

一様凸 BANACH 空間の 1 つの特徴づけについて

A CHARACTERIZATION OF UNIFORMLY CONVEX BANACH SPACES

竹内 幸雄 (高橋非線形解析研究所)

YUKIO TAKEUCHI (TAKAHASHI INSTITUTE FOR NONLINEAR ANALYSIS)

1. 主題と準備

本稿では, 次の補題 2.3 を解説する. この補題は, 一様凸 Banach 空間の特徴付けの 1 つを記述し, 補題 A と併用することによって, 一様凸 Banach 空間の不動点近似に有用である. あらかじめ, 記号の説明をしておく. N と R は正の整数と実数の集合を表す. E は, 常に, ノルム $\|\cdot\|$ を持つ実 Banach 空間とし, E^* をその位相的 dual とする. rB_E は中心 $0 \in E$, 半径 $r > 0$ の閉球を表す. したがって, B_E は閉単位球を表す.

Lemma 2.3. *E is uniformly convex if and only if, for each $r \in (0, \infty)$, there is a strictly increasing continuous (strictly) convex function f_r from $[0, 2r]$ into $[0, 2r]$ such that $f_r(0) = 0$ and*

$$(zx) \quad \|ax + (1-a)y\|^2 \leq a\|x\|^2 + (1-a)\|y\|^2 - a(1-a)f_r(\|x-y\|)$$

for all $x, y \in rB_E$, $a \in [0, 1]$.

Lemma A. *Let $r > 0$. Let f be a non-decreasing function from $[0, 2r]$ into $[0, \infty)$ with $f(0) = 0$ and $f(t) > 0$ for all $t \in (0, 2r]$. Then the following hold:*

- (1) *Suppose $\{t_n\}$ is a sequence in $[0, 2r]$ satisfying $\lim_n f(t_n) = 0$. Then $\lim_n t_n = 0$.*
- (2) *For any $\varepsilon > 0$, there is $\delta > 0$ such that $f(t) < \delta$ implies $t < \varepsilon$.*

補題 2.3 は, 本質的には Zălinescu [5] による. 上の定式化については Xu [4] を参照. そして, Zălinescu の議論は複雑で理解しにくい. しかし, 私たちは, その簡潔で自然な証明を Prus [3] に見いだすことができる. Prus の証明は要点のみを記述した非常に短いものであり, Zălinescu の議論と直接には関係しない. 本稿では, Banach 空間のごく基本的な知識のみを仮定し, Prus の方向で, 学部学生にも十分理解できる様に, 補題 2.3 の証明を詳説する. 窪田-高橋-竹内 [2] にも, Prus [3] ほどには簡潔でないが, 初等的な証明がある. 彼らは, 補題 2.2 の関数 f_r を凸性の modulus δ で定量的に評価した.

無用な混乱を避けるために, $E \neq \{0\}$ を仮定する. このとき, Banach 空間 E について, 凸性の modulus δ は次の様に定義される:

$$\delta(t) = \inf\{1 - \|\frac{x+y}{2}\| : x, y \in B_E, t \leq \|x - y\|\} \quad \text{for each } t \in [0, 2].$$

定義から, 明らかに, δ は $[0, 2]$ から $[0, 1]$ への関数であり $\delta(0) = 0$ を満たす. また, $\inf$ の性質を考慮すれば, δ が非減少関数であることも明らかだろう.

E は $E^{**} = (E^*)^*$ に標準的な方法で埋め込まれる; E は E^{**} の部分集合とみなせる. この標準的な埋め込みによって E が E^{**} とみなせるとき, E は回帰的 (reflexive) と呼ばれる. このとき, $E = E^{**}$ と考えてよい. 凸性は, E 上のノルムの基本的な性質である. しかし, 単なる凸性よりも強い性質を E 上のノルムに要請することがある.

Banach 空間 E は, 次の不等式が成立するとき狭義凸 (strictly convex) と呼ばれる:

$$\|ax + (1-a)y\|^2 < a\|x\|^2 + (1-a)\|y\|^2 \quad \text{for all } x, y \in E \text{ with } x \neq y, a \in (0, 1).$$

Banach 空間 E は, δ が次の関係を満たすとき, 一様凸 (uniformly convex) と呼ばれる:

$$(uc) \quad \delta(t) > 0 \quad \text{for all } t \in (0, 2].$$

一様凸 Banach 空間が狭義凸で回帰的なことは良く知られている. また, E が一様凸ならば, δ は狭義単調増加関数になる. Banach 空間 E が一様凸であることと次の (uc1) が成立することが同値であることもよく知られている.

(uc1) $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ holds whenever sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ in B_E satisfy

$$\lim_n \|\frac{x_n + y_n}{2}\| = 1.$$

条件 (uc1) が成立することを一様凸 Banach 空間の定義とする文献も多い.

