

Some notes on the theory of holomorphic curves.

名 大・教養 戸田暢茂
三重大・教育 鈴木順二

1. 序

正則曲線の理論については、Ahlfors [2], Cowen-Griffiths [4], Weyl [5], Wu [6] にそれぞれの方法で詳しく述べられているが、ここでは、正則曲線の order functions に関するいくつかの注意も与え、これらも応用することにより、いくつかの場合について、より精密な結果も述べる。

$$X: |Z| < R \rightarrow P^n(\mathbb{C}) \quad (n \geq 1, 0 < R \leq \infty)$$

を非退化な正則曲線、その1つの既約表現を

$$X = (x_1(z), \dots, x_{n+1}(z))$$

とする。ここに $x_i(z)$ ($i=1, \dots, n+1$) は共通零点をもたない $|Z| < R$ での正則函数である。 X の階数 p の associated curves を X^p とすると、 X^p は Plücker 座標を用いて

$$X^p = [X, dX/dz, \dots, d^p X / dz^{p+1}]$$

と表現される。このとき $X^1 = X$ である。 X^p ($p=1, \dots, n$) の

order function を $T_p(x)$ とする。このとき α = 主要定理として

$$(1) \quad V_p(x) + \{T_{p+1}(x) - 2T_p(x) + T_{p-1}(x)\} = \Omega_p(x) - \Omega_p(x_0)$$

($x_0 < x < R$) が成立することは、よく知られている。ここ

に x_0 は正定数、 $V_p(x)$ は x の階数 p の stationary indices

に関する個数函数、

$$\Omega_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|x^{p+1}| \cdot |x^{p-1}|}{|x^p|^2} d\theta \quad (z = re^{i\theta})$$

である (Weyl [5], p123)。

正則曲線の理論においては、この $\Omega_p(x)$ を order function

$T_p(x)$ によって評価することが本質的な事柄の一つであり、

例えば、「 $R = \infty$ の場合、任意の $\alpha > 1$ に対して、不等式

$$2\Omega_p(x) \leq \alpha \log T_p(x) - 2 \log x + O(1)$$

が $E \subset [x_0, \infty)$ かつ $\int_E x^{-1} dx < \infty$ なる開集合 E の外で成立する。」(Weyl [5], III章) ことが知られている。

$R < \infty$ の場合も、これと同様な不等式が成立している (Weyl [5], IV章)。Weyl [5] では独立変数として $\log x$ ($|z| = x$) と用いているが、ここでは常に x を用いることに注意する。

正則曲線に関する「Defect relations」を証明するとき $\Omega_p(x)$ のような評価式は、本質的役割をはたし、よって必然的に「Defect relations」を証明するのに必要な、多くの不等式には、除外集合が伴う (Ahlfors [2], Weyl [5] etc)。

他方、 $|z| < R$ の有理型函数の Nevanlinna 理論においては、 $|z| < R$ における非常数、位数有限な有理型函数 $f(z)$ に対しては、 $\sigma =$ 基本定理は、除外集合なしで成立している。但し、 $R < \infty$ のときは

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow R} \log T(r, f) / \log \frac{1}{R-r} = \infty$$

と仮定する。又 $|z| < R$ における正則函数系について、Cartan [3] により同様な結果が得られている。

以下、上で述べた有理型函数の場合と同様に、正則曲線の場合においても、 $T_1(r)$ が有限位数のとき、Ahlfors [1] において用いられた手法を用いて、除外集合を取り除くことが出来ること、及び $R < \infty$ の場合の仮定 "A" (Weyl [5], p 201) が弱められること等を証明する。なお、記号等は主に Weyl [5] におけるものを用いる。

2. 補助定理

後で用いるため、いくつかの補助定理を用意する。

補助定理 1. (Weyl [5], p 155, p 197)

