

〇でない葉不変量をもつ葉層

北大理 鈴木治夫 (Haruo Suzuki)

§ 1 序

境界をもたないパラコンパクト・ハウスドルフ C^{∞} -多様体 M 上の余次元 q の C^{∞} -葉層を考へ、その一つの葉を L とする。葉の法ベクトル束 $\nu(\mathcal{F})$ 上の Bott 接続 $[B]$ とリーマン接続とのアッファイン結合から $\nu(\mathcal{F}) \times \mathbb{R}$ 上の接続が定まるが、その曲率行列によつて各奇数次 Chern 多項式 c_i に対し、葉不変量 $\bar{h}_i(\mathcal{F}, L; M) \in H_{DR}^{2i-1}(M)$ が構成される。この概念の起りは G. Reeb [R] によるもので、その後 B. Reinhart [Ri] や R. Goldman [G] によつて発展せられた。

$\{X_1, \dots, X_k\}$ が M の接ベクトルの $\mathbb{R}$ -frame field で、余次元 q の葉層 $\mathcal{F}$ に横断的となり、 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ の葉は $\mathcal{F}'$ の葉に含まれる) とする。また各 X_i は $\mathcal{F}'$ を保ち、 $X_1, \dots, X_k$ は $\mathcal{F}'$ を法とするリー環をなすものとする。

定理 1. 上の仮定の下で $\mathcal{F}'$ と $X_1, \dots, X_k$ と $\mathcal{F}$ によつて定ま

る葉層, L を Σ の葉, L' を Σ' の葉で $L \subset L'$ となるものとし,
その包含写像 $\varepsilon_j: L \rightarrow L'$ とする. このとき,

$$R_i(\Sigma, L; M) = \begin{cases} j^* R_i(\Sigma', L'; M) & 1 \leq i \leq q-k \\ 0 & i > q-k. \end{cases}$$

この結果は筆者による Σ と Σ' の 2 次特性類の間の等式に関する定理 [S1] の類似である.

次いで, 0 ではない R_i -不変量をもつ巾零葉層を構成し, 定理 1 を用いてこの葉層を保つ局所自由, 横断的 q -リー群の作用は存在し, 正しいことを示す. また H を連結単連結リー群とすると, 上述の巾零葉層を平坦主 H -束にリフトしたものは, 再び定理 1 によって 0 ではない R_i -不変量をもつことがいえる.

§2 葉不変量と横断 R -frame field

$T(M)$ を M の接ベクトル束とし, $F = T(\Sigma)$ を Σ の葉の接ベクトル全体から成る $T(M)$ の部分ベクトル束とする. Σ の法ベクトル束は $\nu(\Sigma) = T(M)/F$ と表わされる. ∇^B は $\nu(\Sigma)$ 上の Σ の Bott 接続, K_B をその曲率行列とする. c_i を i 次 Chern 多項式とする. K_B は Σ の独立な q 個の定義微分形式のイデアルに含まれる (Bott 消滅定理) から, Σ の葉 L に対し,

$$c_i(K_B)|_L = 0.$$

∇^R を $\mathcal{V}(\Sigma)$ 上のリーマン接続, K_R をその曲率行列とする.

$\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ を自然射影写像とし, $\pi^*\mathcal{V}(\Sigma) = \mathcal{V}(\Sigma) \times \mathbb{R}$ 上の接続を

$$\nabla = t\nabla^B + (1-t)\nabla^R \quad (t \in \mathbb{R})$$

によって定める. 自明束 $\pi: M \times I \rightarrow M$ のファイバー上の積分作用素を π_* とかくと, K_R が歪対称であることから,

$$d(\pi_*(C_0(K)|_{M \times I}) = C_0(K_B) \quad \text{奇数}$$

がいえる. ゆえに

$$d(\pi_*(C_0(K)|_{M \times I})|_L = C_0(K_B)|_L = 0.$$

$E(h_1, h_3, \dots, h_l)$, $l = 2 \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor - 1$ を $h_1, h_3, \dots, h_l$ によって生成される外積多元環で, $\deg h_i = 2i-1$ とする. 次数つき多元環の準同形写像 $\alpha_{\Sigma, L; M}: E(h_1, h_3, \dots, h_l) \rightarrow H_{DR}^*(M)$ が

$$\alpha_{\Sigma, L; M}(h_i) = [\pi_*(C_0(K)|_{M \times I})|_L] \in H_{DR}^{2i-1}(L)$$

$$i = 1, 3, \dots, l$$

によって定義される. 右辺は ∇^B, ∇^R のとり方によらないで, Σ と L だけで一意的に定まり, 葉層の横断写像に関して自然性をもつことがいえる. $\rho_i(\Sigma, L; M) = \alpha_{\Sigma, L; M}(h_i)$ といえ, これを ρ_i -葉不変量とよびこゝにする.

