

成層密度流の流れの構造に関する研究

江 頭 進 治・芦 田 和 男

STRUCTURES OF DENSITY STRATIFIED FLOWS

By Shinji EGASHIRA and Kazuo ASHIDA

Synopsis

Shear stress coefficient at interface, mixing lengths and diffusion coefficient are discussed in a density stratified shear flow.

The equation of the shear stress coefficient is derived theoretically from equations of continuity, mass and momentum conservations.

Mixing lengths for momentum and mass or heat are discussed, based on the acceleration balance equation and some integral methods. The theoretical methods to predict these mixing lengths are developed. According to the theories, stabilizing effects of density stratification is more in mixing length for mass or heat than in that for momentum.

Turbulent diffusion coefficient for mass or heat is discussed, and the theory is developed.

These theories presented in this study show good agreements with the experimental results.

1. 緒 論

流体輸送に関連した現象の解析では、流速、温度、密度および浮遊物や溶解物濃度の分布形にまで立入った議論を要する場合と、これらの平均量だけで十分な場合とがある。いずれにしても、分布形と平均量を独立に扱えることは希で、一方から必然的に、あるいは適切な条件を用いて他方が導かれる場合が多い。

Fig. 1 は通常とられている密度流現象の解析法を示したものである。Aの向きの解析では、control sectionを設け、二次元または三次元の支配方程式からある種の条件下で単純化されるか、あるいは直接的な方法で求められる一次元方程式によって議論される。Bの方向では、支配方程式を直接積分できることは希で、境界層近似やこれに類した種々の単純化を計り、かつ輸送係数や混合距離の分布を仮定した上で解析が進められる。

しかし、いずれの解析法においても、積分境界面の条件、すなわち、界面を通して起る運動量、質量および熱輸送などがどのような変数によって規定されるかが重要である。

こういった界面の条件は、界面抵抗係数 (f_i) や乱流進行率 (E) の問題として研究されており、一般に、前者では内部フルード数とレイノルズ数が、後者では内部フルード数あるいは over-all Richardson Number が重要な水理変数となる。

流速、温度、塩分および密度などの分布形は、明らかにされた界面条件を拠りどころにして、適当に推定された混合距離や渦動粘性係数および渦動拡散係数を用いて求められる。しかし、混合距離などの乱れ特性量を的確に推定することはかなり困難であり、従来、次元解析的に、または、大胆な仮定のもとに運動量、エネルギー保存および乱れ変動量に関する分散方程式などを用いて考察され、これらを支配する主な変数は、flux 型あるいはgradient 型の Richardson Number であることが指摘されている。

密度成層乱流場の輸送現象に関する取り扱い、大略上述のようであり、今なお解明すべき多くの問題が

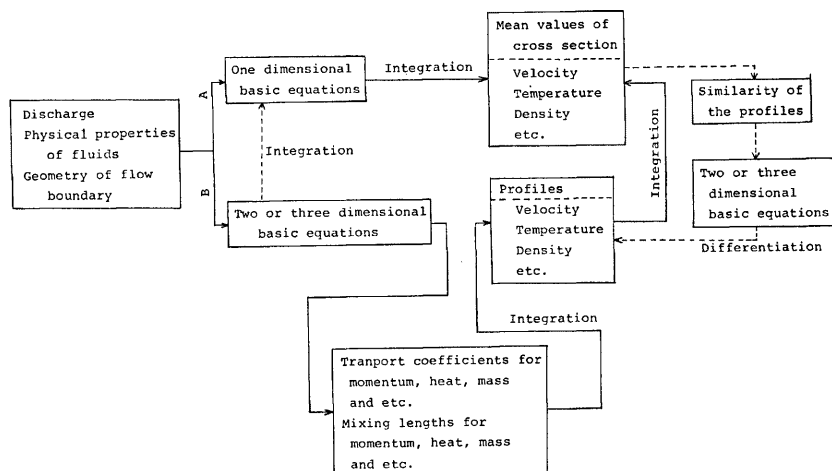


Fig. 1 General method to analyze the transport phenomena of density currents.