$f(x)$ は $[x_0, R)$ で定義された函数で、非負かつ連続な、導函数もとら、 $f(x_0) \geq 1$ とする。このとき任意の $\alpha > 1$, $\mu \geq 0$ に対して

$$I) \quad R = \infty \text{ のとき: } f'(x) \leq \{f(x)\}^\alpha x^{\mu-1}$$

が $E \subset [x_0, \infty)$ かつ $\int_E x^{\mu-1} dx < (\alpha-1)^{-1}$ なる開集合 E の外で成立する。

II) $R < \infty$ のとき: $f'(x) \leq \{f(x)\}^\alpha (R-x)^{\mu-1}$

が $E \subset [x_0, R)$ かつ $\int_E (R-x)^{\mu-1} dx < (\alpha-1)^{-1}$ なる開集合 E の外で成立する。

補助定理 2.

$f(x), F(x)$ は $[x_0, R)$ で定義され, $f(x)$ は連続で

$$1 + \log \frac{x}{x_0} + \int_{x_0}^x (\log x - \log t) \exp(f(t)) \frac{dt}{t} \leq F(x)$$

をみたすものとする。このとき、任意の $\alpha > 1, \mu \geq 0$ に対して

I) $R = \infty$ のとき: $f(x) \leq \alpha^2 \log F(x) + \mu(\alpha+1) \log x$

が $E \subset [x_0, \infty)$ かつ $\int_E x^{\mu-1} dx \leq 2(\alpha-1)^{-1}$ なる開集合 E の外で成立する。

II) $R < \infty$ のとき:

$$f(x) \leq \alpha^2 \log F(x) + (\mu+1)(\alpha+1) \log \frac{1}{R-x} + (\alpha+1) \log x$$

が $E \subset [x_0, R)$ かつ $\int_E (R-x)^{\mu-1} dx \leq 2(\alpha-1)^{-1}$ なる開集合 E の外で成立する。

この補助定理は、補助定理 1 を用いることにより、Weyl [5], p156, p197 と同様に証明出来る。

定義 $R = \infty$ の場合で α が非退化であるとき、又は

$R < \infty$ の場合で、 α が非退化かつ

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow R} T_p(x) = \infty \quad (p=1, \dots, n)$$

をみる。とき、正則曲線 γ は *admissible* であるといふことにする。

注意 $R = \infty$ の場合には、 γ が非退化なら

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T_p(x) = \infty \quad (p = 1, \dots, n)$$

は成立する (Weyl [5])。

補助定理 3.

$1 \leq x < R$ における任意の *admissible* な正則曲線 γ に対して、不等式

$$1 + \log \frac{x}{x_0} + \int_{x_0}^x (\log x - \log t) \exp(2\tilde{\Omega}_p(t)) \frac{dt}{t} \leq 2T_p(x)$$

が任意の $x \in [R_0, R)$ ($R_0 \geq x_0$) に対して成立する。こゝに $\tilde{\Omega}_p(t) = \Omega_p(t) + \log t/x_0$ で、 R_0 は曲線に依存して決まる定数である。(Weyl [5], p 154, p 196 参照)

以後 §2, §3 においては、曲線はすべて *admissible* であるとする。補助定理 1, 2 を我々の曲線に應用すれば、補助定理 3 から、次の命題を得る。

命題 1.

任意 $\alpha > 1$, $\mu \geq 0$ に対して

I) $R = \infty$ のとき:

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + \mu(\alpha+1) \log x + O(1)$$

が $E \subset [R_0, \infty)$ かつ $\int_E x^{\mu-1} dx < \infty$ なる開集合 E の外で成立する。

II) $R < \infty$ のとき:

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq x^2 \log T_p(x) + (\mu+1)(\alpha+1) \log \frac{1}{R-x} + O(1)$$

が $E \subset [R_0, R)$ かつ $\int_E (R-x)^{-\mu-1} dx < \infty$ なる閉集合 E の外で成立する。

この命題を用いれば、Weyl [5] と同様にして次の命題が得られる。

命題 2.

