

埼玉大学理学部 矢野 環

A, D, E 型特異点の versal deformation の parameter space
* この論文の目次は最後 p.20 にある.

に、ある "linear structure" を導入するものとして理解され ([35] [36]), 現在、一般の特異点に対しての理論が整備されている。 (K. Saito, On the periods of primitive integrals の一部分, など) の関数の理論を含む予定)。特に単純橋円型特異点においては、上述の "linear structure" (deformation of parameter space の flat coordinate system とよぶ) の存在は、齋藤により非線型一階微分方程式の形に与えられていたが、矢野はそれを線型化し、古典的橋円函数を行列にもつ flat coordinate system が確定した。この線型化に用いる手法は、佐藤幹夫等による τ -函数の理論との類似をうかがわせ、齋藤は特異点の多形の τ -函数を考慮している。

さて、有限鏡映群にもとって、複素鏡映群 ^(u.g.g.t.) を考察しよう。それらは [5] で初めて分類されていたが、興味ある状況で登場したのは、[14] [] であり、かとおもわれる。[14] は Weyl 群に特別な形で embed された u.g.g.t. を分類し、[] では graded Lie algebra の "Weyl 群" が u.g.g.t. になることを示した。Coxeter 群の場合と同様に、不変式を deformation of parameter space とする試みは表 4 にみえた。又、Brieskorn-Slodowy 論の formulation も近々完成する予定である。[15] において定義された invariants $\{n_1, \dots, n_k\}$ は、u.g.g.t. の reflecting hyperplanes が与える意味で free arrangement を与える

ことより定まる logarithmic vector fields の weights と一致する ([31]).

u.g.g.r. の discriminant の特異性から定まる不変量 H と
 矢野が定めた, 末尾は又 log. vec. f. から $2n/2$ という量の重
 要性を指摘し, それらと既知の不変量との奇妙な関係が知ら
 れている (表 5). しかしそれらの関係は, [15] に示けた奇妙
 な duality と似ていて, 分類結果にもとづいた帰結であり, 現
 在理論的整備が行なわれている。

以下において, 上記の概観に因り, 検討の許すかぎり説明
 を加えてみたい。

§ 1. 有限群作用の不変可環

G : 有限群 k : 体, $\text{ch}(k) \nmid |G|$ ($|G|$ は G の位数).

以下では $k \simeq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (必要とするが, これは最もよい条件である).

$V \simeq k^2$, $\rho: G \rightarrow GL(V)$ faithful linear rep.

以下では $G \subset GL(V)$ とみなす. V^* は V の dual space

とし, V^* の symmetric algebra $S(V^*)$ の G -不変部分環を,

$$R = S(V^*)^G \quad \text{とする.} \quad (= k[V]^G)$$

R は Cartan-Macaulay 2"あり, Hochster-Eagon Amer. J. Math. (1971),

Dade (1971) による 12", 次が成立する.

Theorem 1.1 $\exists p_1, \dots, p_e \in R$, algebraically independent
 homogeneous elements, $\deg p_i \mid |G|$, $\{p_i\}$ is a R-sequence, and $\exists q_1, \dots, q_s \in R$
 s.t. $R = \bigoplus_{i=1}^s q_i k[p_1, \dots, p_e]$.

Definition 1.1. $\delta(G) = \min \{ \delta \mid \text{such } \delta \text{ as in Thm 1.1} \}$.

Corollary 1.3 $|G| = \prod \deg p_i / \delta(G)$ ($|G|$ は G の位数)

特に $\delta(G) \leq |G|^{d-1}$ //

Remark 1.4. Huffman Sloane, Adv in Math (197) に「よければ、
評価 $\delta(G) \leq |G|^{d-1}$ が漸近的に best possible であることは、 $\delta(G)$ の
大きくなるもの具体的な例がないからである」。

Definition 1.5 ① $g \in GL(V)$ が ^(鏡映) reflection であるとは、
 g は semi-simple であり、 $\text{rank}(1-g) = 1$ となること。

(order $g = 2$ であること、 $\dots$) //

② $\text{Ker}(1-g) = H_g$ と g の reflection hyperplane を呼ぶ。

($\exists L, V = L \oplus H_g, L \perp H_g$ 且 g は L 上で $\text{ord } g$ 乗根として作用する。

これは明らかなことである、一般の場合 Maschke の定理を要する)

Theorem 1.6 (例として Bourbaki Lie 環 4.1.6 章の Ch. V no. 5 Th. 4)

G は reflection で生成される $\Leftrightarrow \delta(G) = 1$.

(即ち, Th. 1.1 Cor. 1 より) $R \simeq k[p_1, \dots, p_d], |G| = \prod \deg p_i$) //

この定理の $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合は [3] [5] により示された。尚
(これは Chevalley の定理と大抵同じだが, [6] は一般的に証明
を与えておいてあり、何事かをつけ加えることもない、
不適当な呼び名であることもない。[6] では reflection の
order 2 にかきつけているが、証明は一般の order で適用される。

Neyl 群の不変式環で $R \simeq k[p_1, \dots, p_d] \prod \deg p_i = |G|$ は [2] にある。

しかし $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ で $\text{char } k = 0$ ならば Th. 1.1 //

Theorem 1.7. (Coxeter-Shephard-Todd) $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

α 場合, 鏡映で生成される有限群は次の list の群の直積である。

① $k = \mathbb{R}, ([3])$ a. A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 (versal def)

(Coxeter 群) b. B_l, F_4, G_2 ("versal" def)

c. $H_3, H_4, I_2(p) \ p=5, p \geq 7$ (free def)

② $k = \mathbb{C} ([5])$ a. $G(r, l, l), G(r, r, l), \text{No. } 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14, 16,$

(u.g.g.r.) $17, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 32, 33, 34.$

b. $G(r, p, l) \ 2 \leq p \leq r, 7, 11, 12, 13, 15, 19, 22, 31. \quad \checkmark$

Remark 1.8 ① Th. 1.6 より $V/G \simeq k^l$ であり, V の

座標環が R となる。Th. 1.7 ① に於いて, V/G は

G の type の deformation の parameter space となる。② a.

では A, D, E 型 versal deformation ③. 2' はある意味で "versal"

な def. ① c. は free deformation. d. b. は Weyl 群として知られている。

② Th. 1.7 ② により, d. の群は l (次元) 個の鏡映で

生成され, 24, 27 以外は complex polytype の対称群である。b. 2' は

$l+1$ 個の鏡映で生成され, complex polytype の対称群となる。12

$G(r, p, l)$ と 31 である。(講義のとき言いたかった) $\checkmark$

§ 2. Flat generator system

Coxeter 群の不変式環の生成元 $P_1, \dots, P_l$ に unique

指定の方法がある。これを flat generator system と呼ぶ。

この flat とは, 言葉は, flat connection と関係がある。

うと" ; 事と, $\mathbb{C} \otimes V \cong$ linear structure を与えるので, "平坦"
と"より"である ; , と"j" ので"図"により命名された。

しかし, この用語に異論もあるので, 結果代わりの"平坦"。

仮定: 以下 G は既約, すると V への作用は既約と仮定。

$V^* \subseteq \mathbb{R}^2$ に G -不変正定値内積が定数倍をのみ $unique$ に
存在する。これを (1) と記す。 (何かとして G 上で平均すればよい。
既約であるから分かる)...

$$(dP|dQ) = \sum_{ij} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} (\xi_i | \xi_j)$$

と定義する。ここで dP は P の外微分, $\xi_1, \dots, \xi_\ell$

Definition 2.1. R の homogeneous generator system $P_1, \dots, P_\ell$
が flat であるとは, $L = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{R} P_i$ とするとき,

① $D \cdot (d \cdot | d \cdot) : R \times R \rightarrow R$, $D = 2/2P_\ell$, $\deg P_1 \leq \deg P_\ell$
を L に制限すると, $\mathbb{R}$ -valued であり, ② L 上の non-degenerate
bilinear form を与えることを言う。

Theorem 2.2. flat generator system は存在し, L は
unique である。

この定理は初め [32] において, $A, B, D, E_6, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(p)$
に対して証明した。方法は, [18][19][20] などによって決まっていた
不変式環の具体的構造 ([22] にまとめ出) を用いて実際に
構成し, さらに uniqueness は一般的に示すものであった。

その後 [35] により E_7, E_8 も与えた証明ができた。又、 $\overbrace{E_7, E_8}^{(-45/6)}$ の関係も [33] [34] に示してある。

Example 2.3. $I_2(p)$. (order $2p$ の dihedral group).

