

$(\log^+)^p$ の不変部分空間

信州大学理学部 真次康夫 (Yasuo Matsugu)

1 Privalov 空間の定義

n を自然数、 $B \equiv B_n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| < 1\}$ を複素 Euclid 空間 $\mathbf{C}^n$ の単位球、 $S_n \equiv S = \partial B = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| = 1\}$ を単位球面とする。 $\sigma \equiv \sigma_n$ は S 上の正規化された (即ち $\sigma(S) = 1$ である) Euclid 的測度を表し、 $H(B)$ は B 上の正則関数全体を表すものとする。

Definition 1 $[0, \infty)$ 上の非定数非負非減少な凸関数 φ に対し、Hardy-Orlicz 空間 $H_\varphi(B)$ を次のように定義する：

$$H_\varphi(B) := \{f \in H(B) : \sup_{0 \leq r < 1} \int_S \varphi(\log^+ |f_r|) d\sigma < \infty\}.$$

但し、 $f_r(\zeta) = f(r\zeta)$, $0 \leq r < 1, \zeta \in S$, である。

周知のように、 $H_\varphi(B)$ は、 $\varphi(t) = t$ のとき、Nevanlinna 空間 $N(B)$ に等しく、 $\varphi(t) = e^{pt}$, $0 < p < \infty$, のとき、Hardy 空間 $H^p(B)$ に一致する。Subbotin[8] に従い、 $\varphi(t) = t^p$, $1 < p < \infty$ のとき、 $H_\varphi(B)$ を $N^p(B)$ で表し、Privalov 空間と呼ぶ：

$$N^p(B) = \{f \in H(B) : \sup_{0 \leq r < 1} \int_S (\log^+ |f_r|)^p d\sigma < \infty\}.$$

B 上の Smirnov 空間を $N^+(B)$ で表す：

$$N^+(B) = \{f \in N(B) : \lim_{r \uparrow 1} \int_S \log^+ |f_r| d\sigma = \int_S \log^+ |f^*| d\sigma\}.$$

但し、 $f^*(\zeta) = \lim_{r \uparrow 1} f_r(\zeta)$, a.e. $\zeta \in S[\sigma]$, である。包含関係 $N(B) \supset N^+(B) \supset N^p(B)$ ($1 < p < \infty$) が成立する事は容易に示される。

Definition 2 B 上の複素数値関数 f に対し、 f の radial maximal function $\text{Mrad } f : S \rightarrow [0, \infty]$ を $(\text{Mrad } f)(\zeta) := \sup_{0 \leq r < 1} |f_r(\zeta)|$, $\zeta \in S$, によって定義する。 $1 < p < \infty$ に対し、関数空間 $M^p(B)$ を次のように定義する：

$$M^p(B) := \{f \in H(B) : \log^+(\text{Mrad } f) \in L^p(\sigma)\} = \{f \in H(B) : \int_S [\log^+(\text{Mrad } f)]^p d\sigma < \infty\}.$$

Proposition 1 (cf. [8], p.231, Theorem 1.) $1 < p < \infty$, $f \in N(B)$ に対し、次の 5 条件は同値である：

1. $f \in N^p(B)$.

2. $f \in N^+(B)$ かつ $\log^+ |f^*| \in L^p(d\sigma)$.

3.

$$\lim_{r \uparrow 1} \int_S (\log^+ |f_r|)^p d\sigma = \int_S (\log^+ |f^*|)^p d\sigma < \infty.$$

4. $\{(\log^+ |f_r|)^p\}_{0 \leq r < 1}$ は測度 σ に関して一様可積分である。

5. $f \in M^p(B)$.

便宜のため、 $N^+(B)$ を $N^1(B)$ で表す: $N^1(B) \equiv N^+(B)$.