任意の $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$ に対して x_1 が存在して次の不等式が成立する。

I) $R = \infty$ のとき: $E \subset [x_1, \infty)$ かつ $\int_E x^{\mu-1} dx < \infty$ なる閉

集合 E の外の任意の $x \geq x_1$ に対して

$$(3) \quad T_{p+1}(x) < (1 + \frac{1}{p} + \varepsilon) T_p(x) + O(\log x)$$

$$(4) \quad T_{p-1}(x) < (1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon) T_p(x) + O(\log x)$$

II) $R < \infty$ のとき: $E \subset [x_1, R)$ かつ $\int_E (R-x)^{-\mu-1} dx < \infty$ なる閉

集合 E の外の任意の $x \geq x_1$ に対して

$$(5) \quad T_{p+1}(x) < (1 + \frac{1}{p} + \varepsilon) T_p(x) + O(\log \frac{1}{R-x})$$

$$(6) \quad T_{p-1}(x) < (1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon) T_p(x) + O(\log \frac{1}{R-x})$$

3. 定理とその応用

ここでは、 $T_p(x)$ の位数を調べ、命題 1, 及び 2 を改良する。 $T_p(x)$ の位数 ρ_p , 及び劣位数 λ_p は次の様に定義され

る。

$$R = \infty \text{ のとき : } p_p = \overline{\lim_{x \rightarrow \infty}} \log T_p(x) / \log x$$

$$\lambda_p = \underline{\lim_{x \rightarrow \infty}} \log T_p(x) / \log x$$

$$R < \infty \text{ のとき : } p_p = \overline{\lim_{x \rightarrow R}} \log T_p(x) / \log \frac{1}{R-x}$$

$$\lambda_p = \underline{\lim_{x \rightarrow R}} \log T_p(x) / \log \frac{1}{R-x}.$$

定理 1.

すべての $T_p(x)$ の位数は等しい。

証明 $R = \infty$ の場合は、Ahlfors [2] より証明されている。
よって $R < \infty$ の場合について、Ahlfors [1] で用いられた方法と応用して証明する。

$p_p < \infty$ と仮定する。このとき任意の $p > p_p$ に対して、 $x_2 \geq x_1$ なる x_2 が存在して、任意の $x \in [x_2, R)$ に対して

$$T_p(x) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^p}\right).$$

ここで命題 2 II) (5) を応用する。(i) $x \notin E$ かつ $x_2 \leq x < R$ なる任意の x に対しては、

$$T_{p+1}(x) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^p}\right).$$

(ii) 次に $x \in E$, $x_2 \leq x < R$ なる x と考える。かかる x を含み、 E の含まれる最長区間の右端点を x' とし、 $\mu = p$ とおけば、

$$(R-x')^{-p} - (R-x)^{-p} \leq p \int_E (R-x)^{-p-1} dx = O(1).$$

$$\text{よって } (R-x')^{-p} \leq (R-x)^{-p} + O(1)$$

$$\log \frac{1}{R-x'} \leq \log \frac{1}{R-x} + O(1).$$

一カ $T_p(x)$ の増加性及び $x' \notin E$ なることより

$$T_{p+1}(x) \leq T_{p+1}(x') \leq O\left(\frac{1}{(R-x')^p}\right) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^p}\right) + O(1)$$

よって (i)(ii) より十分 R に近いすべて x について

$$T_{p+1}(x) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^p}\right).$$

これは $p_{p+1} \leq p_p$ を意味し、 $p_p < p_p$ なる p は任意であらうから $p_{p+1} \leq p_p$ 。同様に命題 2. II) (6) を用いれば

$$p_p \leq p_{p+1}.$$

が得られ、 $p_p < \infty$ の場合の結果と得る。ある $p_p = \infty$ の場合、もし $p_p < \infty$ なる p が 1 つでも存在すれば、上の議論により、すべての位数は有限、よって $p_p = \infty$ に矛盾し、すべての $T_p(x)$ の位数は無有限大でなければならぬ (証明終)。

定理 2.