$V^* = \mathbb{R}\xi_1 + \mathbb{R}\xi_2, \{\xi_1, \xi_2\}$ orthonormal basis とする。 $u = \xi_1 + \sqrt{-1}\xi_2$

とすれば $x_2 = u\bar{u} (= \xi_1^2 + \xi_2^2)$, $x_p = (\sqrt{-1})^p (u^p + (-\bar{u})^p)$ が $\mathbb{R}$ の基底元である。 $(dx_2 | dx_2) = 4x_2$, $(dx_2 | dx_p) = 2px_p$, $(dx_p | dx_p) = 4p^2 x_2^{p-1}$ となり, x_2, x_p が flat generator system である。

(念のため, 2つの同値関係 $u \rightarrow -\bar{u}$, $u \rightarrow \exp(-\frac{2\pi i}{p}) u$ である)

Example 2.4 A_ℓ . ($\ell+1$ 次の対称群)

$V^* = \sum_{i=1}^{\ell+1} \mathbb{R}\xi_i / \mathbb{R}(\sum_{i=1}^{\ell+1} \xi_i)$ には, $\xi_i \mapsto \xi_{\sigma(i)}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_{\ell+1}$ と作用する。

(V が $\sum \mathbb{R}e_i$ の中の $\xi_1 + \dots + \xi_{\ell+1} = 0$ である ℓ 次の基本対称式である)。

p_i は $\xi_1, \dots, \xi_{\ell+1}$ の i 次基本対称式 (module $p_1 = \sum \xi_i$) とする。

また $P_i^d = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_d = i \\ 1 \leq i_j \leq \ell+1}} p_{i_1} \dots p_{i_d}$ と定め, さらに $\alpha \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$

$(1 + cP)_i^\alpha = \sum_{d \geq 0} \binom{\alpha}{d} c^d P_i^d$ とし, 略記法を用いる。

(又, $\log(1 + cP)_i = \sum_{d \geq 1} \frac{(-c)^d}{d} P_i^d$ と定める)

$$\boxed{\alpha_i = \frac{\ell+1}{i-1} (1 + P)_i^{\frac{1}{\ell+1}(i-1)}} \quad i=2, \dots, \ell+1$$

が flat generator system を与える。これは逆に与えられる,

$$\boxed{\begin{cases} p_i = \frac{\ell+1}{\ell+1-i} (1 - \frac{1}{\ell+1} X)_i^{-(\ell+1-i)} & i=2, \dots, \ell \\ p_{\ell+1} = -(\ell+1) \log(1 - \frac{1}{\ell+1} X)_{\ell+1} \end{cases}} \quad \text{とある。略記法は } P \text{ と同じ。}$$

この略記法は、矢張り A, B, D 型の flat generator system を構成したときに採用したものだが、当初は評判が悪かった。しかし後に §3 で見ると、この略記法は極めて有効である。尚、 $(dx_i | dx_j)$ を x_i の式として explicit に書き下す公式はまだ見つけていない。

我々は flat coordinate system を構成したとき、Coxeter 群の不変式環の basis の unique に指定する方法は今までなくて、我々の方法が初めて出てきたものだった。しかし、[11] に、特別な相和函数として unique に指定する方法が与えられていた。さらに同じ Weyl 群に対して、もう一種類 unique に指定する方法があることを指摘した (§3 Definition 3) 都合の通り、方法があることになる。

§3. Brieskorn-Slodowy 理論, Kostant の generator system.

この §2 はいかゆる B-S 理論を説明し、特異点の理論との関係を示す。さらに、同じによって定義された、Kostant 流の R の生成元のことについて説明する。

(3.1) $\mathfrak{g}$: simple Lie algebra / $\mathbb{C}$, G : $\mathfrak{g}$ の adjoint group
(この §2 では G は鏡映群ではない。 $W(G)$ が今までの G に代る)

$\mathfrak{f}$: $\mathfrak{g}$ の a Cartan subalgebra, $\ell = \text{rang } \mathfrak{g} (= \dim \mathfrak{f})$

$W(G)$: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ の Weyl 群 (A, B, D, E, F, G 型の Coxeter 群)

$Z_{\mathfrak{g}}(X)$: $X \in \mathfrak{g}$ の centralizer, $\mathfrak{g}^*, \mathfrak{f}^*$: §4 §4 の dual space

$X \in \mathfrak{g}$ 17 $\text{ad}(X): Y \mapsto [X, Y]$ ni semisimple, nilpotent
 に分けて, X ni semisimple, nilpotent と分けていける。

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid X: \text{nilpotent}\}.$$

Theorem 3.2 (Chevalley) canonical surjection $S(\mathfrak{g}^*) \rightarrow S(\mathfrak{f}^*)$

は algebra isomorphism $S(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{G} S(\mathfrak{f}^*)^{W(G)}$ を induce する。

Definition 3.3 Invariant morphism (2.2 adjoint quotient)

$X: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{f}/W(G)$ は次の形に定まる。

$\mathfrak{g} \ni X = X_s + X_n$ を semisimple, nilpotent part とすると, $(X_s, X_n) = 0$

$$X \mapsto X_s \mapsto G X_s \cap \mathfrak{f} \mapsto (G X_s \cap \mathfrak{f})/W(G) \quad (= \text{2.12 - 5.2.13})$$

Remark 3.4 X は具体的に $\mathfrak{f}/W(G)$ の座標環 $S(\mathfrak{f}^*)^{W(G)}$

$\simeq \mathbb{C}[P_1, \dots, P_\ell]$ より定まるといえる。 P の G -不変性より

$P(X_s) (= P(g X_s) \exists g \in G, g X_s \in \mathfrak{f})$ は一意に定まる。

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \chi(X) = (P_1(X_s), \dots, P_\ell(X_s)) \in \mathfrak{f}/W(G).$$

Theorem-Definition 3.5 (Kostant-Steinberg-Dynkin)

① $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ に対して, $\dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = \text{rank } \mathfrak{g}$ は非負整数。

② $\{X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \mid \dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = \ell\}$ ($\{X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \mid \dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = \ell+2\}$)

は空でない。第一 G -orbit を与える。各元を regular (subregular)

nilpotent element と呼ぶ。

Definition 3.6 $X \in \mathfrak{g}$ の G -orbit $G \cdot X$ の tangent space の補

空間を S とする。 $\mathfrak{g} = T_X(G \cdot X) \oplus S$ 。 $\mathfrak{g} = T_X(G \cdot X) \oplus S$ 。 $\mathfrak{g} = T_X(G \cdot X) \oplus S$ 。 $\mathfrak{g} = T_X(G \cdot X) \oplus S$ 。

X に対して $G \cdot X$ の transversal slice と呼ぶ。 $\mathfrak{g} = T_X(G \cdot X) \oplus S$ 。

$S \ni$ Killing form に関する直交補空間は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ 場合, orthogonal slice と呼ぶ. $(X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \text{ かつ } \text{Jacobson-Morozov } (X, Y, H) = \mathfrak{h})$ $X + Z_{\mathfrak{g}}(Y)$ は orthogonal slice

Theorem (3.7. (Kostant)) X_0 : regular nilpotent

S_{X_0} : orthogonal slice $\Rightarrow \chi_{S_{X_0}}: S_{X_0} \simeq \mathbb{R}/W(G)$ bitheomorphic //

(= in 't, $\forall X \in \mathcal{U}$, $\text{codim } GX = l \Rightarrow GX \cap S_{X_0} = \{1 \text{ pt}\} \pm 1$).