2 $N^p(B)$ ($1 \leq p < \infty$) の位相

不等式 $\log^+ t \leq \log(1+t) \leq \log^+ t + \log 2$ ($0 \leq t \leq \infty$) に注意すると

$$N^p(B) = \{f \in H(B) : \sup_{0 \leq r < 1} \int_S [\log(1 + |f_r|)]^p d\sigma < \infty\} \quad (1 < p < \infty).$$

Definition 3 $1 \leq p < \infty, f \in H(B)$ に対し、

$$\|f\|_{N^p} := \sup_{0 \leq r < 1} \left(\int_S [\log(1 + |f_r|)]^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義する。

Definition 4 $1 \leq p < \infty$ と S 上の可測関数 f に対し、

$$\|f\|_p := \left(\int_S [\log(1 + |f|)]^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} = \|\log(1 + |f|)\|_{L^p(\sigma)}$$

と定義する。 $\|f\|_p < \infty$ を満たす S 上の可測関数 f 全部の集合を $(\log^+)^p(\sigma)$ で表す。

Proposition 2 (cf. [8], p.234, §4.) $1 \leq p < \infty$ とする。

1. $\{f, g\} \subset (\log^+)^p(\sigma), \alpha \in \mathbf{C}$ に対し、

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \|fg\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

$$\min\{1, |\alpha|\} \|f\|_p \leq \|\alpha f\|_p \leq \max\{1, |\alpha|\} \|f\|_p.$$

2. $d_p(f, g) = \|f - g\|_p, \{f, g\} \subset (\log^+)^p(\sigma)$, と定義すれば、 d_p は $(\log^+)^p(\sigma)$ 上の平行移動不変 (translation-invariant) かつ完備な距離である。

3. $(\log^+)^p(\sigma)$ は距離 d_p に関して F 代数 (F -algebra) をなす。

4. 任意の $f \in N^p(B)$ に対して、 $\|f\|_{N^p} = \|f^*\|_p$.
5. $\rho_p(f, g) = \|f - g\|_{N^p}$, $\{f, g\} \subset (\log^+)^p(\sigma)$, と定義すれば、 ρ_p は $N^p(B)$ 上の平行移動不変かつ完備な距離である。
6. $N^p(B)$ は距離 ρ_p に関して F 代数をなす。
7. $f \in N^p(B)$ に対し、 $\Phi(f) := f^*$ と定義し、 $\tilde{N}^p := \Phi(N^p(B))$ と置けば、 $\tilde{N}^p$ は $(\log^+)^p(\sigma)$ の閉部分代数であり、 Φ は $N^p(B)$ から $\tilde{N}^p$ の上への代数同型かつ等距離写像である。

Remark(cf. [8], p.233.) 距離空間 $(N^p(B), \rho_p)$ の完備性は次の評価式から得られる： $1 \leq p < \infty$, $f \in N^p(B)$, $z \in B$ ならば

$$\log(1 + |f|) \leq \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^{\frac{n}{p}} \|f\|_{N^p}.$$

Proposition 3 (cf.[8], p.234, Theorem 4.)

1. $1 \leq p < \infty$, $f \in N^p(B)$ ならば、 $\lim_{r \uparrow 1} \|f_r - f\|_{N^p} = 0$.
2. $1 \leq p < \infty$ ならば、正則多項式の全体は $N^p(B)$ の稠密な部分集合であり、従って、 $N^p(B)$ は可分な F 代数である。

3 $(\log^+)^p(\sigma_1)$ の不変部分空間

J.W.Roberts と M.Stoll は論文 [5] で、次の事実を示した： M が $N^+(B_1)$ の、 $\{0\}$ とは異なる、閉イデアルであれば、 B_1 上の内部関数 (inner function) φ があって、 $M = \varphi N^+(B_1)$ と表される。 $N^p(B_1)$ ($1 < p < \infty$) の閉イデアルに関しては、M.Mochizuki [4] が対応する結果を示した： M が $N^p(B_1)$ の、 $\{0\}$ とは異なる、閉イデアルであれば、 B_1 上の内部関数 (inner function) φ があって、 $M = \varphi N^p(B_1)$ と表される。