更に, 次の (uc1) の変形 (uc2) と (uc1) が同値であることの確認は容易である.

(uc2) $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ holds whenever sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ in E satisfy

$$\lim_n \|x_n\| = \lim_n \|y_n\| = \lim_n \|\frac{x_n + y_n}{2}\| \in [0, \infty).$$

2. 一様凸 BANACH 空間の 1 つの特徴づけ

本節では, 一様凸 Banach 空間の特徴づけの 1 つとして, 補題 2.3 を証明する. まず, 議論の要であり補題 2.3 の証明においても本質的な役割を担う, 次の補題を証明する.

Lemma 2.1. *E is uniformly convex if and only if, for each $r \in (0, \infty)$, there is a strictly increasing function g_r from $[0, 2r]$ into $[0, r]$ such that $g_r(0) = 0$ and*

$$(zx') \quad \|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - g_r(\|x - y\|) \quad \text{for all } x, y \in rB_E.$$

Proof. $r = 1$ を仮定しても一般性を失わない. E が一様凸を仮定し, 条件を満たす関数 g_1 が存在することを示す. $[0, 2]$ から $[0, 1]$ への関数 g_1 を次の様に定義する:

$$(2.1) \quad g_1(t) = \inf\{\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|\frac{x+y}{2}\|^2 : x, y \in B_E, t \leq \|x - y\|\} \quad \text{for each } t \in [0, 2].$$

この定義より, g_1 は明らかに $g_1(0) = 0$ を満たし, $\inf$ の性質より非減少関数である.

背理法で次を示す: $g_1(t) > 0$ for all $t \in (0, 2]$. ある $t_0 \in (0, 2]$ について, $g_1(t_0) = 0$ とする. このとき, g_1 の定義 (2.1) を考慮すると, 次の様な B_E の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が存在する: $\|x_n - y_n\| \geq t_0$ for all $n \in N$ and

$$(2.2) \quad \lim_n(\frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n\|^2 - \|\frac{x_n+y_n}{2}\|^2) = 0.$$

部分点列に移ることによって, 極限 $\lim_n \|x_n\|$, $\lim_n \|y_n\|$, $\lim_n \|\frac{x_n+y_n}{2}\|$ が存在すると考えてよい. 簡潔に $a = \lim_n \|x_n\|$, $b = \lim_n \|y_n\|$, $c = \lim_n \|\frac{x_n+y_n}{2}\|$ と表記する. もちろん, $a, b, c \in [0, \infty)$ である. $n \in N$ ごとに, 次の不等式が成立する:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n\|^2 - \|\frac{x_n+y_n}{2}\|^2 \\ & \geq \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n\|^2 - (\frac{1}{2}\|x_n\| + \frac{1}{2}\|y_n\|)^2 \\ & = \frac{1}{4}\|x_n\|^2 + \frac{1}{4}\|y_n\|^2 - \frac{1}{2}\|x_n\|\|y_n\| \\ & = \frac{1}{4}(\|x_n\| - \|y_n\|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

この式と (2.2) より, $a = b$ を得る. そして $a = b$ と (2.2) より $a^2 = c^2$ を得る. 即ち, $a = b = c$ であり, 書き直せば $\lim_n \|x_n\| = \lim_n \|y_n\| = \lim_n \|\frac{x_n+y_n}{2}\| \in [0, \infty)$ である. この様にして, E が一様凸より, (uc2) によって $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ を得るが, これは次のことに矛盾する: $\|x_n - y_n\| \geq t_0 > 0$ for all $n \in N$.

g_1 が $[0, 2]$ 上で狭義単調増加であることを示す. $s < t$ である $s, t \in (0, 2]$ を任意に固定する. $g_1(s) > 0$, $g_1(t) > 0$ を既に知っている. $k = s/t \in (0, 1)$ とする. 任意に $x, y \in B_E$ をとると, $kx, ky \in B_E$ は明らかである. そして, $\|x - y\| \geq t$ ならば $\|kx - ky\| = k\|x - y\| \geq s$ となる. したがって, g_1 の定義 (2.1) より,

$$\begin{aligned} g_1(0) = 0 & < g_1(s) = \inf\{\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|\frac{x+y}{2}\|^2 : x, y \in B_E, s \leq \|x - y\|\} \\ & \leq \inf\{\frac{1}{2}\|kx\|^2 + \frac{1}{2}\|ky\|^2 - \|\frac{kx+ky}{2}\|^2 : x, y \in B_E, t \leq \|x - y\|\} \\ & = k^2 \inf\{\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|\frac{x+y}{2}\|^2 : x, y \in B_E, t \leq \|x - y\|\} \\ & = k^2 g_1(t) < g_1(t). \end{aligned}$$

即ち, g_1 は $[0, 2]$ から $[0, 1]$ への狭義単調増加関数であり $g_1(0) = 0$ を満たす.