すべての $T_p(x)$ の劣位数は等しい。

証明. I) $R = \infty$ の場合: ある p について、 $0 < \lambda_p \leq \infty$ の場合について証明すれば十分である。そうでなければ、すべての劣位数は零で等しい。よって $\lambda_p > 0$ とする。このとき、 $0 < \lambda < \lambda_p$ なる任意の λ に対して $x_3 \geq x_1$ なる x_3 が存在して、 $x \geq x_3$ なる任意の x に対して

$$T_p(x) \geq x^\lambda.$$

ここで命題 2. I), (3) を適用する。(i) $x \notin E$, $x \geq x_3$ なる任意の x に対して

$$x^\lambda \leq \left(1 + \frac{1}{p-1} + \varepsilon\right) T_{p-1}(x) + O(\log x) \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

(ii) $x \geq x_3$, $x \notin E$ なる任意の x を考える。かかる x を含み、 E に含まれる最長区間の左端点を x'' とし、 $\mu = \lambda$ とすれば

$$x^\lambda - x''^\lambda = \lambda \int_{x''}^x t^{\lambda-1} dt \leq \lambda \int_E t^{\lambda-1} dt = O(1)$$

$$\text{よって} \quad x^\lambda \leq x''^\lambda + O(1).$$

十分大なる x について $x'' \in E$ かつ $T_p(x)$ は増加函数であるから

$$\begin{aligned} x'' &\leq \left(1 + \frac{1}{p-1} + \varepsilon\right) T_{p-1}(x'') + O(\log x'') \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{p-1} + \varepsilon\right) T_{p-1}(x) + O(\log x'') \end{aligned}$$

よって (i), (ii) より十分大なる x について、 x が E に属するか否かにかわらず

$$x^\lambda \leq \left(1 + \frac{1}{p-1} + \varepsilon\right) T_{p-1}(x) + O(\log x) + O(1)$$

が成立する。これは $\lambda \leq \lambda_{p-1}$ を意味し、 $\lambda < \lambda_p$ なる λ の任意性より、 $\lambda_p \leq \lambda_{p-1}$ 。同様に (3) の代りに (4) から議論を始めるれば、 $\lambda_{p-1} \leq \lambda_p$ が得られる。よって λ_p のうち 1 つで 0 でないならば、すべての λ_p は 0 でなく等しい。

II) $R < \infty$ の場合: 命題 2. II) を適用することにより、 $R = \infty$ の場合と同様に証明出来る。

定理 3.

$T_p(x)$ が有限位数ならば、任意の $\alpha > 1$ に対して

I) $R = \infty$ の場合: 十分大なるすべての x に対して

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + O(\log x) + O(1)$$

II) $R < \infty$ の場合: R に近いすべての x に対して

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + O\left(\log \frac{1}{R-x}\right) + O(1)$$

が成立する。

証明 I) $R = \infty$ の場合、 $T_1(x)$ の位数 $p_1 < \infty$ とする。このとき定理 1 より、すべての $T_p(x)$ の位数は $p_p = p_1$ 。よって $p > p_1$ なる任意の p に対して、 $x_4 \geq R_0$ なる x_4 が存在して、

$$T_p(x) \leq x^p \quad (x \geq x_4)$$

であり、任意の p -ad A^p (Weyl [5]) に対して

$$N_p(x, A^p) \leq T_p(x) + C_p$$

だから

$$(7) \quad n_p(x, A^p) \log 2 \leq \int_x^{2x} n_p(t, A^p) \frac{dt}{t} \leq N_p(2x, A^p) \leq O(x^p)$$

ここに、 C_p は A^p に依存しないことに注意する。

ここで命題 1 で $\mu = p$ とおくと

$$(8) \quad 2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + p(\alpha+1) \log x + O(1)$$