残されているが、観測および実験が早くから集積された分野では、次元解析的考察に基づいたかなり一般性のある経験則が提案されている。例えば、固定壁面上の接地境界層における輸送現象に関して、Monin・Obukhov は、安定度長 L を導入した相似理論により、密度成層場の諸特性を中立安定状態からの変化量として表示することにほぼ成功している。

境界面が水と水あるいは空気と空気のように互いに混合が起るような場の流れでは、界面の条件の設定がそれほど簡単でなく、しかも渦動粘性・拡散係数および混合距離の分布は、まさつ速度などの界面条件によって影響されるとともに、密度分布に起因する浮力の影響を受け、定量的な評価はほとんどなされていない。

そこで本研究では、水温や塩分濃度の相連による安定な密度成層流を対象として、この流れの構造について考察する。すなわち、次章においては、界面まさつ速度などの界面条件を究明するため、これを抵抗係数の問題に置き換え、混合を考慮した非圧縮性法流体の質量保存則と運動量保存則に基づいて議論する。3章では、加速度平衡式などを用いて、運動量、質量および熱の混合距離について考察し、4章では、混合距離を用いた渦動拡散係数の分布について考察する。

2. 境界面の抵抗係数

2.1 概説

前述したように、境界面の抵抗係数は密度流現象の解析において非常に重要なもので、密度流研究の中心課題の一つに挙げられ、現在も活発な研究が行なわれている。こうした研究は、理論的または経験的方法を問わず、界面抵抗の因を何に求めるかによって次の二つのグループに分類できるようなのである。一つは、境界面に形成される内部波のエネルギー逸散に注目したもので、他は、流速分布形や界面混合などの内部構造に注目して議論するものである。

現時点においては、前者の方法が多数を占めているが、これらの代表的なものはつぎのようである。Keulegan¹⁾ (1949) は、境界面における単位面積当りの波動運動のエネルギー逸散率 dD/dt と抵抗係数 f_i との関係を次式のように表示した。

$$\tau U = \frac{1}{2} f_i \rho U^3 = \frac{dD}{dt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 τ ：界面せん断応力、 U ：平均流速、 ρ ：密度。さらに、風波のエネルギー逸散率から dD/dt の関数形を求め、 f_i は波長から作られるレイノルズ数と波形こう配によって規定されることを導いた。岩崎⁷² (1962) は、実験結果に基づいて考察し、 f_i はレイノルズ数 R_e と内部フルード数 F_i から作られるパラメータ $\varphi = R_e F_i^2$ ($\varphi = \theta^{-1/3}$, θ ：クーリガン数) の関数であることを示した。椎貝⁷³ (1964) は、ポテンシャル流れの理論を基礎として、内部波のエネルギー逸散を求め、(1) 式に基づいて、 $f_i \propto \varphi^{-1}$ なる関係を導いた。浜田⁷⁴ (1966) は、同様な手法から、 $f_i \propto \varphi^{-0.5}$ を推測した。金子⁵³ (1966) は、現地観測資料や実験値を整理して次式を提案した。

$$f_i = 0.2 \varphi^{-0.5} \quad \dots\dots\dots (2)$$

上式は、土木学会密度流研究小委員会の総括⁶¹ (1975) にも見られるように、我国で最もよく採用されている経験式である。最近、玉井・浅枝⁷⁵ (1978) は、境界面近傍の流速分布を層流理論に基づいて議論し、これから内部波のエネルギー逸散を算定し、種々のデータとの比較により次式を提案した。

$$f_i = 0.0896 (R_e F_i^2)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

以上は、(1) 式に示されるように、界面抵抗に対して内部波のエネルギー逸散が支配的であるとした研究である。しかし、内部波のエネルギー逸散が、主流のなす仕事と等しいためには、実際よりかなり大きな波形こう配が要求される。したがって、(1) 式のように、主流のなす仕事が全て内部波のエネルギーに変換されるとするには疑問の余地がある。一例として、須賀・高橋⁹¹ (1971) は、規模の異なる実験水路から得られた結果について、 f_i と φ の関係を検討したが、統一的な見解は得られなかった。この報告によると、むしろ次式、

$$f_i \propto R_e^{-1} \quad \dots\dots\dots (4)$$

のような相関が強いようである。

もう一つのグループは、流速分布や界面混合から抵抗を論じようとするものであるが、フルード数が小さく、しかも流れが層流の場合は、簡略化されたナビエ・ストークスの方程式を解くことによりほぼ完全に議論できる。Ippen Harleman⁹² (1952) は、上層静止の下層密度流に関して流れ全体の抵抗を議論した。この結果から壁面抵抗を分離すると、界面抵抗係数は次式のようになる。

$$f_i = 5.61 R_e^{-1} \quad \dots\dots\dots (5)$$

下層静止の上層流に対しては、嶋・椎貝・玉井¹⁰⁰ (1964) が次式を導いた。

$$f_i = \frac{6}{1 + 3/4 (h_2/h_1)} R_e^{-1} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 h_1 , h_2 ：それぞれ上層および下層の水深。