最後に, g_1 が (zx') を満たすことを示す. $x_0, y_0 \in B_E$ を任意に固定し, 定義式 (2.1) で $t = \|x_0 - y_0\|$ とすれば, 次が成立する: For all $x, y \in B_E$ with $\|x_0 - y_0\| \leq \|x - y\|$,

$$g_1(\|x_0 - y_0\|) \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

$\|x_0 - y_0\| \leq \|x - y\|$ であり, $x_0, y_0 \in B_E$ は任意なので, g_1 は (zx') を満たす.

逆に, g_1 を $g_1(0) = 0$ と (zx') を満たす $[0, 2]$ から $[0, 1]$ への狭義単調増加関数とする. $t \in (0, 1]$ を任意に固定する. $x, y \in B_E$, $\|x - y\| \geq t$ ならば, (zx') と $\frac{x+y}{2} \in B_E$ より,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2}g_1(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\right) \\ &\leq \frac{1}{2}(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2) = \frac{1}{2}(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|)(1 + \left\|\frac{x+y}{2}\right\|) \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|. \end{aligned}$$

この式と δ の定義より, $0 < \frac{1}{2}g_1(t) \leq \delta(t)$ を得る. したがって, E は一様凸である. $\square$

補題 2.1 の (zx') は x と y の中点のノルムの 2 乗を g_r を使って評価する式であるが, 次の補題の (zx) は x と y の凸結合のノルムの 2 乗を f_r を使って評価する式である.

Lemma 2.2. *E is uniformly convex if and only if, for each $r \in (0, \infty)$, there is a strictly increasing function f_r from $[0, 2r]$ into $[0, 2r]$ such that $f_r(0) = 0$ and*

$$(zx) \quad \|ax + (1-a)y\|^2 \leq a\|x\|^2 + (1-a)\|y\|^2 - a(1-a)f_r(\|x - y\|)$$

$$\text{for all } x, y \in rB_E, a \in [0, 1].$$

Proof. 条件を満たす f_r が存在するとき, $a = 1/2$, $g_r = f_r/4$ とすれば, (zx) より g_r は (zx') を満たし, 補題 2.1 のすべての条件を満たす. したがって, E は一様凸である.

E が一様凸のとき f_r の存在を示す. 補題 2.1 の g_r をとり, f_r を次の様に定義する:

$$f_r(t) = 2g_r(t) \quad \text{for each } t \in [0, 2r].$$

g_r の性質から, f_r は $[0, 2r]$ から $[0, 2r]$ への狭義単調増加関数で $f_r(0) = 0$ を満たす.

f_r が (zx) を満たすことを示す. 任意に $x, y \in rB_E$, $a \in [0, 1]$ を固定する. $a \in \{0, 1\}$ のとき, (zx) の成立は自明である. また, $a \in (1/2, 1)$ ならば, 明らかに, $1-a \in (0, 1/2]$ である. したがって, $a \in (0, 1/2]$ のとき (zx) が成立することを示せば十分である.

$\|\cdot\|^2$ が凸であること, g_r の性質, $f_r = 2g_r$, $0 < 1-a < 1$ より,

$$\begin{aligned} \|ax + (1-a)y\|^2 &= \|2a(\tfrac{1}{2}(x+y)) + (1-2a)y\|^2 \leq 2a\left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\|^2 + (1-2a)\|y\|^2 \\ &\leq 2a\left(\tfrac{1}{2}\|x\|^2 + \tfrac{1}{2}\|y\|^2 - g_r(\|x - y\|)\right) + (1-2a)\|y\|^2 \\ &= a\|x\|^2 + (1-a)\|y\|^2 - 2ag_r(\|x - y\|) \\ &\leq a\|x\|^2 + (1-a)\|y\|^2 - a(1-a)f_r(\|x - y\|). \end{aligned}$$

f_r が (zx) を満たすことを確認した. したがって, f_r は補題のすべての条件を満たす. $\square$

Prus [3] の議論が簡潔なのは、正確には、補題 2.2 を得るまでである。補題 2.2 から補題 2.3 を得るための Prus の議論は、凸解析の知識をある程度必要とし、本質的にはそれほど簡単ではない。したがって、本稿では、微積分の基礎知識のみを必要とする、より簡単な窪田-高橋-竹内 [2] の証明を採用。問題意識が異なり、2 つの証明に優劣はない。また、邦書では、補題 2.2 の f_r の様に、主流から少し外れた関数についての凸解析的な議論をあまり見かけない。このため、Prus の証明方法についても補足で解説する。

Lemma 2.3. *E is uniformly convex if and only if, for each $r \in (0, \infty)$, there is a strictly increasing continuous (strictly) convex function f_r from $[0, 2r]$ into $[0, 2r]$ such that $f_r(0) = 0$ and*

$$(zx) \quad \|ax + (1-a)y\|^2 \leq a\|x\|^2 + (1-a)\|y\|^2 - a(1-a)f_r(\|x-y\|)$$

for all $x, y \in rB_E$, $a \in [0, 1]$.