Theorem 3.8 ([28], [29]). X_0 : subregular nilpotent

$$S_{X_0}: \text{transversal slice} \quad \chi|_{S_{X_0}}: S_{X_0} \rightarrow \mathcal{F}/W(G).$$

① $\chi_{S_x}^{-1}(0) = S_x \cap \mathcal{N}(g)$ is g of type 2 is (1) type $\rightarrow$ rational double point & locally biholomorphic. (b/c g is A^1 is A^1 rat. double)

② $t \in f/w(G) \quad i \neq 1, \quad \chi_{f/w}^{-1}(t)$ is a rational double pt.

↳ (versal) deformation is locally biholomorphic. //

表 1 (p.) = rational double points, 表 2 ありた. B_2, C_2, F_4, G_2
 Ξ'' の rational double pt ≥ 12 ありた $A_{2g-1}, D_{g+1}, E_6, D_4$, $\Xi'' = \frac{g}{2}$ ありた.

(Versal) deformation π 表 1, 表 2 にある。尚、 $\overline{16} \frac{1}{4}$ slice π と 24 , global に isomorphic π は $3(0 \oplus 24)$.

± 7 , Th. 3.7 の拡張を導く ($\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rangle$). $X_0 \in \text{regular}$
nilpotent, $\{X_0, H_0, Y_0\} \in \text{principal } S\text{-triple}$ とする, $\text{ad}(H_0)$

$$\circ \quad Z_g(Y_0) \quad 2^n \circ \quad \text{is } \mathbb{A}^1 \text{ is } -(2d_i - 1) \quad i = 1, \dots, l \quad d_i = \deg P_i$$

2° 又子. この図有 $\wedge^n \eta$ トル ε u_i と表現は, $Z_g(\%) = \sum \mathbb{Q} u_i$.

従って, $S_{X_0} \ni X_0 + \sum g_i u_i \mapsto (p_1(\frac{x}{g}), \dots, p_d(\frac{x}{g})) \in f/w(G)$

* biholomorphic $\mathbb{C} = \mathbb{C} \times \{1\}$, $S(f^*)^{w(G)} \simeq \mathbb{C}[g_1, \dots, g_k] \simeq \mathbb{C}^k$.

Definition 3.9 ([30]) $\{g_1, \dots, g_\ell\}$ を不変可環の Kostant-流生成元系とよぶ。(構文より $\sum \mathbb{C} g_i$ は unique に定まる。)

Example 3.10. $A_{\ell+1}$. (Example 2.4) $\frac{B_1}{2}$.

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と置く。これは (これは) regular nilpotent.

orthogonal slice として $\left\{ X_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ g_1 & 0 & 1 \\ g_2 & g_3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq X_0 + \sum g_i \cdot i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

invariant morphism として $\det(\lambda + X) = \sum_{i=0}^{\ell+1} p_i(X) \lambda^{\ell+1-i}$ による

$X \mapsto (p_1(X), \dots, p_\ell(X))$ と (2.4) と一致する。

$$\det(\lambda + X_g) = \sum_i (1 - Q_i)^{-\ell+2-i} \lambda^{\ell+1-i} \quad (\text{Remark 3.11})$$

より $\boxed{p_i = (1 - Q_i)^{-\ell+2-i}}$ である。これは Example 2.4

と (1) の略記法を用いた。 $Q_i = \sum g_{i_1} \dots g_{i_\ell} \quad i_1 + \dots + i_\ell = i \leq \ell+1$.

この表示が 2.4. にあける p_i の表示と一致する X について

微分し、 $X = (\ell+1)Q$ とおいたものであることに気付くである。

実際、我々が flat generator system を構文した直後、岩堀先生は、「我々の (2.4) が上記 $\{g_i\}$ と同じのものであるか？」と内容にされた。同じではないのだが、よく似ている。

Remark 3.11 上記 $\boxed{}$ を示しておく。ただの計算だが。

$GL(\infty)$ の generic element A の固有値を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, $\sum_j |\varepsilon_j| < \infty$ とする。

$\sigma_j(A) = \sum_{i=1}^{\ell+1} \varepsilon_i^{j+1}$, $\bar{p}_j(A) = \chi_{\left\{ \begin{smallmatrix} \ell+1 \\ j \end{smallmatrix} \right\}}(A) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell+1})$ の j 次基本対称関数 ($j \geq 0$)

$g_j(A) = \chi_{\left\{ \begin{smallmatrix} \ell+1 \\ j \end{smallmatrix} \right\}}(A) = \sum \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_j} \quad (j \geq 0)$ とおく。

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \frac{t^j}{j}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \bar{p}_h t^h = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j t^j\right)^{-1} \quad \text{である。}$$

$$\begin{aligned}
 \text{従って, } \sum (-1)^k \bar{p}_h t^h &= \sum_{j \geq 0} (-1)^j (g_1 t + g_2 t^2 + \dots)^j \\
 &= \sum_j \sum_k \sum_d (-1)^j \binom{j}{k} Q_d^{j-k} g_1^k t^{k+d} \\
 &= \sum_h (-1)^h \left(\sum_{k=0}^h (-1)^k (1+Q)_k^{-(h-k+1)} g_1^{h-k} \right) t^h
 \end{aligned}$$

一方 χ (未知) かつ λ である。

$$\bar{p}_h = \chi_{[\mathbb{E}]_h} = \det \begin{vmatrix} g_1 & 1 & & 0 \\ g_2 & g_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_h & & g_2 & g_1 \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{h+1} (-1)^k (1+Q)_k^{-(h+2-k)} \lambda^{h+1-k}$$

従って, $h = h+2$ として, $g_1 = \lambda$ と置く。この符号を λ とし、 χ の式を用いて λ を表す。

Remark 3.12 表 1 より A_{2n} versal deformation は

$$x^{2n+1} + t_2 x^{2n-1} + t_3 x^{2n-2} + \dots + t_{2n+1}$$

Thm 3.8 により, 未知 t_i は基本対称式 p_i (2.10) として表す。

従って, Ex 3.10 より $x^{2n+1} + \sum_{i \geq 2} (1-Q)_i^{-(2n+2-i)} x^{2n+1-i}$ を $\{g_i\}$ の座標

を用いた deformation の式で表す。 λ , flat coordinate x_i (Ex 2.4)

に於て, $\frac{1}{2n+1} x_i = s_i$ と置く。この式を用いて λ を表す。

$$\frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \sum_{i=2}^n (1-S)_i^{-(2n+2-i)} \frac{x^{2n+1-i}}{2n+1-i} - \log(1-S)_{2n+1}$$

$$\sum_{h \geq 0} \left(\sum_{i=0}^h (1-Q)_i^{-(h+1-i)} x^{h-i} \right) t^h = \sum \det \begin{pmatrix} x^{-1} & & 0 \\ g_2 & g_1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_h & & g_2 & g_1 \end{pmatrix} t^h = (1 - g(t) - xt)^{-1}$$