乱流を対象にしたものにはつぎのような研究がある。Abraham・Eysink¹¹¹ (1971) は次元解析的考察から、内部フルード数が大きくなると界面混合が活発化し、 f_i が増加することを予想して、次の関数形を想定した。

$$f_i = F(F_i) \quad \dots\dots\dots (8)$$

Pedersen¹²² (1972) は、連続式、質量保存則、運動量およびエネルギー保存則を用いて、 f_i と連行率 E が等価であることを次のように導いた。

$$f_i = E \quad \dots\dots\dots (9)$$

柏村¹²³ (1974) は、連続式、質量および運動量保存則を用いて、上式と同じ結果を導いた。しかし、いずれにおいても設定された条件に疑問がある。最近、日野¹⁴² (1979) は下層が層流、上層が乱流の場合の流速分布形を導き、これに基づいて抵抗係数に関する理論式を提案した。それによると、 f_i は、主に φ と内部フルード数によって規定される。しかし、界面近傍の流速分布形の導き方によって結果は大きく左右されるようで、今後、流速分布形に関する詳細な考察が必要であろう。

以上、境界面の抵抗に関して、研究の着眼点を大きく二つに分類して考察した。前者の方法から得られる

結果は、レイノルズ数を固定し、内部フルード数を増加させると、つまり、混合が活発化するに伴い抵抗係数が減少するという不合理な面がある。後者の方法では、日野の結果を除いて、層間の混合が激しくなると、それに伴い運動量交換も増加し、抵抗係数も大きくなるといった、定性的には妥当性のある結果が得られる。しかし、論理が不十分で、未だ定性論の域をでない。

界面抵抗係数に関する研究は、現在上述のような状況にあり、解明すべき多くの問題が残されている。そこで本章においては、乱流進行に関して種々の実験値を整理した芦田・江頭¹⁵⁾ (1975) の研究成果に基づいて、進行現象が界面抵抗にどのように寄与するかについて考察する。ついで、若干の実験結果を参照して抵抗係数の表示式を提案する。

2.2 混合を考慮した基礎方程式の展開

以下の議論は、二次元流れ、静水圧分布およびブシネスク近似が成り立つ条件下で進められる。

Fig. 2 には、座標系と上層流の模式図が示されている。水面に沿って主流の向きに x 軸、これから鉛直下向きに z 軸をとる。水面および底面が水平面となす角をそれぞれ α, θ とすると、運動方程式は次式のようにになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = \frac{\rho}{\rho_0} g \sin \alpha - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (9)$$

ここに、 u, w : 流速の x, z 成分、 p : 圧力、 ρ_0 : 基準密度、 ρ : 密度、 τ : セン断応力。非圧縮性流体の連続式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

(9) 式および (10) 式において、 u, w, ρ, p, τ は全て時間平均値である。さて、上層 $0 \leq z \leq d_1$ について (10) 式を積分すると、次式が導かれる。

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U_1 d_1) = W_e \quad (11)$$

ここに、 d_1 : 上層厚、 U_1 : 上層の平均流速、 W_e : 連行速度。上式は単なる一次元の連続式に過ぎないが境界面における流速の z 成分を次式のように置いて得られるものである。

$$w(d_1) = \frac{\partial d_1}{\partial t} + u(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial x} - W_e \quad (12)$$

したがって、連行速度は、境界面の水粒子の速度から内部波運動による速度を差し引いたものとして明確に定義される。換言すると、単位時間、単位面積当りの実質的な混入量であり、(11) 式から明らかなように、界面侵食による層厚の増加速度と流量の変化率の和として表示される。

このように定義される連行速度を用いると、一次元質量（密度）保存則は、次式のように導かれる。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \frac{\Delta \rho}{d_1} W_e \equiv \frac{\Delta \rho}{d_1} E (U_1 - U_2) \quad (13)$$