Proof. 条件を満たす f_r が存在するとき、 E が一様凸であることは補題 2.2 の証明と同様である。したがって、 E が一様凸のとき、補題の条件を満たす f_r の存在を示す。

補題 2.2 の f_r をとる。 f_r は $[0, 2r]$ 上で狭義単調増加なので、微積分の基礎から、Riemann の意味で積分可能である。したがって、関数 f_r を次の様に定義する：

$$(2.3) \quad f_r(t) = \frac{1}{2r} \int_0^t f_r(s) ds \quad \text{for each } t \in [0, 2r].$$

積分の簡単な性質と f_r が $[0, 2r]$ 上で狭義単調増加で $f_r(0) = 0$ より、 f_r も $[0, 2r]$ 上の連続な狭義単調増加関数であり $f_r(0) = 0$ を満たす。そして、次の不等式も明らかである。

$$0 \leq f_r(t) = \frac{1}{2r} \int_0^t f_r(s) ds \leq \frac{1}{2r} (t f_r(t)) \leq f_r(t) \quad \text{for all } t \in [0, 2r].$$

この不等式から、 f_r が $[0, 2r]$ から $[0, 2r]$ への関数であることがわかる。また、 f_r が (zx) を満たしているので、この不等式から、 f_r も (zx) を満たすことは明らかである。

最後に f_r が狭義凸を示せば、 f_r は要求された条件をすべて満たす。したがって、次の (2.4) を示すことになる。 f_r の定義より、 $\frac{1}{2r}$ を省いた (2.5) を示せば十分である。

$$(2.4) \quad f_r(at_1 + (1-a)t_2) < a f_r(t_1) + (1-a) f_r(t_2),$$

$$(2.5) \quad \int_0^{at_1+(1-a)t_2} f_r(s) ds < a \int_0^{t_1} f_r(s) ds + (1-a) \int_0^{t_2} f_r(s) ds$$

for all $t_1, t_2 \in [0, 2r]$ with $t_1 < t_2$, $a \in (0, 1)$. $t_1 < t_2$ を満たす $t_1, t_2 \in [0, 2r]$ と $a \in (0, 1)$ を任意に固定する。 f_r が狭義単調増加より、直ちに次の 2 つの不等式を得る：

$$(2.6) \quad \int_{t_1}^{at_1+(1-a)t_2} f_r(s) ds < (1-a)(t_2 - t_1) f_r(at_1 + (1-a)t_2),$$

$$\int_{at_1+(1-a)t_2}^{t_2} f_r(s) ds > a(t_2 - t_1) f_r(at_1 + (1-a)t_2).$$

幾何的なイメージも見ておこう. 縦軸に平行な直線を $t_1, at_1 + (1-a)t_2, t_2$ で引き, 横軸に平行な高さ 0 と高さ $f_r(at_1 + (1-a)t_2)$ の直線を引く. このとき, $s = at_1 + (1-a)t_2$ の左右に 2 つの長方形が現れる (面積 [積分] の計算はごく容易である):

- $s = at_1 + (1-a)t_2$ の左に面積 $(1-a)(t_2 - t_1)f_r(at_1 + (1-a)t_2)$ の長方形,
- $s = at_1 + (1-a)t_2$ の右に面積 $a(t_2 - t_1)f_r(at_1 + (1-a)t_2)$ の長方形.

(2.6) は, この 2 つの長方形の面積と f_r のグラフと横軸の間の面積との比較である.

(2.5) を示す. 右辺と左辺の差をとり, 単に t_1 と $at_1 + (1-a)t_2$ で積分を分けて計算し, 最後に (2.6) の 2 つの不等式を使用する:

$$\begin{aligned}
 & \left(a \int_0^{t_1} f_r(s) ds + (1-a) \int_0^{t_2} f_r(s) ds \right) - \int_0^{at_1+(1-a)t_2} f_r(s) ds \\
 &= a \int_0^{t_1} f_r(s) ds + (1-a) \left(\int_0^{t_1} f_r(s) ds + \int_{t_1}^{at_1+(1-a)t_2} f_r(s) ds + \int_{at_1+(1-a)t_2}^{t_2} f_r(s) ds \right) \\
 &\quad - \left(\int_0^{t_1} f_r(s) ds + \int_{t_1}^{at_1+(1-a)t_2} f_r(s) ds \right) \\
 &= (a + (1-a) - 1) \int_0^{t_1} f_r(s) ds \\
 &\quad + (1-a) \int_{at_1+(1-a)t_2}^{t_2} f_r(s) ds + ((1-a) - 1) \int_{t_1}^{at_1+(1-a)t_2} f_r(s) ds \\
 &= (1-a) \int_{at_1+(1-a)t_2}^{t_2} f_r(s) ds - a \int_{t_1}^{at_1+(1-a)t_2} f_r(s) ds \\
 &> (1-a) \left(a(t_2 - t_1) f_r(at_1 + (1-a)t_2) \right) - a \left((1-a)(t_2 - t_1) f_r(at_1 + (1-a)t_2) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

この様にして, $f_{\underline{r}}$ が狭義凸であることを確認した. □

一様凸 Banach 空間の不動点近似に限定するならば, 補題 A を併用することになるので, 補題 2.3 の $f_{\underline{r}}$ の連続性や凸性は不要である. 即ち, 補題 2.2 の f_r は実用上は十分な性質を既に備えている; 補題 2.2 と補題 A を併用すれば実用上は十分である.