次は、 $L^2(\sigma_1)$ の不変部分空間に関する Beurling-Helson-Lowdenslager の定理 (cf.[1], Theorems 2 and 3) を $(\log^+)^p(\sigma_1)$ の不変部分空間に対して考察した結果であり、上記 J.W.Roberts-M.Stoll-M.Mochizuki の定理を含むものである：

Proposition 4 (cf.[3]) $1 \leq p < \infty$ とする。

1. M を $(\log^+)^p(\sigma_1)$ の単純不変部分空間 (simply invariant subspace) とする。(即ち、 M は $(\log^+)^p(\sigma_1)$ の閉部分線形空間であり、 $\chi M \subset M$, $\chi M \neq M$ を満たす。ここで、 χ は S_1 上の恒等関数である。) このとき、 S_1 上の絶対値 1 をもつ可測関数 (unimodular function) φ が存在して、 $M = \varphi \tilde{N}^p$ が成立する。

2. M を $(\log^+)^p(\sigma_1)$ の複不変部分空間 (doubly invariant subspace) とする。(即ち、 M は $(\log^+)^p(\sigma_1)$ の閉部分線形空間であり、 $\chi M = M$ を満たす。) このとき、 S_1 に含まれる可測集合 E が存在して、 $M = \chi_E(\log^+)^p(\sigma_1)$ が成立する。ここで、 χ_E は E の定義関数である。

4 $N^p(B)$ ($1 \leq p < \infty$) の等距離写像

Proposition 5 (cf.[2],[6],[7]) $1 \leq p < \infty$ とする。

1. A を $N^p(B)$ から $N^p(B)$ の中への等距離線形写像とする。このとき、 B 上の内部関数 Ψ 、 B から B の中への内部写像 (inner map) Φ が存在して、次が成立する：

$$(a) \quad (Af)(z) = \Psi(z)f(\Phi(z)), \quad \forall f \in N^p(B), \quad \forall z \in B.$$

$$(b) \quad \int_S h d\sigma = \int_S (h \circ \Phi^*) d\sigma, \quad \forall h : \text{bounded Borel function on } S.$$

2. 逆に、(a),(b) で定まる写像 A は $N^p(B)$ から $N^p(B)$ の中への等距離線形写像である。

Proposition 6 (cf.[2],[6],[7]) $1 \leq p < \infty$ とする。

1. A を $N^p(B)$ から $N^p(B)$ の上への等距離線形写像とする。このとき、絶対値1の定数 $\alpha \in \mathbb{C}$ 、 $\mathbb{C}^n$ 上のユニタリ変換 Φ が存在して、次が成立する：

$$(c) \quad (Af)(z) = \alpha f(\Phi(z)), \quad \forall f \in N^p(B), \quad \forall z \in B.$$

2. 逆に、(c) で定まる写像 A は $N^p(B)$ から $N^p(B)$ の上への等距離線形写像である。

参考文献

- [1] H.Helson, *Lectures on Invariant Subspaces*, Academic Press, New York, 1964.
- [2] Y.Iida and M.Mochizuki, *Isometries of some F -algebras of holomorphic functions*, Arch. Math. **71**(1998), 297-300.
- [3] Y.Matsugu, *Invariant subspaces of the Privalov spaces*, (preprint).
- [4] M.Mochizuki, *Algebras of holomorphic functions between H^p and N_** , Proc.Amer.Math.Soc. **105**(1989),898-902.
- [5] J.W.Roberts and M.Stoll, *Prime and principal ideals in the algebra N^+* , Arch. Math. **27**(1976), 387-393. Correction, ibid.**30**(1978), 672.
- [6] K.Stephenson, *Isometries of the Nevanlinna class*, Indiana Univ. Math. J., **26**(1977), 307-324.
- [7] A.V.Subbotin, *Linear Isometry groups of Privalov's spaces of holomorphic functions of several variables*, Doklady Math. **60**(1999),77-79.
- [8] A.V.Subbotin, *Functional properties of Privalov spaces of holomorphic functions in several variables*, Math. Notes **65**(1999),230-237.