が $E \subset [R_0, \infty)$ かつ $\int_E x^{p-1} dx < \infty$ なる開集合 E の外で成立する。

一方 $x \in E$, $x \geq x_4$ なる任意の x に対して、 x を含み、 E に含まれる最長区間の右端点を $\hat{x}$ とすると

$$(9) \quad \hat{x}^p - x^p = p \int_x^{\hat{x}} t^{p-1} dt \leq p \int_E t^{p-1} dt = O(1)$$

$$(10) \quad \log \hat{x} = \log x + O(1).$$

更に (7) と (9) より

$$N_p(\hat{x}, A^p) - N_p(x, A^p) = \int_x^{\hat{x}} n_p(t, A^p) \frac{dt}{t} \leq O\left(\int_x^{\hat{x}} t^{p-1} dt\right)$$

$$\leq O\left(\int_E x^{p-1} dx\right) = O(1).$$

$$\text{即ち、 } N_p(\tilde{x}, A^p) \leq N_p(x, A^p) + O(1).$$

こゝで、Ahlfors [2], p 8 (又は Wu [5], p 107) によれば

$$\lim_{A^p} N_p(x, A^p) = T_p(x)$$

であり、 $O(1)$ は A^p に依存しないから

$$(11) \quad T_p(\tilde{x}) \leq T_p(x) + O(1).$$

他方 (1) より

$$T_p(x) + T_{p+1}(x) + T_{p-1}(x) + \log \frac{x}{x_0} = \tilde{\Omega}_p(x) - \tilde{\Omega}_p(x_0) + 2T_p(x)$$

だから、 $\tilde{\Omega}_p(x) + 2T_p(x)$ は x の増加関数であることがわかる。

よって

$$2T_p(x) + \tilde{\Omega}_p(x) \leq 2T_p(\tilde{x}) + \tilde{\Omega}_p(\tilde{x}).$$

(11) に注意すれば

$$\tilde{\Omega}_p(x) \leq \tilde{\Omega}_p(\tilde{x}) + O(1).$$

$\tilde{x} \notin E$ かつ (8), (10), (11) より

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + p(\alpha+1) \log x + O(1)$$

が成立する。かくて、 $x \geq x_4$ なる任意の x に対して

$$2\tilde{\Omega}_p(x) \leq \alpha^2 \log T_p(x) + O(\log x) + O(1)$$

が成立する。

II) $R < \infty$ の場合にも、 $R = \infty$ の場合と同様に証明出来る。

定理 3 を用いれば、命題 1 から命題 2 を導いたのと同様にして、次の系が得られる。

系 1.

$T_1(x)$ が有限位数なら、任意の $\varepsilon > 0$ に対して x_ε が存在して、

I) $R = \infty$ の場合: $x \geq x_\varepsilon$ なる任意の x に対して

$$T_{p+1}(x) < (1 + \frac{1}{p} + \varepsilon) T_p(x) + O(\log x)$$

$$T_{p-1}(x) < (1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon) T_p(x) + O(\log x)$$

II) $R < \infty$ の場合: $x_\varepsilon \leq x < R$ なる任意の x に対して

$$T_{p+1}(x) < (1 + \frac{1}{p} + \varepsilon) T_p(x) + O(\log \frac{1}{R-x})$$

$$T_{p-1}(x) < (1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon) T_p(x) + O(\log \frac{1}{R-x})$$

が成立する。

$R = \infty$ のとき、もとの曲線 α が超越的、即ち

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T_1(x) / \log x = \infty$$

なら、すべての associated curves α^p と α 、超越的であることは知られている (Wu [6])。これに対応する結果として $R < \infty$ の場合には、次の定理が成立する。

定理 4.