3. 補足: PRUS の証明 (補題 2.3)

まず, 凸解析への簡単な導入をする. Banach 空間 E 上の実数値関数の枠を少し広げて, 拡張実数 $(0, \infty] = R \cup \{\infty\}$ に値をとる E 上の関数 f を考える. そして, 少なくとも一点では実数値をとることを要請する. 即ち, $D(f) = \{x \in E : f(x) < \infty\} \neq \emptyset$ を要請する. この様な関数を proper と呼び, その族を $\gamma^p(E)$ と表記しよう. E の部分集合 C 上の実数値関数 f をとり, $E \setminus C$ での値を ∞ とすると, f を E 上の proper な関数として捉え直せる. 即ち, 様々な定義域を持つ実数値関数を, 形式的には, E 上の proper な関数として統一的に扱える. $f \in \gamma^p(E)$ に下半連続な凸関数であることを要請し, この様な関数の族を $\overline{\gamma}(E)$ と表記しよう. $f \in \gamma^p(E)$ が凸関数であることと f のエピグラフ $\text{ep}(f) = \{(x, t) \in E \times R : f(x) \leq t\}$ が凸集合であることは同値であり, $f \in \gamma^p(E)$ が下半連続な関数であることと $\text{ep}(f)$ が閉集合であることも同値である. 即ち, $f \in \overline{\gamma}(E)$

と $\text{ep}(f)$ が閉凸集合であることは同値である。エピグラフ $\text{ep}(f)$ は重要かつ有用な概念であるから、 $\text{ep}(f)$ が閉凸集合である関数の族 $\bar{\gamma}(E)$ は凸解析において重要である。

そして、通常は、 $f \in \gamma^p(E)$ の共役関数と呼ばれる f^* を考える。共役関数とは、数学・物理・化学で有用な Legendre 変換を、Fenchel 他が整備した概念である。 $f \in \bar{\gamma}(E)$ については、 $f^* \in \bar{\gamma}(E^*)$ など、多くの重要な結果を示すことができる。

Prus の証明を砕いて解説する。補題 2.2 の条件を満たす関数 f_r をとる。 f_r は $[0, 2r]$ から $[0, 2r]$ への狭義単調増加関数で $f_r(0) = 0$ を満たす。この様に、 f_r は実数値関数なので $f_r \in \gamma^p(R)$ とみなせる。凸解析的に議論するので、 $D(f_r) = [0, 2r]$ 、 f_r の $(-\infty, 0)$ と $(2r, \infty)$ での値は ∞ としている。この後の議論に $(-\infty, 0)$ は実質的に無縁だが、凸解析風に形式を揃えた。ただし、異なる方向での議論も可能である。 $f_r \in \gamma^p(R)$ であるが、 $f_r \in \bar{\gamma}(R)$ かどうかは分からない。即ち、 f_r は凸解析の主流から少し外れている。

本節では、 $f_r \in \gamma^p(R)$ の、通常の共役関数ではなく双対 Young 関数 f_r^* を考える：

$$(3.1) \quad f_r^*(t) = \sup_{s \in [0, 2r]} \{st - f_r(s)\} \quad \text{for each } t \in [0, \infty) \subset R^* = R.$$

この定義から、 $f_r^*(t) > -\infty$ 、即ち f_r^* の値域が $(-\infty, \infty]$ と、次の関係が従う：

$$f_r(s) + f_r^*(t) \geq st \quad \text{for all } s \in [0, 2r], t \in [0, \infty).$$

f_r^* の $(-\infty, 0)$ での値も ∞ と考えている。(3.1) の $\sup_{s \in [0, 2r]}$ は $\sup_{s \in D(f_r)}$ としてもよい。

まず、 f_r^* が $[0, \infty)$ 上で凸関数であることを示す。 $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ 、 $a \in [0, 1]$ とすれば、

$$\begin{aligned} f_r^*(at_1 + (1-a)t_2) &= \sup_{s \in [0, 2r]} \{s(at_1 + (1-a)t_2) - f_r(s)\} \\ &\leq a \sup_{s \in [0, 2r]} \{st_1 - f_r(s)\} + (1-a) \sup_{s \in [0, 2r]} \{st_2 - f_r(s)\} \\ &= af_r^*(t_1) + (1-a)f_r^*(t_2). \end{aligned}$$

