 \underline{\sigma} \cdot \underline{S}
 \end{aligned}$$

ここで $\underline{\tilde{S}} \equiv \underline{S}/\Omega$ (スピン密度), $\overline{g_0} \equiv \Omega g_0$ と定義すると

$$\tilde{\varepsilon}(\underline{p}, \sigma) = \varepsilon(\underline{p}) + \overline{f_0} \delta \rho + \hbar^{-1} \overline{g_0} \underline{\sigma} \cdot \underline{\tilde{S}}$$

さて $H_{\text{mol}} \equiv -r^{-1} \hbar^{-2} \overline{g_0} \underline{\tilde{S}}$ とおけば $\overline{g_0} \underline{\sigma} \cdot \underline{\tilde{S}} = -r \hbar \underline{\sigma} \cdot \underline{H_{\text{mol}}}$ となり

$$\tilde{\varepsilon}(\underline{p}, \sigma) = \varepsilon(\underline{p}) + \overline{f_0} \delta \rho - r \hbar \underline{\sigma} \cdot \underline{H_{\text{mol}}}$$

と書ける。つまり第三項は Weiss 型の分子場を表わしている。

(iii) $\ell \neq 0$ についても同様に取扱える。もう一つの例として超流動で大切な $\ell=1$ のスピンによらない部分を考える。即ち,

$$\begin{aligned}
 f(\hat{\underline{p}} \cdot \hat{\underline{p}}', \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}') &= f_0 + g_0 \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}' + f_1 \hat{\underline{p}} \cdot \hat{\underline{p}}' = \\
 &= f_0 + g_0 \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}' + \frac{f_1}{p_F^2} \underline{p} \cdot \underline{p}'
 \end{aligned}$$

第一項, 第二項は (ii) と同じゆえここでは第三項の $\tilde{\varepsilon}(\underline{p}, \sigma)$ への寄与を考える。

$$\begin{aligned}
 \sum_{\underline{p}', \sigma'} \frac{f_1}{p_F^2} \underline{p} \cdot \underline{p}' \delta n(\underline{p}', \sigma') &= \underline{p} \cdot \frac{f_1}{p_F^2} \sum_{\underline{p}', \sigma'} \underline{p}' \delta n(\underline{p}', \sigma') \\
 &= \frac{f_1}{p_F^2} \underline{p} \cdot \underline{P} = \frac{\overline{f_1}}{p_F^2} \underline{p} \cdot \underline{\tilde{P}}
 \end{aligned}$$

ただし $\overline{f_1} = f_1 \Omega$, $\underline{\tilde{P}} = \underline{P}/\Omega$ (運動量密度) とおいた。ここで有効 (分子場) ベクトルポテンシャル $\underline{A_{\text{mol}}}$ を

$$\tilde{A}_{\text{mol}} \equiv - \frac{\bar{f}_1}{p_F^2} \tilde{P}$$

と定義すると

$$\tilde{\epsilon}(\underline{p}, \sigma) = \epsilon(\underline{p}) + \bar{f}_0 \delta \rho - r \hbar \underline{\sigma} \cdot \underline{H}_{\text{mol}} - \underline{p} \cdot \tilde{A}_{\text{mol}}$$

となる。さらにすすめば、たとえば

$$\frac{g_1}{p_F^2} \underline{p}^\sigma \sum_{\underline{p}' \sigma'} \underline{p}'^{\sigma'} \delta n(\underline{p}' \sigma')$$

があらわれる。 $\sum_{\underline{p}' \sigma'}$ 以下は相互作用のある系の本当のスピンの流れではないがある種の分子場をつくる。

このような分子的な見方は Fermi 液体理論を考慮するとき大変便利である。つまり Landau の Fermi 液体理論では色々な分子場の中で質量 m^* の自由粒子が運動しているとみなすことができる。

今までは全系の状態を考えていた。(つまり準粒子が全体に一様に分布しているときを考えていた。) しかし分布函数の空間変化がゆっくりしているとき、つまり大きさ L の部分系の中では準粒子の分布は一様であり、かつ $L \gg (\hbar/p_F)$ が満たされている時には半古典的に考えて、局所準粒子数密度 $\delta n(\underline{p}^\sigma, \underline{r})$ を導入することができる。同様に時間変化もゆるやかとすれば $\delta n(\underline{p}^\sigma, \underline{r}, t)$ を考えてもよい。このとき全系の全エネルギーは

$$\begin{aligned} E\{\delta n(\underline{p}^\sigma; \underline{r}, t)\} &= \tilde{E}_0 + \int d^3r \sum_{\underline{p}^\sigma} \epsilon(\underline{p}^\sigma) \delta n(\underline{p}^\sigma, \underline{r}, t) \\ &+ \int d^3r \frac{1}{2} \sum_{\substack{\underline{p} \underline{p}' \\ \sigma \sigma'}} f(\underline{p} \underline{p}', \sigma \sigma') \delta n(\underline{p}^\sigma, \underline{r}, t) \delta n(\underline{p}'^{\sigma'}, \underline{r}, t) \end{aligned}$$