ここに、 ρ_1 : 上層断面平均密度、 $\Delta \rho$: 上・下層の密度差、 $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ (ρ_2 : 下層の断面平均密度)、 E : 連行率。

つぎに、(9) 式を $0 \leq z \leq d_1$ の領域で積分すると一次元運動量保存則が次式のように導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(U_1 d_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 U_1^2 d_1) + u(d_1) \left\{ w(d_1) - \frac{\partial d_1}{\partial t} - u(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial x} \right\} \\ = \frac{\rho_1}{\rho_0} g d_1 \sin \alpha - \frac{1}{\rho_0} \int_0^{d_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} g z dz + \frac{1}{\rho_0} \{ \tau(d_1) - \tau(0) \} \end{aligned} \quad (14)$$

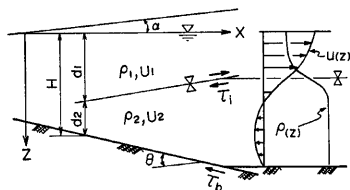


Fig. 2 Coordinate system and an upper layer flow.

ここに、 α_1 ：運動量補正係数。

下層についての基礎方程式もほぼ同様に導かれる。まず連続式はつぎようになる。

$$\frac{\partial d_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U_2 d_2) = -W_e \quad \dots\dots\dots (15)$$

下層から上層への連行であるから、連行によって下層水の密度は変化しない。したがって、一次元密度保存則は次式のようになる。

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

運動量方程式を導く前に、圧力項について次式のように変化しておく。圧力は、

$$p = \rho_1 g z + (\rho_2 - \rho_1) g(z - d_1) \quad \dots\dots\dots (17)$$

であり、 $\partial p / \partial x$ は、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\Delta \rho g \frac{\partial d_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} g d_1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

さて、(18) 式の関係を用いて (9) 式を $z = d_1 \sim H$ 区間で積分すると、下層に対する運動量方程式は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(U_2 d_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 U_2^2 d_2) + u(d_1) \left\{ \frac{\partial d_1}{\partial t} + u(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial x} - w(d_1) \right\} \\ = \frac{\rho_2}{\rho_0} g d_2 \sin \alpha - \frac{1}{\rho_0} \int_{d_1}^{\alpha} \left\{ -\Delta \rho g \frac{\partial d_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} g d_1 \right\} dz + \frac{1}{\rho_0} \{ \tau(H) - \tau(d_1) \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 α_2 ；運動量補正係数、および H ：全水深で、 $H = d_1 + d_2$ である。(14) 式および (19) 式を用いて抵抗係数の算定式を得るためには、まず、圧力項に含まれる上層の密度変化率 $\partial \rho / \partial x$ を知る必要がある。ここで、(13) 式において、

$$\partial \rho_1 / \partial t \ll U_1 \partial \rho_1 / \partial x$$

なる状態を考えると、次式が成立する。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \frac{\Delta \rho W_e}{d_1 U_1} \quad \dots\dots\dots (20)$$

せん断応力 $\tau(0)$ 、 $\tau(d_1)$ および $\tau(H)$ に関して、境界面および底面せん断応力を τ_i 、 τ_b とすると、 $\partial u / \partial z|_{z=0}=0$ 、 $\partial u / \partial z|_{z=d_1}<0$ 、 $\partial u / \partial z|_{z=H}>0$ であるので、次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \tau(0) &= 0 \\ \tau(d_1) &= -\tau_i \\ \tau(H) &= \tau_b \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

時間的に流量が変化しない定常流を対象にして (12)、(20) および (21) 式を用いて運動量保存則 (14)、(19) 式を書き換えると、それぞれ次式が得られる。