$\Gamma(\Sigma)$ は束 Σ の C^∞ -sections 全体の加群を表わすものとする. $\gamma \in \Gamma(T(M))$ とし, 任意の $Z \in \Gamma(F)$ に対して

$$[\gamma, Z] \in \Gamma(F)$$

と仮定するとき、 $\mathcal{F}$ は 保ち という。 $C(M)$ は M 上の C^∞ -関数全体の加群とする。 $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(T(M))$ に対して $\alpha_{ij}^l \in C(M)$, $Y_{ij} \in \Gamma(F)$, $i, j, l = 1, \dots, k$ が存在し、

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^k \alpha_{ij}^l X_l + Y_{ij}$$

と仮定するとき、 $X_1, \dots, X_k$ は 保ち法とするリー環 を定めるという。 $\{X_1, \dots, X_k\}$ が $\mathcal{F}$ に横断的な k -frame field で、 $X_1, \dots, X_k$ が 保ち法とするリー環 を定めるならば、各 X_i によって定義される自明直線束を $\mathcal{F}_i$ とかくとき、部分束

$$F' = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{F}_i \oplus F \subset T(M)$$

は積分可能である。 F' に対応する葉層を $\mathcal{F}'$ とかき、 $X_1, \dots, X_k$ と $\mathcal{F}$ によって定まる葉層という。 あきらかに $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ 。

§3 拡大葉層の葉不変量

定理1. $\mathcal{F}$ は M 上の余次元 q の葉層、 $\{X_1, \dots, X_k\}$ は M 上の余次元 k の葉層 $\mathcal{F}$ に横断的な k -frame field で $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ であるとする。 各 X_i は $\mathcal{F}$ を保ち、 $X_1, \dots, X_k$ は $\mathcal{F}$ を法とするリー環を定めるものとする。 $\mathcal{F}'$ は $X_1, \dots, X_k$ と $\mathcal{F}$ によって定まる葉層とし、 L は $\mathcal{F}$ の葉、 L' は $\mathcal{F}'$ の葉で $L \subset L'$ となるものとする。 $j: L \rightarrow L'$ を包含写像とする。 このとき、

$$h_i(\mathcal{F}, L; M) = \begin{cases} j^* h_i(\mathcal{F}', L'; M) & 1 \leq i \leq q-k \\ 0 & i > q-k. \end{cases}$$

証明 $T(\tilde{\mathcal{A}}) = \tilde{F}$ のホイト = -和分解 $\tilde{F} = F \oplus \tilde{V}$ を用い
て、法ベクトル束の関係

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \tilde{\mathcal{Z}}_i \oplus \tilde{V}, \quad V = \nu(\mathcal{A}), \quad \tilde{V} = \nu(\mathcal{A}')$$

が得られる。 $\tilde{\nabla}$ は $\tilde{V}$ 上の $\mathcal{A}'$ の Bott 接続, ∇' は $\bigoplus_{i=1}^k \tilde{\mathcal{Z}}_i$ 上の大域
の $\mathbb{R}$ -frame field に関する自明な接続とし, V 上の接続を,

$$\nabla = \nabla' \oplus \tilde{\nabla}$$

によって定める。 $\bigoplus_{i=1}^k \tilde{\mathcal{Z}}_i \oplus \tilde{V} \subset T(M)$ は部分ベクトル束であ
るから, $s \in \Gamma(\tilde{V})$ はそのまゝ, $\Gamma(\bigoplus_{i=1}^k \tilde{\mathcal{Z}}_i \oplus \tilde{V}) \subset \Gamma(T(M))$ の元と
みなされる。