$R < \infty$ の場合、

$$(12) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow R} T_1(x) / \log \frac{1}{R-x} = \infty$$

なら、次の様な点列 $\{s_n\}$ が存在する:

$$x_n \notin E, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = R, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_p(x_n) / \log \frac{1}{R-x_n} = \infty$$

$$(p=1, 2, \dots, n).$$

こゝに、Eは命題2. II) のそれである。

証明. $T_1(x)$ の位数 p_1 が有限なら、系1より結果は明か、
よつて $p_1 = \infty$ とする。定理1より $p_2 = \dots = p_n = \infty$ である。

$\mu=0$ として、命題2. II) (6) を応用する。先づ、

$$p' = \overline{\lim_{x \rightarrow R, x \notin E}} T_1(x) / \log \frac{1}{R-x} = \infty$$

が成立することゝ注意する。実際、 $p' < \infty$ と仮定する。Rに
十分近い $\hat{x} \in E$ に対して、 $\hat{x}$ と含み、Eに含まれる最長区間
の左端点、右端点をそれぞれ t_1, t_2 とする。このとき $t_1,$
 $t_2 \notin E$ であるから、

$$\log \frac{1}{R-t_2} - \log \frac{1}{R-t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R-t} dt \leq \int_E \frac{1}{R-t} dt = O(1)$$

$$\log \frac{1}{R-t_1} < \log \frac{1}{R-\hat{x}} < \log \frac{1}{R-t_2}.$$

よつて $T_1(x)$ は増加函数であることゝ注意すれば、

$$\frac{\log T_1(t_1)}{\log \frac{1}{R-t_2}} \leq \frac{\log T_1(\hat{x})}{\log \frac{1}{R-\hat{x}}} \leq \frac{\log T_1(t_2)}{\log \frac{1}{R-t_1}}.$$

$$\times \quad \lim_{\hat{x} \rightarrow R} \log \frac{1}{R-t_1} / \log \frac{1}{R-t_2} = 1.$$

$$\text{よつて} \quad \overline{\lim_{\substack{\hat{x} \rightarrow R \\ \hat{x} \in E}}} \log T_1(\hat{x}) / \log \frac{1}{R-\hat{x}} \leq \overline{\lim_{\substack{x \rightarrow R \\ x \notin E}}} \log T_1(x) / \log \frac{1}{R-x} = p'.$$

これは $T_1(x)$ の位数が有限であることと意味し、仮定に矛盾する。よって $p' = \infty$ 。これは $\{s_n\} \subset [x_1, \infty) - E$, $s_n \rightarrow R$ ($n \rightarrow \infty$), かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} T_1(s_n) / \log \frac{1}{R-s_n} = \infty$ なる $\{s_n\}$ の存在を意味する。

この結果を $p=2, \dots, n$ に対して、命題 2. II) (6) に適用すれば、結論を得る (証明終)。

系 2. Weyl [5], p 201 における "仮定 B" は、次の様な仮定によつて置き換えられる。

" $R < \infty$ の場合、 x が admissible で "

$$\lim_{x \rightarrow R} T_1(x) / \log \frac{1}{R-x} = \infty \quad " \quad .$$

注意. 以上の議論で得られた事柄を、Weyl [5] の方法に適用すれば、そこで与えられているより精密な「Defect relations」が得られることは容易にわかる。

引用文献

- [1] L. V. Ahlfors, Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. Sci. Fenn. Comm. Phys-Math. 8-10(1935), 1-14.

- [2] L. V. Ahlfors, The theory of meromorphic curves. Acta Soc. Sci. Fenn. 3-4(1941), 3-31.
- [3] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.
- [4] M. Cowen and P. Griffiths, Holomorphic curves and metrics of negative curvature. J. d'Analyse Math. 29(1976), 93-153.
- [5] H. Weyl and J. Weyl, Meromorphic functions and analytic curves. Ann. of Math. Studies 12(1943) 269pp.
- [6] H. Wu, The equidistribution theory of holomorphic curves. Ann. of Math. Studies 64(1970), 219pp.