一粒子部分については問題はない。二粒子部分は本当は非局所的であるが、短距離力を考える限り $(\underline{r}, t)$ で指定される時空間内の準粒子間の相互作用のみを考えればよいから局

所形にとった。このとき準粒子の有効エネルギーは

$$\tilde{\varepsilon}(\underline{p}\sigma, \underline{r}t) \equiv \varepsilon(\underline{p}\sigma) + \sum_{\underline{p}'\sigma'} f(\underline{p}\underline{p}', \sigma\sigma') \delta n(\underline{p}'\sigma', \underline{r}t)$$

となる。

分子場的な考え方をすると、

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\underline{p}\sigma, \underline{r}t) = & \varepsilon(\underline{p}) + V_{\text{Hartree}}(\underline{r}, t) - \\ & - r\hbar \underline{\sigma} \cdot \underline{H}_{\text{mol}}(\underline{r}, t) - \underline{p} \cdot \underline{A}_{\text{mol}}(\underline{r}, t) + \dots \end{aligned}$$

となる。つまり点 $(\underline{r}, t)$ での準粒子はその点での分子場を感じる。

$$V_{\text{Hartree}}(\underline{r}, t) = \bar{f}_0 \delta \rho(\underline{r}, t)$$

$$\underline{H}_{\text{mol}}(\underline{r}, t) = - (r\hbar)^{-1} \bar{g}_0 \cdot \underline{\tilde{S}}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{A}_{\text{mol}}(\underline{r}, t) = - \frac{f_1}{p_F^2} \cdot \underline{\tilde{P}}(\underline{r}, t)$$

もし巨視的な分極がなければ、これらの分子場は全部 0 である。これが大切な点である。つまりこれらの分子場は巨視的な分極である。よって Fermi 液体の熱力学的性質には自由 Fermi 気体の表式の m を m^* にかえるだけでよく、分子場は関与しない。たとえば比熱 C_v は

$$C_v \equiv \left(\frac{dn}{d\varepsilon} \right) \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T = \frac{m^*}{m} \left(\frac{dn}{d\varepsilon} \right)_f \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T = \frac{m^*}{m} C_{vf} \quad (1.18)$$

その理由は C_v を測定するときには磁場や電場をかける必要がないので巨視的な分極は生じない ($\underline{S} = 0$, $\underline{P} = 0$ など) からである。ところがたとえばスピン帯磁率を考えるときには分子場がきく。外部磁場をかけると巨視的なスピン分極が生じ $\underline{H}_{\text{mol}} \neq 0$ となるからである。

§ 1.4 静的性質

定量的にスピン帯磁率 χ を計算しよう。普通の Weiss 分子場の考えを用いると

$$\underline{M} = \chi_0 \underline{H}_{\text{total}}$$

$$\underline{H}_{\text{total}} = \underline{H}_{\text{ext}} + \underline{H}_{\text{mol}}$$

但し χ_0 は質量 m^* の自由 Fermi 気体の帯磁率であり、相互作用の効果は $\underline{H}_{\text{mol}}$ を通して入ってくる。

$$\underline{H}_{\text{mol}} = -r^{-1} \hbar^{-2} g_0 \underline{S} = - (r \hbar)^{-2} g_0 \underline{M} \quad (\underline{M} = r \underline{S})$$

を用いると、

$$\underline{M} = \chi_0 \{ \underline{H}_{\text{ext}} - (r \hbar)^{-2} g_0 \chi_0 \underline{M} \}$$

$$\therefore \underline{M} = \frac{\chi_0}{1 + (r \hbar)^{-2} g_0 \chi_0} \underline{H}_{\text{ext}}$$

$$\therefore \chi = \frac{\chi_0}{1 + (r \hbar)^{-2} g_0 \chi_0}$$

ところで

$$\chi_0 = \frac{1}{4} (r \hbar)^2 \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \quad \therefore (r \hbar)^{-2} g_0 \chi_0 = \frac{1}{4} g_0 \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) = \frac{1}{4} Z_0$$

$$\therefore \chi = \frac{\chi_0}{1 + \frac{1}{4} Z_0} \quad (1.19)$$

これが強く相互作用している Fermi 液体のスピン帯磁率である。

他の場合も同様にできる。例えば圧縮率は

$$\kappa = \frac{(dn/d\epsilon)}{1+F_0} \quad (1.20)$$

となる。

まとめると

$$C_v = \frac{m^*}{m} C_{vf}, \quad \kappa = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1+F_0} \kappa_f, \quad \chi = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1+\frac{1}{4}Z_0} \chi_f$$