$\rho: T(M) \rightarrow \tilde{V} = T(M)/F$ を射影写像とする。 X_i は $\mathcal{A} \ni$ 保つ
から,

$$[X, X_i] \in \Gamma(F) \quad X \in \Gamma(F).$$

ゆゑに

$$\nabla'_X(X_i) = 0 = \rho([X, X_i]) \quad i=1, \dots, k$$

となり, 任意の $s' \in \Gamma(\bigoplus_{i=1}^k \tilde{\mathcal{Z}}_i) \subset \Gamma(T(M))$ に対し

$$\nabla_X(s') = \nabla'_X(s') = \rho([X, s']).$$

$\tilde{\rho}: T(M) \rightarrow \tilde{V} = T(M)/F'$ を射影写像とすると, 仮定により $\tilde{F}$
 $= F \oplus \tilde{V} \subset T(M)$ は積分可能であるから, 任意の $\tilde{s} \in \Gamma(\tilde{V}) \subset$
 $\Gamma(T(M))$ および $X \in \Gamma(F)$ に対し

$$([X, \tilde{s}] \text{ の } \tilde{\mathcal{Z}}_i\text{-成分}) = 0$$

となる。したがって $\rho([X, \tilde{s}]) = \tilde{\rho}([X, \tilde{s}])$ が得られ,

$$\begin{aligned}\nabla_X(\tilde{s}) &= \tilde{\nabla}_X(\tilde{s}) = \tilde{p}([X, \tilde{s}]) \\ &= p([X, \tilde{s}]).\end{aligned}$$

任意の $s \in \Gamma(\bigoplus_{i=1}^R \tilde{s}_i \oplus \tilde{V})$ は

$$s = s' \oplus \tilde{s}$$

の形であるから, $X \in \Gamma(F)$ に対し

$$\begin{aligned}\nabla_X(s) &= \nabla'_X(s') + \tilde{\nabla}_X(\tilde{s}) \\ &= p([X, s']) + p([X, \tilde{s}]) \\ &= p([X, s' + \tilde{s}]) \\ &= p([X, s]).\end{aligned}$$

したがって ∇ は $\tilde{V}$ の Bott 接続と取る.

$\{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{q-k}\} \in \tilde{V}$ の局所 $(q-k)$ -frame section とする.

$\{s_1, \dots, s_q\} = \{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{q-k}, X_1, \dots, X_k\}$ とおけば, これは V の局所 q -frame section と取る. $\tilde{\theta} \in \tilde{V}$ の $\{\tilde{s}_\lambda\}$ に関する接続行列とする. ∇ の $\{s_\mu\}$ に関する接続行列 θ は

$$\theta = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. $\tilde{\nabla}^0 \in \tilde{V}$ 上の定まったリーマン接続とし, $\tilde{\theta}^0 \in \{\tilde{s}_\lambda\}$ に関する $\tilde{\nabla}^0$ の接続行列とする. $V = \bigoplus_{i=1}^R \tilde{s}_i \oplus \tilde{V}$ 上の接続 $\nabla^0 = \nabla' \oplus \tilde{\nabla}^0$ の $\{s_\mu\}$ に関する接続行列は

$$\theta^0 = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\pi^*V = V \times \mathbb{R}$ 上の接続を

$$\nabla^* = t\nabla + (1-t)\nabla^0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

によって定める. その $\{s_\mu\}$ に関する接続行列は,

$$\theta^* = t\theta + (1-t)\theta^0.$$

Ω^* を ∇^* の $\{s_\mu\}$ に関する曲率行列とする. このとき

$$\Omega^* = d\theta^* - \theta^* \wedge \theta^*.$$

∇^* と同様, $\pi^*\tilde{V} = \tilde{V} \times \mathbb{R}$ 上の接続 $\tilde{\nabla}^*$, $\{\tilde{s}_\mu\}$ に関する接続行列 $\tilde{\theta}^*$ および曲率行列 $\tilde{\Omega}^* = d\tilde{\theta}^* - \tilde{\theta}^* \wedge \tilde{\theta}^*$ が得られ,