$g(t) = \sum_{j \geq 2} g_j t^j$

$$\therefore \sum_{h \geq 0} \left(\sum_{i=0}^h (1-S)_i^{-(h+1-i)} \frac{x^{h-i}}{h-i} - \log(1-S)_h \right) t^h = \left(\sum_{i=2}^n s_i t^i \right) - \log(1-S(t) - xt) \quad s(t) = \sum_{j \geq 2} s_j t^j$$

即ち, $-\log(1 - xt - s(t))$ を展開し, t^{2n+1} の係数を $2n+1$ として A_{2n} 型

sing. の versal deformation の flat coordinates $\{s_2, \dots, s_{2n}\}$

により, 2 表で表すことができる。 $(ds_i | ds_{i+j}) = -\delta_{i,j} s_{2n+1}$ for A_{2n}

即ち, $\boxed{\exp\left(-\sum_{l \geq 0} \tilde{F}_{A_l}(x, s) \frac{t^{l+1}}{l+1}\right) = 1 - xt - s(t)}$

$$s(t) = \sum_{j \geq 2} s_j t^j$$

同様にして,

$$\left(\sum_{l \geq 1} \tilde{F}_{B_l}(x, s) \frac{t^{2l}}{2l} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+xt-s(t)}{1-xt-s(t)} \right) \right.$$

$$s(t) = \sum_{j \geq 1} s_{2j} t^{2j}$$

$$\bullet \coth \left(\sum_{l \geq 1} \tilde{F}_{B_l}(x, s) \frac{t^{2l}}{2l} \right) = 1 - xt - s(t).$$

$$s(t) = \sum_{j \geq 1} s_{2j} t^{2j}$$

$$\left(\sum_{l \geq 1} \tilde{F}_{C_l}(x, y, s) \frac{t^{2l}}{2l} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\sqrt{x}t-s(t)}{1-\sqrt{x}t-s(t)} \right) - xy^2 \log \frac{1+t}{1-t} \right.$$

$$\sum_{l \geq 1} \tilde{F}_{D_{l+1}}(x, y, s) \frac{t^{2l}}{2l} = \sum_{l \geq 1} \tilde{F}_{C_l}(x, y, s) \frac{t^{2l}}{2l} + 2y \sum_{l \geq 1} s'_{l+1} \frac{t^{2l}}{2l}$$

以上より (B, D, C) 型 W_{∞} の flat generators system
 により (B, D, C) 型 deformation $\tilde{\mathcal{F}}$ の flat coordinate が与えられる。

次の形の命題が得られる。ことに注意せよ。(この命題は p. 11 の命題 3.13 の一般化である。)

Proposition 3.13. $(-1)^l \sum_{i=1}^l \varepsilon_i^{l+1}$ は $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{l+1}$

の $\mathbb{Q}$ 線形結合として表すことができる。この式において, $x = -\chi_0, s_i = -\chi_i$

を代入した式 $\tilde{F}_{A_l}(x, s)$ は A_l 型の versal deformation の

flat coordinate により表すことができる。あるいは, $(-1)^l \sum_{i=1}^l \varepsilon_i^{l+1}$ は

基本対称式 $p_1, p_2, \dots$ により表すことができる, $x = -p_1, s_i = (-1)^i p_i$ と

おいても同様に $\tilde{F}_{A_l}(x, s)$ を表すことができる。

Example 3.14 $\sigma_1 = p_1, \sigma_2 = p_1^2 - 2p_2, \sigma_3 = p_1^3 - 3p_2p_1 + 3p_3$

$$\sigma_4 = p_1^4 - 4p_2p_1^2 + 4p_3p_1 + 2p_2^2 - 4p_4 \quad \text{など}$$

$$\tilde{F}_{A_1} = x, \quad \frac{1}{2} \tilde{F}_{A_2} = \frac{x^2}{2} + s_2, \quad \frac{1}{3} \tilde{F}_{A_3} = \frac{x^3}{3} + s_2x + s_3$$

$$\frac{1}{4} \tilde{F}_{A_4} = \frac{x^4}{4} + s_2x^2 + s_3x + s_4 + \frac{1}{2}s_2^2.$$

要するに, flat generators は A_l 型の場合, $\frac{1}{l+1} \sum_{i=1}^l \varepsilon_i^{l+1}$ を基本対称式で表したとき, p_i ($1 \leq i \leq l+1$) の係数に表される。

§ 4. Flat coordinate system, Free deformation.

(A.1) $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow \mathbb{C}, 0$ is isolated sing point $0 \in \mathbb{C} \rightarrow$
holomorphic function. $\widehat{F}: \mathbb{C}^{n+1} \times S_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}, 0$ is f unfolding?
parameter space $(S, 0)$ $\dim S = m$ $\mathbb{C} \ni t \rightarrow t \in \mathbb{C} \ni t \in \mathbb{C}$.

$(p^{n+1}, 0), (S, -)$ の local coordinate は $(x_0, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_m)$ とし、次の条件を 2.4 に于て $\tilde{F} \circ \gamma$ として与える。

(4.1.1) $\tilde{F}: \mathbb{C}^{n+1} \times S_{,0} \rightarrow \mathbb{C}_{,0}$ holomorphic

(4.1.2) $\mathbb{F}_2[x]_{\leq 0} = f$

$$(4.1.3) \quad 2\tilde{F}/2t_m(x, t) \equiv C_m \neq 0.$$

(4.1.4) $\{2\tilde{F}/2t_i(x,0)\}_{i=1}^m$ 及 $0_{n+1,0}/(2f/2x_1, \dots, 2f/2x_n)^T$ 之独立

$$= 4 \neq 1, \quad \begin{cases} \widetilde{F}(x, t) = F(x, t') + c_m t_m, & t' = (t_1, \dots, t_{m-1}) \\ \frac{\partial F}{\partial t_i}(0, 0) = 0, & i = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

と表示される。さらに、 $(4,1,1) \sim (4,1,4)$ 及び他の空杯も

$(s_1, \dots, s_m) \rightarrow 11212$, 2次式が成立する。

$$\frac{\partial S_i}{\partial t_m} = 0 \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad \frac{\partial S_m}{\partial t_m} = c \quad (c \neq 0)$$

适当 Γ 代表 Σ 上, $X = \{(x, t) \mid \widehat{F}(x, t) = \infty\}$, $S = \{(t)\}$

$$T = \{ (t') \} \quad \text{is a tree, map } \varphi, p \text{ is a vertex } z \in V$$

$$\varphi: X \rightarrow S \quad (x, t') \mapsto (t', -\frac{1}{c_m} F(x, t'))$$

$$p: S \rightarrow T \quad (t', t_m) \mapsto (t')$$

Definition 4.2 1. $\Omega_Y = \varphi_* \left(\Omega_X^{n+1} / \sum_{i=1}^{m-1} dt_i \wedge \Omega_X^n + dF \wedge \Omega_X^n \right)$

2. $\Omega_{q,T} : e_i = \left[\frac{2\tilde{E}}{2t_i} (x_i, t_i) dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n \right] \quad i=1, \dots, m \quad \text{in } \Omega_q \text{ 内}$

$\mathbb{C}$ 生成 ($T = \mathcal{O}_T$ -submodule ($\mathbb{C}$ に対して $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$))

Definition 4.3 ([36]) unfolding $X \rightarrow S$ が free であるとは,

$\Omega_{q,T}$ が $\mathcal{O}_S$ -module であるとして, $\mathcal{O}_T$ -free rank m であること.