以上を実験と比べて三つのパラメタ m^* , F_0 , Z_0 を求めることができる。液体 ${}^3\text{He}$ については表 1-1 のようになる。

表 1-1

	SVP	35 atm
m^*/m	2.8	~ 5.5
F_0	~ 10	~ 75
Z_0	~ -2.8	~ -3
F_1	~ 5	~ 15

SVP: saturated vapour
pressure
(飽和蒸気圧)

これからわかるように液体 ${}^3\text{He}$ においては、自由 Fermi 気体とのちがい、即ち Fermi 液体効果が大きいことがわかる。

もう一つの重要な結果を証明なしに引用しておく。 $\delta \tilde{P} / \delta \tilde{A}$ はベクトルポテンシャル $\tilde{A}$ に対する系の応答を示す。自由 Fermi 気体では

$$\left(\frac{\delta \tilde{P}}{\delta \tilde{A}_f} \right) = mN$$

これは慣性にはかならない。一方 Fermi 液体理論によって有効ベクトルポテンシャルを考えると

$$\left(\frac{\delta \tilde{P}}{\delta \tilde{A}}\right) = N m^* \frac{1}{1 + \frac{1}{3} F_1}$$

となる。しかるに慣性は相互作用によって変らないはずであるから、

$$1 + \frac{F_1}{3} = \frac{m^*}{m} \quad (1.21)$$

となる。 m^*/m のデータから決めた F_1 の値を表 1-1 につけ加えておく。これから考えて $F_2, F_3, \dots$ もあまり小さくないと考えられる。

§ 1.5 動的性質

分子場の考えを使って動的性質も同様に計算できる。しかし一つの困難がある。静的性質を考えたとき、たとえばスピン帯磁率 χ を考えたとき Weiss 場のみでよかったのは対称性の結果であった。(例えば磁場をかけても $\tilde{P}$ や δN などの分極はでてこない。) しかし動的性質になるところはいかなくなる。たとえば密度応答を考えると、 $F_0, F_1, F_2, \dots$ など全部が入ってくる。よって密度応答函数は無限のパラメタを含むことになる。以下では簡単のため F_0 と Z_0 以外は 0 としよう。

$$\text{密度応答函数} \quad \chi_d(\underline{k}, \omega) \propto \frac{\chi_0(\underline{k}, \omega)}{1 - F_0 \chi_0(\underline{k}, \omega)} \quad (1.22)$$

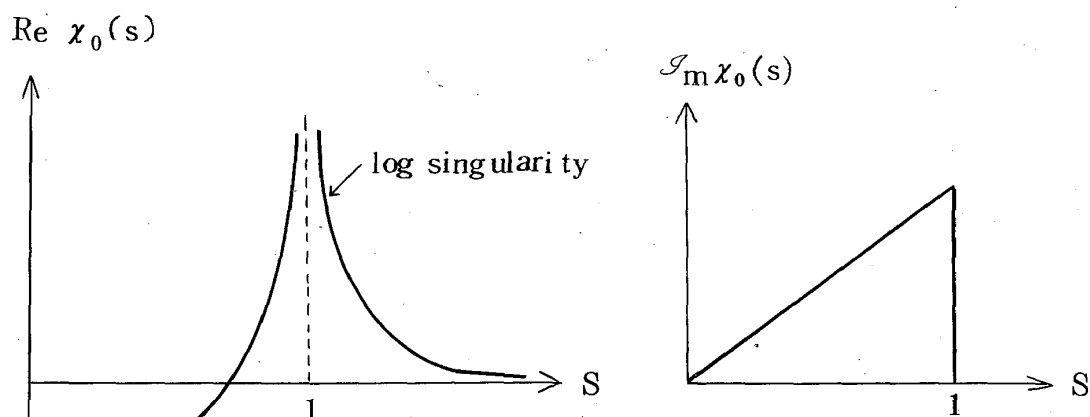
$$\text{スピン応答函数} \quad \chi_{sp}(\underline{k}, \omega) \propto \frac{\chi_0(\underline{k}, \omega)}{1 - \frac{1}{4} Z_0 \chi_0(\underline{k}, \omega)} \quad (1.23)$$

ただし $\chi_0(\underline{k}, \omega)$ は質量 m^* の自由 Fermi 気体の応答函数で、 $\chi_0(\underline{k}, \omega) \equiv \chi_0(s)$
 $S \equiv \omega/k v_F$ とおくと