次に、 f_r^* が $[0, \infty)$ 上で下半連続を示す。 $a \in R$ ごとに、 $l_{\leq a}(f_r^*) = \{t \in [0, \infty) : f_r^*(t) \leq a\}$ が閉集合ならば f_r^* は下半連続である。そして、 $l_{\leq a}(f_r^*)$ は次の様に書き直せる：

$$\begin{aligned} l_{\leq a}(f_r^*) &= \{t \in [0, \infty) : f_r^*(t) \leq a\} \\ &= \{t \in [0, \infty) : \sup_{s \in [0, 2r]} \{st - f_r(s)\} \leq a\} \\ &= \cap_{s \in [0, 2r]} \{t \in [0, \infty) : st - f_r(s) \leq a\}. \end{aligned}$$

$s \in [0, 2r]$ ごとに $\{t \in [0, \infty) : st - f_r(s) \leq a\}$ は閉集合なので、 $l_{\leq a}(f_r^*)$ は閉集合である。整理する。 $f_r \in \gamma^p(R)$ の双対 Young 関数 f_r^* は $[0, \infty)$ 上で下半連続な凸関数である。

ここまで、支障なく議論が進んでいるように見える。しかし、振り返ると、 $f_r \in \gamma^p(R)$ ではあるが、 f_r^* がある点で実数値をとること、 $f_r^* \in \gamma^p(R^*)$ を確認していないことに気

づく. $D(f_r^*) \neq \emptyset$ であることを確認しないで, f_r の双対 Young 関数 f_r^* を考えた様に, f_r^* の双対 Young 関数 f_r^{**} を考えることは適切とは言えない.

$f_r(0) = 0$ と f_r が $[0, 2r]$ 上で非負より, 次のことを確認できる:

$$f_r^*(0) = \sup_{s \in [0, 2r]} \{s \times 0 - f_r(s)\} \leq 0, \quad 0 \times 0 - f_r(0) = 0.$$

したがって, $f_r^*(0) = 0 \in R$, $D(f_r^*) \neq \emptyset$, $f_r^* \in \gamma^p(R^*)$ を得る. 更に, $t \in [0, \infty)$ を任意に固定すれば, $|st - f_r(s)| \leq st + f_r(s) \leq 2rt + 2r$ for all $s \in [0, 2r]$. (3.1) より, $f_r^*(t) = \sup_{s \in [0, 2r]} \{st - f_r(s)\} \leq 2rt + 2r < \infty$. 即ち, $[0, 2r] \subset D(f_r^*) = [0, \infty)$ を得る.

また, $t_1, t_2 \in [0, \infty) \subset R^* = R$, $t_1 \leq t_2$ とすれば, $st_1 \leq st_2$ for all $s \in [0, 2r]$,

$$st_1 - f_r(s) \leq st_2 - f_r(s) \quad \text{for all } s \in [0, 2r],$$

$$f_r^*(t_1) = \sup_{s \in [0, 2r]} \{st_1 - f_r(s)\} \leq \sup_{s \in [0, 2r]} \{st_2 - f_r(s)\} = f_r^*(t_2).$$

即ち, f_r^* が $[0, \infty)$ 上で非減少 (したがって非負) であることが分かる. ここでの議論では, f_r が $[0, 2r]$ 上で非減少なことを使い, 狭義単調増加なことまでは使っていない.

議論を整理する. 補題 2.2 の f_r の双対 Young 関数 f_r^* は, $f_r^* \in \gamma^p(R^*)$, $f_r^*(0) = 0$ を満たし, $[0, \infty)$ 上で下半連続で凸な非減少関数である. このとき, 単に f_r^* が下半連続で凸と言ってもよい. しかし, f_r^* を, R^* 上の関数と考えているので, 非減少とは言えない.

$f_r^* \in \gamma^p(R^*)$ より, ここまでの f_r を f_r^* に代えて, f_r^* の双対 Young 関数 f_r^{**} を考える:

$$f_r^{**}(u) = \sup_{t \in D(f_r^*)} \{tu - f_r^*(t)\} \quad \text{for each } u \in [0, \infty) \subset R^{**} = R,$$

$$f_r^*(t) + f_r^{**}(u) \geq tu \quad \text{for all } t, u \in [0, \infty).$$

同様の議論で, f_r^{**} は, $f_r^{**} \in \gamma^p(R^{**})$, $f_r^{**}(0) = 0$ を満たし, $[0, \infty)$ 上で下半連続で凸な非減少関数である. 任意に $u \in [0, 2r]$ をとると, $f_r^*(t) = \sup_{s \in [0, 2r]} \{st - f_r(s)\}$ より,