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$I^i(GL(q; \mathbb{R}))$ は リー環 $\mathfrak{gl}(q; \mathbb{R})$ 上の i 次斉次随伴不変多項式全体のベクトル空間とする. $I^i(GL(q-k; \mathbb{R}))$ も同様に定義されるが, 自然対応によってこれは $I^i(GL(q; \mathbb{R}))$ の部分空間とみることができる. したがって $c_i \in I^i(GL(q; \mathbb{R}))$ に対しても $c_i(\tilde{\Omega}^*)$ $i \leq q-k$ はいぬをもち,

$$\begin{aligned} c_i(\Omega^*) &= c_i(\tilde{\Omega}^*) & 1 \leq i \leq q-k \\ &= 0 & i > q-k. \end{aligned}$$

ゆえに $1 \leq i \leq q-k$ に対して

$$\begin{aligned} R_i(\mathfrak{g}, L; M) &= [\pi_*(c_i(\Omega^*)|_{M \times I})|_L] \\ &= [\pi_*(c_i(\tilde{\Omega}^*)|_{M \times I})|_L] \\ &= j^*[\pi_*(c_i(\tilde{\Omega}^*)|_{M \times I})|_L] \end{aligned}$$

$$= j^* h_i(\pi, L; M),$$

$i > q - k$ に対しては $h_i(\pi, L; M) = 0$. ■

§4 巾零葉層

巾零リー群の作用による軌道葉層を巾零葉層という. G は n 次元連結単連結リー群, $G_0 < G$ は一様疎部分群すなわち $K = G/G_0$ がコンパクトであるとする.

定理2. 多様体 $K \times \mathbb{R}$ の上に余次元1の巾零葉層系が存在し, $K \times \{0\}$ を葉にもち,

$$h_1(\pi, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}) \neq 0.$$

証明 [S2] 参照.

$K \times \mathbb{R}$ 上の葉層系は, $m \geq 1$ に対し $\mathbb{R}^{m-1}$ 上の点葉層との積をとることにより,

$$K \times \mathbb{R}^m = (K \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m-1}$$

の上の余次元 m 葉層に延長される. これを同じ記号系で表わすことにする. F を $K \times \mathbb{R}$ 上の系の接ベクトルから成る $T(K \times \mathbb{R})$ の部分束, V を $K \times \mathbb{R}$ 上の系の法ベクトル束, V_m を $K \times \mathbb{R}^m$ 上の系の法ベクトル束とする. $\bar{p}: K \times \mathbb{R}^m \rightarrow K \times \mathbb{R}$ を $K \times \mathbb{R}^m = (K \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m-1}$ の第一因子への射影写像とし, $\bar{V} = \bar{p}^* V = V \times \mathbb{R}^{m-1}$ とおく. ε^{m-1} を $K \times \mathbb{R}^m$ 上の自明 $(m-1)$ ベクトル束とすると,

$$V_m = \bar{V} \oplus \varepsilon^{m-1}.$$

補題 3. $h_1(\mathbb{R}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m) = h_1(\mathbb{R}, K \times \{0\}, K \times \mathbb{R})$.

証明 $\nabla^B \in V$ 上の $\mathbb{R}$ の Bott 接続とする. $X \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R}))$ は写像

$$(k, t_1, \dots, t_m) \mapsto (X(k, t_1), 0) \in T(K \times \mathbb{R}) \times T(\mathbb{R}^{m-1})$$

によって $\Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m))$ の元と同一視される. $\bar{s} \in \Gamma(V)$ は $\Gamma(\bar{V})$ の元と自然に同一視され, これを同一記号 $\bar{s}$ で表わす.

$\Gamma(V_m) = \Gamma(\bar{V} \oplus \varepsilon^{m-1})$ は $\Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V})$ と $\mathbb{R}^{m-1}$ の座標接ベクトル場 Y_i ($i=1, \dots, m$) が定める section $s_i \in \Gamma(\varepsilon^{m-1})$ によって生成され, Y_i はまた $K \times \mathbb{R}^m$ の接ベクトル場とみることが出来る.