$$2 U_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} - U_1^2 \frac{\partial d_1}{\partial x} - u_i W_e = \frac{\rho_1}{\rho_0} g d_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g d_1 \frac{W_e}{U_1} - \frac{\tau_i}{\rho_0} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$2 U_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} - U_2^2 \frac{\partial d_2}{\partial x} + u_i W_e = \frac{\rho_2}{\rho_0} g d_2 \sin \alpha + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g d_2 \frac{\partial d_1}{\partial x} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g d_2 \frac{W_e}{U_1} + \frac{1}{\rho_0} (\tau_i + \tau_b) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $q_1 = U_1 d_1$ 、 $q_2 = U_2 d_2$ 、 $u_i = u(d_1)$ 。(22)、(23) 式から右辺の重力項を消去し、 $\rho_1 / \rho_2 = 1$ なる関係を用いて整理すると、界面せん断応力に関して次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\tau_i}{\rho_0} = & -U_1^2 \frac{1-F_1^2}{F_1^2} \frac{H-d_1}{H} \frac{\partial d_1}{\partial x} + u_i W_e + \frac{1}{2} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g d_1 \frac{W_e}{U_1} \frac{H-d_1}{H} \\ & - U_2^2 \frac{\partial d_2}{\partial x} \frac{d_1}{H} - 2 U_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{H-d_1}{H} + 2 U_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \frac{d_1}{H} - \frac{\tau_b}{\rho_0} \frac{d_1}{H} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

I
II
III

IV
V
VI
VII

上式において、第Ⅰ、Ⅳ項は流れの層厚変化による応力。第Ⅰ、Ⅲ、ⅤおよびⅥ項は乱流連行による応力で、第Ⅰ項は、界面の境界条件から生ずるところの連行に伴う応力、第Ⅲ項は流下方向の密度増加による圧力こう配に起因した応力、第ⅤおよびⅥ項は流量変化による応力である。

つぎに、連行速度の現れ方の異なる代表的な2例について(24)式の評価を行う。

(1) 連行速度 W_e が界面の侵食速度で評価される場合

Fig. 3 は、流入量と流出量が等しい場合の上層流を模式的に示したものである。この種の流れの連行現象や流速分布は、すでに芦田・江頭(1975, 1978⁽⁶⁾)によって検討されているが、連行速度および流量の変化は、それぞれ次式で与えられる。

$$W_e = \partial d_1 / \partial t \quad \dots\dots\dots (11')$$

$$\left. \begin{aligned} \partial q_1 / \partial x = 0, \quad q_1 = q_i = q_0 = \text{const.} \\ \partial q_2 / \partial x = 0, \quad q_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

連行速度 W_e は連行率 E を用いて表示され、しかも E は、over-all Richardson Number R_{i*} のみの関数であり、これらの関係は次のように示される。

$$\left. \begin{aligned} W_e = EU_1, \quad E = K/R_{i*} = KF_i^2 \\ F_i^2 = 1/R_{i*} = U_i^2 / \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} g d_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 K は定数で、芦田・江頭(1975)によると、 $K \approx 0.0015$ 。

さて、 $\tau_i = 1/2 \cdot f_i \cdot \rho_0 U_i^2$ および近似的に $\tau_b = 0$ とおき、(25)、(26)式を(24)式に代入して、界面抵抗係数 f_i について解くと、第Ⅳ～Ⅵ項が消失し、次式が導かれる。

$$f_i = -2 \frac{1 - F_i^2}{F_i^2} \frac{\partial d_1}{\partial x} \frac{H - d_1}{H} + 2KF_i^2 \frac{u_i}{U_i} + K \frac{H - d_1}{H} \quad \dots\dots\dots (27)$$

Ⅰ
Ⅱ
Ⅲ

第ⅠおよびⅢ項が0の場合、上式は、通常界面抵抗係数の算定に用いられているものと等価である。乱流の場合、第Ⅰ項の u_i/U_1 は水理条件によって若干変化することが予想されるが、この変化を無視してこれを一定と考え、しかも層流理論から十分推定できるものとする。そこで、加速度項などを省略したナビエ・ストークスの運動方程式を、水面で速度こう配0、界面流速 u_i の条件下で解くと、次式が導かれる。

$$\frac{U_1}{u_{\max}} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_i}{u_{\max}} \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $u_{\max}$ ：表面流速である。 $u_i/u_{\max}$ に関して Keulegan⁽⁷⁾ (1944)の値0.6が適用できるものとする、 $U_1/u_{\max} \approx 0.87$ となる。そこで、 $u_i/U_1 = (u_i/u_{\max})(U_1/u_{\max})^{-1}$ と変形すると、

$$u_i/U_1 \approx 0.69 \quad \dots\dots\dots (29)$$

が得られる。

つぎに、第Ⅰ項の評価を行うに際し、界面せん断応力を分子粘性による応力 τ_i' と乱流連行による付加応力 τ_i'' に分割し、これらに対応して抵抗係数も f_i' と f_i'' に分離できるものとする、これらは次式のようなになる。

$$\tau_i = \tau_i' + \tau_i'' \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$f_i = f_i' + f_i'' \quad \dots\dots\dots (31)$$