($X \rightarrow S$ が versal であることは free である (剰余))

Ω_q の 2 元 $f_i = [g_i(x, t) dx]$ ($i=1, 2$) に対して, $X \rightarrow T$ により T -residue symbol により $\mathbb{C}$ へ写す (剰余)

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \text{Res}_{X/T} \left(\frac{g_1(x, t) g_2(x, t) dx}{\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_m}} \right) \in \mathcal{O}_T.$$

Definition 4.4 rational double point $\rightarrow$ free deformation

$X \rightarrow S \rightarrow T$ が与えられ, T は $\mathbb{C}$, S の local coordinate system $(t_1, \dots, t_m)$ が flat であること, かつ $\mathbb{C}$ への写像 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ であること (存在するならば L は unique)

$$L = \sum \mathbb{C} e_i \subset \Omega_{q,T}, e_i = \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} dx \right] \quad (i=1, \dots, m) \text{ であること}$$

$\langle, \rangle : L \times L \rightarrow \mathcal{O}_T$ は 定数値非退化である。

(これは versal の場合 $\mathbb{C}$ への free deformation の拡張 ($T = \mathbb{C}$) である)

Theorem 4.5 ([36]) $\mathcal{C}$ は Coxeter group の type ≥ 3 である。

このとき, “ $\mathcal{C}$ 型の free deformation” $X \rightarrow S$ が存在し, かつ

2つある。 $\{t \in S \mid \varphi'(t) \text{ is singular}\}$

1. $X \rightarrow S$ の discriminant set は $\mathcal{C}$ 型の Coxeter 群の discriminant と biholomorphic.

2. flat coordinate system が存在し, $\mathcal{C}$ 型の flat

generator system と同視される。

この構成は「Coxeter system の folding」の理論によりなされる。表 3 に H, I 型 α free deformation Σ , flat coordinate system (S) により表示されている。

Definition 4.6 Coxeter system (W, S) の Coxeter system (W', S') に fold される (記号で $(W, S) \sim (W', S')$) とは:

1. $S = \sqcup S_i$ と分割があり, $S'_i = (S_i$ が W で生成した部分群の長さ最大の元) (存在する, $\neq id$ とする) とする,
 $\Sigma' = \{S'_i \mid S'_i \neq id\}$. Σ' が生成した W の部分群を W'' とすると, (W'', Σ') が Coxeter system であり
 $(W'', \Sigma') \simeq (W', S')$. さらに, $\forall i, S_i$ の任意の 2 元が可換
 のとき, orthofolding と呼ぶ。

Theorem 4.7 ① 既約有限 Coxeter 系の ortho folding は下記で与えられる。1. root 系の folding は induce するもの (i.e.,

$$A_{2\ell-1} \sim B_\ell, D_{\ell+1} \sim C_\ell, E_6 \sim F_4, D_4 \sim G_2.$$

$$2. 2 つの exceptional 系は $D_6 \sim H_3^{(2)}, E_8 \sim H_4.$$$

$$3. \text{Perfect folding } W \sim I_2(h(W)) \quad \text{ここで } h(W) \text{ は } W \text{ の Coxeter 数.}$$

② $W \overset{\text{ortho}}{\sim} W'$ のとき, W の標準表現空間 V に部分空間 V' があり, W' は V' に標準表現で作用している。すなわち,

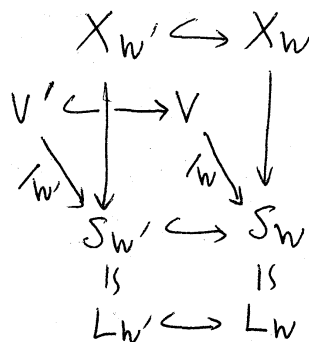
$$S(V^*)^{W'} \simeq S(V^*)^W / (V' \text{ 上 } 0 \text{ とする不変式}) //$$

従って, orthofolding $W \sim W'$ により, W 型 deformation の parameter space S_W の subspace $S_{W'}$ が定まる。

このように unfolding $X_W \rightarrow S_W$ と

$W \neq \emptyset$ として, $X_{W'} \rightarrow S_{W'}$ と対応する,

このとき W' は free deformation である.



Proposition 4.8 S は k 上の flat

coordinate system $\Rightarrow k$ 上の linear

subspace $\subseteq L_W$, $L_{W'} \subseteq L_W$ である. $L_{W'} \hookrightarrow L_W$

は linear embedding である.

Example 4.9 E_6 は flat coordinate system $(s_i)(F_4)$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{E_6}(x, s) = & x^4 + y^3 + s_2 x^2 y + s_5 x y + (s_6 - \frac{1}{24} s_2^3) x^2 + (s_8 + \frac{1}{4} s_2 s_6 - \frac{1}{576} s_2^4) y \\
 & + (s_9 - \frac{1}{12} s_2^2 s_5) x + s_{12} - \frac{1}{24} s_2^2 s_8 + \frac{1}{8} s_6^2 - \frac{1}{288} s_2^3 s_6 - \frac{1}{24} s_2 s_5^2
 \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{F_4} \text{ は } s_5 = s_9 = 0 \text{ である.}$$

Example 4.10 E_7 は flat coordinate system $(s_i)([33])$

$$t_2 = s_2, t_5 = s_5, t_6 = s_6 - \frac{4}{9} s_2^3, t_8 = s_8 - \frac{4}{3} s_2 s_6 + \frac{1}{9} s_2^4, t_{10} = s_{10}$$

$$t_{12} = s_{12} - s_2 s_{10} - \frac{1}{6} s_2^2 s_8 - \frac{5}{6} s_6^2 + \frac{5}{9} s_2^3 s_6 - \frac{1}{34} s_2^6$$

$$t_{14} = s_{14} - \frac{1}{3} s_2 s_{12} - \frac{1}{3} s_6 s_8 + \frac{1}{18} s_2^3 s_8 + \frac{1}{6} s_2 s_6^2 - \frac{1}{54} s_2^4 s_6$$

$$t_{18} = s_{18} - \frac{1}{3} s_2^2 s_{14} - \frac{2}{3} s_6 s_{12} - s_8 s_{10} + \frac{4}{3} s_2 s_6 s_{10} - \frac{1}{9} s_2^4 s_{10} - \frac{1}{3} s_2 s_8^2$$

$$+ \frac{1}{3} s_2^2 s_6 s_8 + \frac{4}{27} s_6^3 - \frac{1}{9} s_2^3 s_6^2 + \frac{1}{2 \cdot 34} s_2^6 s_6 + \frac{109}{2 \cdot 34} s_2^9$$

$$\tilde{F}_{E_7}(x, t) = -\frac{1}{3} (x^2 y + y^3) + t_2 x y^2 + t_6 y^2 + t_8 x y + t_{10} x^2 + t_{12} y + t_{14} x + t_{18}$$

Example 4.11 E_8 は flat coord. $([34])$.