V_m 上の接続 ∇ を

$$\nabla_X(\bar{s}) = \nabla_X^B(\bar{s}) \in \Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V})$$

$$\bar{s} \in \Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V}), \quad X \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R})) \subset \Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m)),$$

$$\nabla_{Y_i}(\bar{s}) = 0 \quad \bar{s} \in \Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V}),$$

$$\nabla_Y(s_i) = 0 \quad Y \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m))$$

によって定める. $p: T(K \times \mathbb{R}^m) \rightarrow V_m = T(K \times \mathbb{R}^m)/F \times \mathbb{R}^{m-1} = \bar{V} \oplus \varepsilon^{m-1}$ および $\bar{p}: T(K \times \mathbb{R}) \rightarrow V = T(K \times \mathbb{R})/F$ を射影写像とすると, $Y \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R})) \subset \Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m))$ に対して $\bar{p}(Y) = p(Y) \in \Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V})$. $Z \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R}))$ に対して $\bar{s} = \bar{p}(Z) = p(Z)$ とおけば, $X \in \Gamma(F) \subset \Gamma(F \times \mathbb{R}^{m-1})$ とするとき

$$[X, Z] \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R})) \subset \Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m))$$

であるから,

$$\nabla_X(\bar{s}) = \nabla_X^B(\bar{s}) = \bar{p}([X, Z]) = p([X, Z]).$$

$s_i = p(Y_i) \in \Gamma(\mathcal{E}^{m-1}) \subset \Gamma(V_m)$ ($i=1, \dots, m-1$) ならば

$$\nabla_X(s_i) = 0 = p([X, Y_i])$$

であるから, ∇ は V_m 上の $K \times \mathbb{R}^m$ にあける ∇ の Bott 接続である.

$\nabla^0 \in \mathcal{E}^{m-1}$ の $(m-1)$ -frame section $\{s_1, \dots, s_{m-1}\}$ に関する自明な接続とすれば, ∇ の定義から

$$\nabla = \bar{p}^* \nabla^B \oplus \nabla^0.$$

$\bar{\theta}$ を ∇^B の (局所) section $\bar{s} \in \Gamma(V)$ に関する接続形式とすれば, V_m の (局所) m -frame section $\{\bar{s}, s_1, \dots, s_{m-1}\}$ に関する ∇ の接続行列は,

$$\theta = \begin{bmatrix} \bar{p}^* \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 1 の証明と同様の方法により,

$$h_1(\mathfrak{A}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m) = \bar{p}^* h_1(\mathfrak{A}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}).$$

1 かるに $\bar{p}|_{K \times \{0\}}$ は恒等写像であるから,

$$h_1(\mathfrak{A}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m) = h_1(\mathfrak{A}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

定理 1, 2 および補題 3 から, $K \times \mathbb{R}^m$ の $\mathfrak{A}$ を保つリー群の作用に関して次の結論がいえる.

定理 4. $K \times \mathbb{R}^m$ に延長された余次元 m の葉層 $\mathfrak{A}$ に対し, 局所自由横断的 $\mathfrak{A}$ を保つリー群の作用は存在しない.

証明 リー群 G_1 が $K \times \mathbb{R}^m$ の上に局所自由に横断的に作用し、 $\tilde{\omega}$ を保つとする。定理 1 を $\tilde{\omega}$, $L = K \times \{0\}$, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ および G_1 の作用の下における G_1 のリー環の基底ベクトルの像として定まる m -frame field $\{X_1, \dots, X_m\}$ に適用する。この場合 $\tilde{\omega}'$ はたゞの葉 $L' = K \times \mathbb{R}^m$ をもつ葉層となるから、

$$h_1(\tilde{\omega}', L'; K \times \mathbb{R}^m) = 0.$$

$j: K \times \{0\} \rightarrow K \times \mathbb{R}^m$ を包含写像とすると、定理 1 から

$$\begin{aligned} h_1(\tilde{\omega}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m) &= j^* h_1(\tilde{\omega}', L'; K \times \mathbb{R}^m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ゆえに補題 3 により

$$h_1(\tilde{\omega}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}) = 0$$