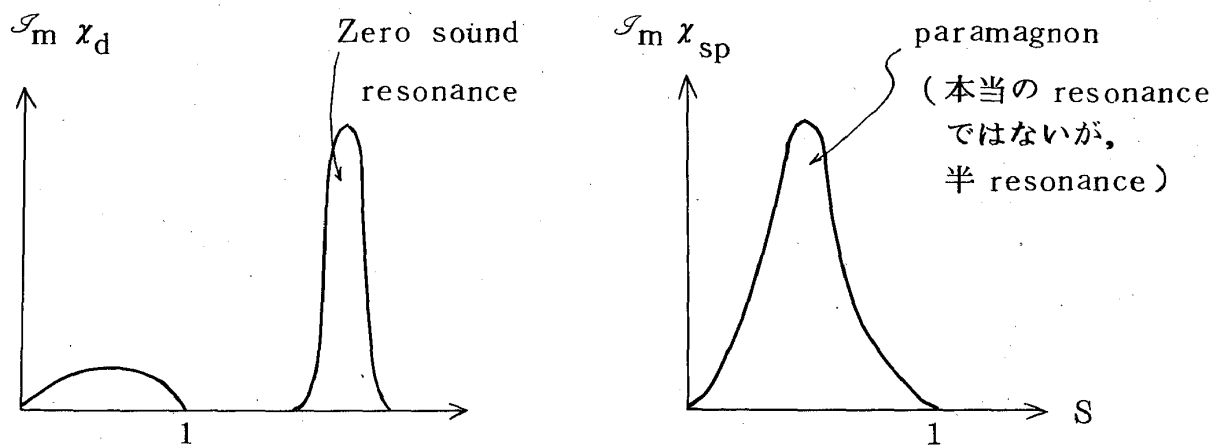
$$\chi_0(s) = \frac{1}{2} s \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right| - 1 + i\pi\theta(1-S)$$

自由 Fermi 気体の時には $\chi_d = \chi_{sp} = \chi_0$ で、1-1 図のようになる。ところが、

相互作用が入ると χ_d , χ_{sp} は F_0 , Z_0 の符号がちがうので全く異なる形になる (1-2 図)。 χ_d には $F_0 > 0$ のため極がある。 χ_{sp} には $Z_0 < 0$ のため極はないが、半ば共鳴的なモードが現われる。これをパラマグノンといい ^3He の理論では大切になる。



1-1 図



1-2 図

参考文献 (第1章)

- 1) L.D.Landau, Soviet Phys. JETP. 3, 920 (1957)

- 2) L.D.Landau, ibid 5, 101 (1957)
- 3) P.Nozières and D.Pines, Theory of Quantum Liquids
(Benjamin N.Y. 1965)
- 4) P.Nozières, Theory of Interacting Fermi Systems
(Benjamin N.Y. 1964)
- 5) A.J.Leggett, Physica Fennica 8, 159 (1973)
- 6) A.J.Leggett, lecture note at IX-th. Winter School of
Theoretical Physics in Karpacz : The Theory of Metals and the
Many Body Problems vol I, (Wroclaw, 1972)

第2章 BCS 理論

§ 2.1 BCS ハミルトニアン

Bardeen, Cooper, Schrieffer (BCS)¹⁾ は凝縮対の角運動量 ℓ が 0 でスピン一重項のみを考えた。ここではあとで液体 ^3He に応用するために $\ell \neq 0$ の場合も含んだ形の BCS 理論を紹介する。弱い相互作用のある Fermi 気体は平面波で記述するのがよい。即ち一粒子状態は $\Omega^{1/2} \exp(i \underline{k} \underline{r}) \times (\text{スピン関数})$ である。

第二量子化の形で書く。 $a_{\underline{p}\sigma} (a_{\underline{p}\sigma}^+)$ を上の一粒子状態の消滅 (生成) 演算子とすると、反交換関係は

$$\begin{aligned} [a_{\underline{p}\sigma}, a_{\underline{p}'\sigma'}^+]_+ &= \delta_{\underline{p}\underline{p}'} \delta_{\sigma\sigma'} \\ [a_{\underline{p}\sigma}, a_{\underline{p}'\sigma'}]_+ &= [a_{\underline{p}\sigma}^+, a_{\underline{p}'\sigma'}^+]_+ = 0 \end{aligned}$$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\underline{p}\sigma} \epsilon_{\underline{p}} a_{\underline{p}\sigma}^+ a_{\underline{p}\sigma} \\ &+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{\substack{\underline{p}\underline{p}'\underline{q} \\ \sigma\sigma'}} V(\underline{q}) a_{\underline{p}+\underline{q}/2, \sigma}^+ a_{\underline{p}'-\underline{q}/2, \sigma'}^+ a_{\underline{p}'+\underline{q}/2, \sigma'} a_{\underline{p}-\underline{q}/2, \sigma} \end{aligned} \quad (2.1)$$