$$tu - f_r^*(t) \leq tu - (ut - f_r(u)) = f_r(u) \quad \text{for all } t \in D(f_r^*) = [0, \infty),$$

$$f_r^{**}(u) = \sup_{t \in D(f_r^*)} \{tu - f_r^*(t)\} \leq f_r(u) \leq 2r.$$

したがって, $[0, 2r]$ 上で $0 \leq f_r^{**} \leq f_r \leq 2r$ を得る. 即ち, f_r^{**} は $[0, 2r]$ 上で実数値をとり, $[0, 2r] \subset D(f_r^{**}) \subset [0, \infty)$ である. 現在, これ以上の $D(f_r^{**})$ の情報には興味がない. 次のことを注意する; 閉区間 $[0, 2r]$ 上で下半連続な凸関数は $[0, 2r]$ 上で連続である.

$[0, 2r] \subset D(f_r^{**})$ を得たので, f_r^{**} を $[0, 2r]$ に制限する. ここから, 少し紛らわしいが, f_r^{**} はこの制限した関数の表記とする. f_r^{**} の $(-\infty, 0)$ と $(2r, \infty)$ での値は ∞ と考える.

f_r^{**} の, ここまでに得た, 必要な性質を整理する. f_r^{**} は, $D(f_r^{**}) = [0, 2r]$ 上で連続で凸な非減少関数であり, $f_r^{**}(0) = 0$ を満たす. また, $[0, 2r]$ 上で $0 \leq f_r^{**} \leq f_r \leq 2r$ より, f_r^{**} は $f_r^{**}([0, 2r]) \subset [0, 2r]$ と (zx) を満たす. したがって, f_r^{**} が $[0, 2r]$ 上で狭義単調

増加であることを示せば、補題 2.3 の f_x として、この f_r^{**} をとることができる。ただし、形式的な f_r^{**} ではなく、 $[0, 2r]$ 上の実数値関数としての f_r^{**} を採るべきだろう。そして、 f_r^{**} が $[0, 2r]$ 上で狭義単調増加を示す準備として、 $(0, 2r]$ 上で $0 < f_r^{**}$ を次に示す。

$t \in D(f_r^*) = [0, \infty)$ ごとに $tu - f_r^*(t)$ は u についての連続なアフィン関数である。 u ごとに、 $f_r^{**}(u)$ は、この連続なアフィン関数の族の $t \in D(f_r^*)$ についての $\sup$ をとっている。 f_r^{**} のこの形 (解釈) から、 f_r^{**} が下半連続な凸関数であることが導かれる。そして、 f_r^{**} のこの形 (解釈) と $f_r^{**} \leq f_r$ より、ここでの議論の要である次の関係が成立する：

$$(ep) \quad ep(f_r^{**}) = \overline{\text{co}}(ep(f_r)).$$

ここで、 $\overline{\text{co}}(ep(f_r))$ は $ep(f_r)$ を含む最小の閉凸集合、即ち、 $ep(f_r)$ の閉凸包を表す。

(ep) の詳細については、Ekeland–Temam [1] などの文献を参照して欲しい。

$g \leq f_r$ である下半連続な凸関数 $g \in \gamma^p(R)$ を任意に固定する。このとき、 $g \in \gamma^p(R)$ と $g \leq f_r$ より $[0, 2r] \subset D(g)$ であり、 $ep(g)$ は閉凸集合である。そして、 $g \leq f_r$ は $ep(f_r) \subset ep(g)$ を意味し、 $\overline{\text{co}}(ep(f_r))$ が $ep(f_r)$ の閉凸包と (ep) より、次の関係を得る：

$$ep(f_r) \subset \overline{\text{co}}(ep(f_r)) = ep(f_r^{**}) \subset ep(g), \quad \text{that is, } g \leq f_r^{**} \leq f_r.$$

$u \in (0, 2r]$ を任意に固定し、 $0 < f_r^{**}(u)$ を示す。次の関数 h と g を考える：

$$h(0) = 0, \quad h(s) = \frac{f_r(s)}{s} \quad \text{for each } s \in (0, 2r], \quad g(u) = \int_0^u h(s)ds \quad \text{for each } u \in [0, 2r].$$

補題 2.2 の f_r は、 $[0, 2r]$ 上で狭義単調増加、 $f_r(0) = 0$ なので、 h は $[0, 2r]$ 上で非減少関数であり、 $(0, 2r]$ 上で正である。前節と同様の議論から g は連続な凸関数なので、 $[0, 2r]$ 上で $g \leq f_r^{**} \leq f_r$ である。また、次の不等式から $0 < g(u) \leq f_r(u) \leq 2r$ を得る：

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_0^u h(s)ds = \int_0^u \frac{f_r(s)}{s}ds \leq u \times \frac{f_r(u)}{u} = f_r(u) \leq 2r, \\ g(u) &= \int_0^u h(s)ds \geq \int_{u/2}^u h(s)ds \geq \int_{u/2}^u \frac{f_r(s)}{s}ds \geq \frac{u}{2} \times \frac{f_r(\frac{u}{2})}{\frac{u}{2}} = f_r\left(\frac{u}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