$$\tilde{F}_{E_8}(x, t) = -(\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} y^3) + t_1 x^3 y + t_4 x^2 y + t_6 x^3 + t_7 x y + t_9 x^2 + t_{10} y + t_{12} x + t_{15}$$

$$t_1 = s_1, t_4 = s_4 - 2s_1^4, t_6 = s_6 - 2s_1^2 s_4 + \frac{6}{5} s_1^6, t_7 = s_7 - 2s_1 s_6 - \frac{2}{3} s_1^3 s_4 + \frac{17}{15} s_1^7$$

$$t_9 = s_9 - \frac{3}{2} s_1^2 s_7 - s_1^3 s_6 - \frac{3}{2} s_1 s_4^2 + \frac{23}{5} s_1^5 s_4 - \frac{28}{15} s_1^7$$

$$t_{10} = s_{10} - s_1 s_9 - \frac{1}{2} s_1^3 s_7 - s_4 s_6 + \frac{1}{2} s_1^4 s_6 + \frac{1}{2} s_1^2 s_4^2 - \frac{2}{15} s_1^6 s_4 - \frac{11}{45} s_1^{10}$$

$$t_{12} = s_{12} - s_1^2 s_{10} - \frac{4}{3} s_1^3 s_9 - 2 s_1 s_4 s_7 + \frac{12}{5} s_1^5 s_7 - s_1^2 + 2 s_1^3 s_4 s_6 - \frac{7}{30} s_1^6 s_6 \\ - \frac{1}{3} s_4^3 + \frac{7}{3} s_1^4 s_4^2 - \frac{107}{30} s_1^8 s_4 + \frac{82}{75} s_1^{12}$$

$$t_{15} = s_{15} - s_1^3 s_{12} - s_1 s_4 s_{10} + \frac{4}{5} s_1^5 s_{10} - s_6 s_9 + \frac{7}{15} s_1^4 s_9 - \frac{1}{2} s_1 s_7^2 + \frac{1}{2} s_1^3 s_6 s_7 \\ - \frac{1}{2} s_4^2 s_7 + \frac{5}{3} s_1^4 s_4 s_7 - \frac{29}{30} s_1^8 s_7 + \frac{1}{2} s_1^3 s_6^2 + \frac{1}{2} s_1 s_4^2 s_6 - \frac{43}{30} s_1^5 s_4 s_6 \\ + \frac{14}{45} s_1^7 s_6 + \frac{1}{3} s_1^3 s_4^3 - \frac{43}{45} s_1^7 s_4^2 + \frac{421}{450} s_1^{11} s_4 - \frac{103}{450} s_1^{15} \quad \square$$

H_4 is flat coordinates i.e. $s_4 = s_7 = s_9 = s_{12} = 0$ and $12 \nmid 11$.

§ 5. u.g.g.r. ($2=21$) - 鏡映群)

u.g.g.r. is Thm 1.7 ② の分類に於て 113.

不変式環の生成元は次数 $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_r = h$, $m_i = d_i - 1$.

discriminant は不変式 $\logarithmic$ vector field $X_1, \dots, X_r$

の weight +1 は $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r$ とする.

Theorem 5.1 ([15]) $m_r < h-1 \Leftrightarrow m_i + n_{h+1-i} = h \Leftrightarrow$

1個の鏡映で生成される.

discriminant の reduced 形式 $D=0$ は $D=0$ 上, この次数

(weight $(d_1, \dots, d_r)$ の 2 のべき乗) は d とする.

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^r d_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{H(G)} \quad (1=2) \quad H(G) \text{ は素数である. (2.1)}$$

Theorem 5.2. 1. $H(G)$ は自然数である.

$$2. \quad H(G) \leq \max \{ h, n_r + 1 \}.$$

$$3. \quad H(G) = \max \{ h, n_r + 1, H(G) \} \Leftrightarrow G \text{ は order } 2 \text{ の鏡映で生成される}$$

寺尾 宏明 12 $t = \frac{2}{\ell} \sum n_i$ によりこの事実を導出した。

Theorem 5.3 1. t は自然数である.

$$2. \quad t = h \quad \text{or} \quad n_2 + 1.$$

2. $l = h$ or $n_2 + 1$. ($t = H \times H = h$ or $n_2 + 1$ "maximal")
 2つに1つは、2つの値がある。(つまり、異なる10進)

Proposition 5.4 $t = H \Rightarrow H = h$ or $n_e + 1$. $\Rightarrow$ No. 3 $\nleftrightarrow$ SL

$$Z''_{12} \subset Z \neq H_{12} \text{ maximal.}$$

2. $H = h \Rightarrow \sqrt{t} = H \Rightarrow G(1, 2, 2) \text{ is a } 2^{1/2} \times 2^{1/2} \text{ H 1/2 max.ind.}$

3. $H = h+1 \Rightarrow t = H$ No. 3 L2 str 2's $H=12$ maximal

以上 $\Rightarrow$ Thm 5.1, 5.2, 5.3, Prop 5.4 はすべて分類にもとづいて示す。

$\pm 4 \leq 11$. 不變量 h, m_2+1, H, t は表 5 に $7 \geq h \geq 7$.

(Coxeter 群 Σ は n 次元空間 E^n の n 個の超平面 $H_1, \dots, H_n$ の交わりで生成される群である.)

± 7 , Vinberg [] に ± 11 として graded Lie Algebra の "Weyl group" を定義してあり, n.f.g. になっている。 § 4.12 表 4 で ± 2 行目に ± 7 をつけ加えると, No. 13 である。又, 表 4 に ± 7 を加えた deformation (i.e., discriminant set 同値 π biholo) を ± 2 (7) とする。

u, j, g, n. には "て" 作 10 にも色々異はまゝ) ことかきつゝ、
又ハ持合にゆづる。

§ 6. Flatho の不変式.

$G \cong \text{Coxeter } \tilde{B}_3$ V^* an orthonormal basis $\pm \{e_1, \dots, e_3\} \subset \mathfrak{h}$.

G 既約 ≥ 1 , $P_1(\zeta), \dots, P_k(\zeta)$ は次の方程式で定まる.

Definition 6.1. 1. $P_1(\zeta) = \zeta_1^2 + \dots + \zeta_e^2$

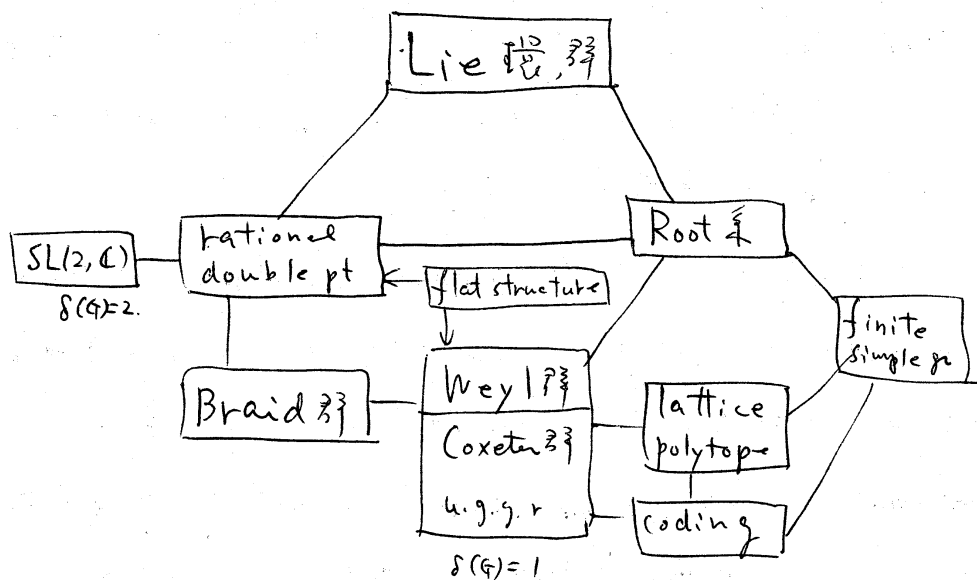
2. $\{P(\xi) \mid P_i(\frac{2}{\sqrt{3}})P(\xi) = 0 \quad i=1, \dots, k\}$ is a basis $\mathcal{B}$

$P_{k+1}(\xi)$, ($P_{\frac{l}{2}}(\xi)$ and $P_{\frac{l}{2}+1}(\xi)$ if $G = D_l$ $\left\{ \begin{matrix} k = \frac{l}{2} - 1 \\ l: \text{even} \end{matrix} \right\}$) とする。

Theorem 6.2 ([11]) Definition 6.1 の方法により, $F = \sum_{i=1}^l \mathbb{C} P_i$ は unique に定まる。