となり、定理 2 に反する。 ■

§5 0でない h_1 -不変量をもつ葉層の構成

G , G_0 および K は上に述べたものとする。 H を連結単連結リー群、 $f: G_0 \rightarrow H$ を準同形写像とする。 f から定まる G_0 の H 上の作用により主 H -束 $E = (G \times \mathbb{R}^m) \times_{G_0} H$ が得られる。 $\pi: (G \times \mathbb{R}^m) \times H \rightarrow E = (G \times \mathbb{R}^m) \times_{G_0} H$ を射影写像とする。 $p_0: G \rightarrow G/G_0 = K$ を射影写像とすると、 $\tilde{\omega}$ は被覆写像 $p_0 \times \text{id}: G \times \mathbb{R}^m \rightarrow K \times \mathbb{R}^m$ に対する $G \times \mathbb{R}^m$ 上の被覆葉層 $\tilde{\omega}$ を定める。 $(G \times \mathbb{R}^m) \times H$ の上の G_0 の対角作用は、余次元 $m + \dim H$

の葉層 $\{\bar{L} \times \{R\}\} \subset \bar{\Sigma}$, $R \in H$ を保つから, E 上の余次元 $m + \dim H$ の葉層 $\bar{\Sigma}$ が得られる. あきらかに $\bar{L} = \alpha(G \times \{0\} \times \{R\})$ ($R \in H$) は $\bar{\Sigma}$ の葉で, その h_1 -不変量について [S1] の Section 3 と同様の方法により, 次の結論が得られる.

定理 5. $r_1(\bar{\Sigma}, \bar{L}; E) \neq 0$.

証明 $\tilde{\Sigma} = \{\alpha(G \times \mathbb{R}^m \times \{R\}) \mid R \in H\}$ は E 上の余次元が $\dim H = k$ の葉層となり, 定義からあきらかに $\bar{\Sigma} \subset \tilde{\Sigma}$. 定理 1 を $M = E$, $\Sigma = \bar{\Sigma}$, $\tilde{\Sigma}$ および H の右作用の下における H のリ-環の基底ベクトルの像として定まる $\tilde{\Sigma}$ の横断 k -frame field $\{X_1, \dots, X_k\}$ に適用する. この場合 $\bar{\Sigma}$, $\tilde{\Sigma}$ 共に H の右作用で不変であるから, 各 X_i は $\bar{\Sigma}$, $\tilde{\Sigma}$ を保つ. $X_1, \dots, X_k$ と $\bar{\Sigma}$ によって定まる葉層を Σ' とかく. L' を Σ' の葉とし, $L' \cap \bar{L}$ となるものがあると, 定理 1 により,

$$r_1(\bar{\Sigma}, \bar{L}; E) = r_1(\Sigma', L'; E).$$

$\varphi: E \rightarrow K \times \mathbb{R}^m$ を束射影写像, すなわち

$$\varphi(\alpha(g, x, R)) = (p_0(g), x)$$

とする. φ は $\tilde{\Sigma}$ に横断的であり, 葉層に対応する部分ベクトル束の一致から $\varphi^*(\Sigma') = \tilde{\Sigma}'$. $h_1(\Sigma', L'; E)$ の定義における Bott 接続およびリーマン接続として, $r_1(\Sigma', K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m)$ の定義におけるこれらの接続の φ による引きもとしをとることができから,

$$P_1(\overline{\alpha}, L; E) = \varphi^* P_1(\overline{\alpha}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m).$$

仮定により H は連結単連結であるから, φ は同形写像

$$\pi_1(E) \xrightarrow{\cong} \pi_1(K \times \mathbb{R}^m)$$

をひきおこし, このことから同形写像

$$\varphi_*: H_1(E; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_1(K \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$$

が得られる。

$$\varphi^*: H_{DR}^1(K \times \mathbb{R}^m) \xrightarrow{\cong} H_{DR}^1(E)$$

を得られる。ゆえに上述の式と定理2および補題3から,

$$P_1(\overline{\alpha}, L; E) = P_1(\overline{\alpha}, L; E) \neq 0.$$

REFERENCES

- [B] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Math. 279, Springer-Verlag, Berlin and New York 1976, 294-307.
- [G] R. Goldman, Characteristic classes on the leaves of foliated manifolds, Ph. D. Thesis John Hopkins Univ. 1973.
- [R] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actualités Sci. Indust., Herman, Paris 1952.
- [Ri] B. Reinhart, Holonomy invariants for framed foliations, Technical Report No. 32, Univ. of Maryland 1972.

- [S1] H. Suzuki, Foliation preserving Lie group actions and characteristic classes, Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 633-637.
- [S2] H. Suzuki, Leaf invariants of some nilfoliations, Preprint.