更に、 $g \leq f_r^{**} \leq f_r$ と $0 < g(u)$ より、 $0 < g(u) \leq f_r^{**}(u) \leq f_r(u) \leq 2r$ が従う。

f_r^{**} が $D(f_r^{**}) = [0, 2r]$ 上で凸で非減少、 $f_r^{**}(0) = 0$ 、 $(0, 2r]$ 上で $0 < f_r^{**}$ から、 $[0, 2r]$ 上で f_r^{**} が狭義単調増加であることが分かる。しかし、本稿は学部 of 学生も対象とするので、直接、 $(0, 2r]$ 上で $0 < f_r^{**}$ を使って、 f_r^{**} が $[0, 2r]$ 上で狭義単調増加を導こう。

$u_1 < u_2$ を満たす $u_1, u_2 \in (0, 2r] \subset D(f_r^*)$ を任意にとる； $0 < u_2 - u_1$ 。 f_r^{**} が $[0, 2r]$ 上で非減少より、 $0 \leq f_r^{**}(u_2) - f_r^{**}(u_1)$ 。 $f_r^{**}(u_1) = \sup_{t \in D(f_r^*)} \{tu_1 - f_r^*(t)\}$ より、次の様な数列 $\{t_n\} \subset D(f_r^*) = [0, \infty)$ が存在する： $\lim_n(t_n u_1 - f_r^*(t_n)) = f_r^{**}(u_1) > 0$,

$$f_r^{**}(u_1) \leq t_n u_1 - f_r^*(t_n) + \frac{1}{n} \quad \text{for each } n \in \mathbb{N}.$$

後者を考慮すると, $n \in N$ ごとに, 次の関係を得る:

$$(3.2) \quad f_r^{**}(u_2) - f_r^{**}(u_1) \geq (t_n u_2 - f_r^*(t_n)) - (t_n u_1 - f_r^*(t_n) + \frac{1}{n}) = t_n(u_2 - u_1) - \frac{1}{n}.$$

したがって, $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ は上に有界である: $0 \leq t_n \leq \frac{f_r^{**}(u_2) - f_r^{**}(u_1) + 1}{u_2 - u_1}$ for all $n \in N$.
即ち, $\{t_n\}$ は, ある閉区間 $[0, d]$ に含まれ, ある $t_0 \in [0, d]$ に収束する部分列 $\{t_{n_k}\}$ をもつ.

$t_0 = 0$ を仮定すれば, $\lim_k(t_{n_k} u_1) = t_0 u_1 = 0$ と f_r^* が非負より矛盾を得る:

$$\begin{aligned} 0 &< f_r^{**}(u_1) = \lim_k(t_{n_k} u_1 - f_r^*(t_{n_k})) \\ &= \lim_k(t_{n_k} u_1) + \lim_k(-f_r^*(t_{n_k})) = \lim_k(-f_r^*(t_{n_k})) \leq 0. \end{aligned}$$

したがって, $t_0 \in (0, d]$ である. このことと (3.2) より, 次の関係を得る:

$$f_r^{**}(u_2) - f_r^{**}(u_1) \geq t_0(u_2 - u_1) > 0.$$

即ち, $0 = f_r^{**}(0) < f_r^{**}(u_1) < f_r^{**}(u_2)$ を得る. f_r^{**} は $[0, 2r]$ 上で狭義単調増加である.

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

京都大学 牧野 和久 先生には, 今回の研究集会の開催にご尽力いただいたことに感謝いたします. そして, 秋田県立大学 木村 寛 先生, 千葉大学 青山 耕治 先生には, 様々なご支援ご厚情と, この論稿の発表の機会をいただいたことに感謝いたします.

REFERENCES

- [1] I. Ekeland and R. Temam, “*Convex Analysis and Variational Problems*” North-Holland, Amsterdam, Oxford, 1976.
- [2] R. Kubota, W. Takahashi and Y. Takeuchi, “*Extensions of Browder’s demiclosedness principle and Reich’s lemma and their applications*” Pure and Applied Functional Anal. **1** (2016), 63–84.
- [3] S. Prus, “*Geometrical background of metric fixed point theory*” in Handbook of metric fixed point theory (W. A. Kirk and B. Sims Eds.), 2001, 93–132, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [4] H. K. Xu, “*Inequalities in Banach spaces with applications*”, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.
- [5] C. Zălinescu, “*On uniformly convex functions*”, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344–374.

(Yukio Takeuchi) TAKAHASHI INSTITUTE FOR NONLINEAR ANALYSIS, 1-11-11 NAKAZATO, MINAMI, YOKOHAMA 232-0063, JAPAN

E-mail address: aho314159@yahoo.co.jp