Remark 6.3 $P_i(\xi)$ は定数より高次の多項式である。具体的に述べておくと ξ は k 個の ξ の関数であるが, この $P_i(\xi)$ が flat invariants と呼ばれるのは $l=2$ の場合のみである (4)。

§7. 根空間



目次

§0 はじめに	1	§5 u.g.s.r.	18
§1 有界生成系と不変式環	3	§6 Flat の不変式	19
§2 Flat generator system	5	§7 根空間	20
§3 Brieskorn Slodowy 特異点 Kostant generator system	8	§8 表 1 ~ 5	21
§4 Flat coordinate system Free deformation	14	References	

$$f_{A_\ell} = x^{\ell+1} + yz, \quad f_{D_\ell} = x^{\ell-1} - xy^2 + z^2,$$

$$f_{E_6} = x^4 + y^3 + z^2, \quad f_{E_7} = x^3y + y^3 + z^2,$$

$$f_{E_8} = x^5 + y^3 + z^2.$$

$$\tilde{f}_{A_\ell} = f_{A_\ell} + \sum_{i=2}^{\ell+1} t_i x^{\ell+1-i}, \quad \tilde{f}_{D_\ell} = f_{D_\ell} + \sum_{i=1}^{\ell-1} t_{2i} x^{\ell-1-i} + 2t_\ell y,$$

$$\tilde{f}_{E_6} = f_{E_6} + t_2 x^2 y + t_5 xy + t_6 x^2 + t_8 y + t_9 x + t_{12},$$

$$\tilde{f}_{E_7} = f_{E_7} + t_2 xy^2 + t_6 y^2 + t_8 xy + t_{10} x^2 + t_{12} y + t_{14} x + t_{18},$$

$$\tilde{f}_{E_8} = f_{E_8} + t_2 x^3 y + t_8 x^2 y + t_{12} x^3 + t_{14} xy + t_{18} x^2 + t_{20} y + t_{24} x + t_{30}.$$

表 1. rational double points Σ の versal deformation.

$$B_\ell \quad f_{A_{2\ell-1}} + t_2 x^{2\ell-2} + t_4 x^{2\ell-4} + \cdots + t_{2\ell}$$

$$C_\ell \quad f_{D_{\ell+1}} + t_2 x^{\ell-1} + t_4 x^{\ell-2} + \cdots + t_{2\ell}$$

$$F_4 \quad f_{E_6} + t_2 x^2 y + t_6 x^2 + t_8 y + t_{12}$$

$$G_2 \quad x^3 + y^3 + t_2 xy + t_6 \quad (D_4 \rightarrow sub)$$

$$BC_\ell \quad f_{A_{2\ell}} + t_2 x^{2\ell-1} + t_4 x^{2\ell-3} + \cdots + t_{2\ell} x$$

表 2 ADE 以外 α root 系 1- 対 α の deformation.

$$H_3 \quad f_{D_6} + s_2 x^4 + \frac{7}{20} s_2^2 x^3 + (s_6 + \frac{1}{20} s_2^3) x^2 + (\frac{3}{10} s_2 s_6 + \frac{1}{400} s_2^4) x \\ + (s_{10} + \frac{1}{100} s_2^2 s_6 + \frac{1}{5000} s_2^5) + \frac{1}{\sqrt{5}} s_6 y.$$

$$H_4 \quad -(\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} y^3) + s_2 x^3 y - 2s_2^4 x^2 y + (s_{12} + \frac{6}{5} s_2^6) x^3 \\ + (-2s_2 s_{12} + \frac{19}{15} s_2^7) xy + (-s_2^3 s_{12} - \frac{28}{15} s_2^9) x^2 + (s_{20} + \frac{3}{2} s_2^4 s_{12} \\ - \frac{11}{45} s_2^{10}) y + (-s_2^2 s_{20} - s_{12}^2 - \frac{7}{30} s_2^6 s_{12} + \frac{82}{75} s_2^{12}) x + s_{30} \\ + \frac{4}{5} s_2^5 s_{20} + \frac{1}{2} s_2^3 s_{12}^2 + \frac{14}{45} s_2^9 s_{12} - \frac{103}{450} s_2^{15}.$$

$$I_2(2k+1) \quad f_{A_{2k}} + \sum_{j=1}^k \frac{(2k+2-2j, j-1)}{j! (2k+1)^{j-1}} s_2^j x^{2k+1-2j} + s_{2k+1}$$

$$I_2(2k)_A \quad f_{A_{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j, j-1)}{j! (2k)^{j-1}} s_2^j x^{2k-2j} + s_{2k} + \frac{s_2^k}{k(2k)^{k-1}}$$

$$I_2(2k)_D \quad f_{D_{k+1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j, j-1)}{j! (2k)^{j-1}} s_2^j x^{k-j} + s_{2k} + \frac{s_2^k}{k(2k)^{k-1}}$$

$$I_2(12)_E \quad f_{E_6} + s_2 x^2 y - \frac{1}{24} s_2^3 x^2 - \frac{1}{576} s_2^4 y + s_{12}$$

$$I_2(18)_E \quad -\frac{1}{3} (x^3 y + y^3) + s_2 x y^2 - \frac{4}{9} s_2^3 y^2 + \frac{1}{9} s_2^4 x y - \frac{1}{81} s_2^6 y + \frac{179}{2 \cdot 3^9} s_2^9$$

$$I_2(30)_E \quad -\frac{1}{5} (x^7 + y^3) + s_2 x^3 y - 2 s_2^4 x^2 y + \frac{6}{5} s_2^6 x^3 + \frac{19}{15} s_2^7 x y - \frac{28}{15} s_2^9 x^2$$

$$-\frac{11}{45} s_2^{10} y + \frac{82}{75} s_2^{12} x + s_{30} - \frac{103}{450} s_2^{30}$$

表 3. H, I 型 $\Rightarrow$ free deformation.

		discriminant.
$G(r, 1, \ell) \circ$	$f_{A_{r\ell}} + t_r x^{r(r-1)} + t_{2r} x^{r(r-2)} + \dots + t_{1r}$	B_ℓ
$G(r, 2, \ell) \circ$	$f_{D_{\frac{r\ell}{2}}} + t_r x^{\frac{r(r-1)}{2}-1} + \dots + t_{r(r-1)} x^{\frac{r}{2}-1} + 2t'_{\frac{r\ell}{2}} y$	A_1
No. 4 [7]^r	$f_{A_{r-1}} + t_r$	$t'_\ell \Delta_\ell(1, t_r, \dots, t_{r(r-1)}, t^{1/2})$
No. 4	$x^3 + y^3 + t_4 x + t_6$	A_2
5	$f_{E_6} + t_6 x^2 + t_{12}$	B_2
8	$f_{E_6} + t_8 y + t_{12}$	A_2
16	$f_{E_8} + t_{20} y + t_{30}$	A_2
20	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + \frac{1}{5} t_{12}^2 x + t_{30}$	$I_2(r)$
25	$f_{E_6} + t_6 x^2 + t_9 x + t_{12}$	A_3
26	$f_{E_7} + t_6 y^2 + t_{12} y + t_{18}$	C_3
32	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{18} x^2 + t_{24} x + t_{30}$	A_4
31	$f_{E_8} + t_8 x^2 y + t_{12} x^3 + t_{20} y + t_{24} x$	(待研究)

9	$f_{E_8} + t_8 x^2 y + t_{24} x$	G_2
10	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{24} x$	B_2
12	$f_{E_6} + t_6 x^2 + t_8 y + \frac{1}{8} t_6^2$	$(t_8/3)^3 + (t_6/4)^4$
22	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{20} y + \frac{1}{5} t_{12}^2 x$	$(t_{20}/3)^3 - (t_{12}/5)^5$

Table 4				u. g. g. r.					is it a deformation				
No.	h	n_{eff}	H	No.	type	h	n_{eff}	H	$2h/x$	bd.			
3	r	$2 = 2$	t_2	23	H_3	10	10	10	10	.			
4	6	4	3	24	.	14	12	14	14				
5	12	8	4	25	.	12	8	4	8	.			
6	12	10	6	26	.	18	14	6	14	.			
7	12	14	6	27	.	30	26	30	30				
8	12	6	3	28	F_4	12	12	12	12	.			
9	24	18	6	29	.	20	18	20	20				
10	24	14	4	30	H_4	30	30	30	30	.			
11	24	26	6	31	$\times$	24	30 = 30	30	30	.			
12	8	12 = 12		32	.	30	20	5	20	.			
13	12	18 = 18		33	.	18	16	18	18				
14	24	20	8	34	.	42	38	42	42				
15	24	26	10	35	F_6	12	12	12	12	.			
16	30	12	3	36	E_7	18	18	18	18	.			
17	60	42	6	37	F_8	30	30	30	30	.			
18	60	32	4	1	A_2	$l+1$	$l+1$	$l+1$	$l+1$	.			
19	60	62	6	$G(r, 1, l)$	$\times$	$2r$	$(l-1)r+2$	$2l$	$(l-1)r+2$	.	$r \geq 2$		
20	30	20	5	$G(6, 2, 2)$	$\times$	6	8	6	8	.			
21	60	50	10	$G(r, 2, l)$	$\times$	$(l-1)r$	$(l-1)r+2$	$4(l-1)+2$	$(l-1)r+2$	.	$r \geq 6$		
22	20	30 = 30		$G(r, 1/2, l)$	$\times$	$(l-1)r$	$(l-1)r+2$	$2(l-1)r+2$	$(l-1)r+2$	.	$(l-1)r \geq 4$		
				$G(r, p, l)$	$\times$	$(l-1)r$	$(l-1)r+2$	$2(l-1)p+2$	$(l-1)r+2$	.	$(l-1)r \geq 2$		
				$G(r, r, l)$	.	$(l-1)r$	$(l-2)r+2$	$(l-1)r$	$(l-1)r$	.	$(l-1)r \geq 2$		
						$(l-1)r$	$(l-1)r+1$	$(l-1)r$	$(l-1)r$	.	$(l-1)r \geq 2$		

Table 5 u. g. g. r. $\rightarrow$ is a deformation

Classical works

- [1] F.Brioschi: Sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado, Annali di Math., SerI, 1(1858), 256-259.
- [2] G.Racah: Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni..., Rend.Circ.Mat.Palermo, 8(1950), 108-113.
- [3] H.S.M.Coxeter: The product of generators of a finite groups generated by reflections, Duke Math., 18(1951), 765-782.
- [4] J.S.Frame: The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents, Annali di Math., 32(1951), 83-119.
- [5] G.C.Shephard and J.A.Todd: Finite unitary reflection groups, Can.J.Math., 6(1954), 274-304.
- [6] C.Chevalley: Invariants of finite groups generated by reflections, Amer.J.Math., 77(1955), 778-772.
- [7] A.J.Coleman: The Betti numbers of the simple groups, Canad. J.Math., 10(1958), 349-356.
- [8] R.Steinberg: Finite reflection groups, Trans.Amer.Math. Soc., 91(1959), 493-504.
- [9] " : Invariants of finite reflection groups, Canad.J. Math., 12(1960), 616-618.
- [10] L.Solomon: Invariants of finite reflection groups, Nagoya M.J., 22(1963), 57-64.

Nowadays

- [11] L.Flatto: Invariants of finite reflection groups and mean value problems II, Amer.J.Math., 92(1970), 552-561.
- [12] R.P.Stanley: Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections, J.Alg., 49(1977), 134-148.
- [13] L.Flatto: Invariants of finite reflection groups, L'Enseignement math., 24(1978), 237-292.

- [14] T.A.Springer: Regular elements of finite reflection groups, *Inventiones Math.*, 25(1974), 159-198.
- [15] P.Orlik and L.Solomon: Unitary reflection groups and Cohomology, *Inventiones Math.*, 59(1980), 77-94.

Logarithmic vector fields

- [16] K.Saito: Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J.Fac.Sci.Univ.Tokyo*, (1980),
- [17] V.I.Arnold: Wave front evolution and equivalent Morse lemma, *Commu.P.Appl.Math.*, 29(1976), 557-582.
- [18] Yano T., Sekiguchi J.: Coxeter groups ni fuzui suru weighted homogeneous polynomial no microlocal structure (with an Appendix on $GL(2)$), *RIMS Kokuroku* 281, 1975, 40-105.
- [19] J.Sekiguchi and T.Yano: The algebra of invariants of the Weyl groups $W(F_4)$, *Sci.Rep.Saitama Univ.Ser.A* 9(1979), 21-32.
- [20] J.Sekiguchi and T.Yano: A note on the Coxeter group of type H_3 , *Sci.Rep.Saitama Univ.Ser.A* 9(1979), 33-44.
- [21] T.Yano and J.Sekiguchi: Microlocal structure of weighted homogeneous polynomials associated with finite Coxeter groups, I, *Tokyo J.Math.* 2(1979), 193-220.
- [22] " and " : " , II, *Tokyo J.Math.* (1981), to appear.
- [23] T.Yano: On a generator system of $W(E_7)$ invariant ring, to appear.
- [24] A.B.Guivental': Displacement of invariants of groups that are generated by reflections and are connected with simple singularities of functions, *Functional Anal.Appl.* 14 (1980), 81-89.

Singularities, Lie algebras

- [25] V.I. Arnold: Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k , D_k , E_k and the Lagrangean singularities, Functional Anal. Appl. 6(1972), 3-25.
- [26] " : Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k , C_k , F_4 and singularities of the evolutes, Uspehi Mat. Nauk 33(1978), 91-105.
- [27] " : Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, displacement of invariants of groups, generated by reflection and singular points of projections of smooth surfaces, Uspehi Mat. Nauk 34(1979), 3-38.
- [28] E. Brieskorn: Singular elements of semi-simple algebraic groups, Actes Congres Intern. Math. 1970, t. 2, 279-284.
- [29] P. Slodowy: Simple singularities and simple algebraic groups, Lecture Note in Math., 815
- [30] J. Sekiguchi: logarithmic vector fields along the discriminant set of a Weyl group, submitted to J. Math. Soc. Japan.
- [31] H. Terao: Free arrangement of hyperplanes,

Flat coordinate system

- [32] K. Saito, T. Yano and J. Sekiguchi: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group, Comm. in Algebra 8(1980), 373-408.
- [33] T. Yano: Flat coordinate system of type E_7 , to appear in Proc. Japan Acad.

- [34] M.Kato and S.Watanabe: Flat coördiante system for the versal deformation of rational double point of type E_8 , to appear.
- [35] K.Saito: On a linear structure of a quotient variety by a finite reflection group, Preprint RIMS-288, Res.Ins.Math.Sci. Kyoto Univ., accepted with proviso by Commun. in Algebra.
- [36] T. Yano: Free deformations of isolated singularities, Sci. Rep.Saitama Univ.Ser A 9(1980),61-70.
- [37] T.Yano and M.Kato: Free deformations of simple elliptic singularities, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser A 9(1980),71-79.
- [38] T.Yano: Deformation of isolated singularities and folding of Coxeter systems, in preparation.
- [39] T.Yano: Deformation s of rational double points associated with unitary reflection groups, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser A 10(1981).