(27)式で乱流連行を無視したとき、つまり混合が考慮されない場合の抵抗係数は第Ⅰ項のみで評価され

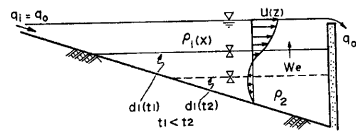


Fig. 3 An upper layer flow in which the turbulent entrainment is shown as the lowering velocity of the density interface.

る。したがって、この項を純粋に分子粘性に関連するものとして、大胆に、つぎの関係が成り立つことを想定する。

$$f_i' = \text{第 I 項} = -2 \frac{1-F_i^2}{F_i^2} \frac{\partial d_1}{\partial x} \frac{H-d_1}{H} = \Lambda/R_e \quad \dots\dots\dots(32)$$

ここに、 Λ は層流理論から導かれる定数で、つぎのように推定される。すなわち、(28) 式の展開の場合と同じ式を採用し、境界面においてせん断応力の条件を加えると、次式が導かれる。

$$\Lambda = 6(1-u_i/U_1) \quad \dots\dots\dots(33)$$

しかし、(33) 式を検証するのは、嶋・椎貝・玉井 (1964) の実験に見られるように、側壁まさつの影響などのために、かなり困難である。

以上、各項の意義について考察を行ったが、連行率を定める定数、 $K=0.0015$ 、(29) および (32) 式を用いて (27) 式を書き換えると、 f_i はつぎようになる。

$$f_i = f_i' + f_i'' = \frac{\Lambda}{R_e} + 0.00207 F_i^2 + 0.0015 \frac{H-d_1}{H} \quad \dots\dots\dots(34)$$

(2) 連行速度 W_e が流量の増加率で評価される場合

Fig. 4 は侵入長が変化しない定常塩水くさびを模式的に示したものであり、この場合、(11) および (15) 式より連行速度と流量の変化率との関係は次式で与えられる。

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = W_e, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x} = -W_e \quad \dots\dots\dots(35)$$

Fig. 4 を参考にして、逆流がほとんどない地点 x_1 の流量を $q(x_1)$ とすると、 x 地点の流量はつぎのように書ける。

$$q_1(x) = q_1(x_1) + q_{we}(x) = q_1(x_1) + \int_{x_1}^x W_e(x) dx \quad \dots\dots\dots(36)$$

$$q_2(x) = -q_{we}(x) = -\int_{x_1}^x W_e(x) dx \quad \dots\dots\dots(37)$$

ここに、 q_{we} ：連行される流量、 W_e に関する (26) 式の関係は、**Fig. 4** の流れにも適用できるので、(26) および (35) 式を用いて (24) 式を界面抵抗係数で表示すると、つぎようになる。

$$\begin{aligned} f_i = & -2 \frac{1-F_i^2}{F_i^2} \frac{\partial d_1}{\partial x} \frac{H-d_1}{H} - 2 \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{\partial d_2}{\partial x} \frac{d_1}{H} + 2 K F_i^2 \frac{u_i}{U_1} \\ & + K \left(1 - 4 F_i^2 - 4 \frac{U_2^2}{U_1^2} F_i^2 \frac{d_1}{H-d_1} \right) \frac{H-d_1}{H} + f_b \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{d_1}{H} \quad \dots\dots\dots(38) \\ & \text{I} \qquad \qquad \qquad \text{II} \qquad \qquad \qquad \text{III} \qquad \qquad \qquad \text{IV} \qquad \qquad \qquad \text{V} \end{aligned}$$

流量が場所的に変化するので、(1) の場合のように、一般的に論ずるのはかなり困難である。そこである種の条件を付けて各項の評価を行う。

上流域の $q_2(x) \approx 0$ の領域 (**Fig. 4**, $x=x_1$ 近傍) においては、通常観測される塩水くさびを参考にすると、

$$U_2 \approx 0, \quad F_i^2 < 0.1, \quad d_1/H > 0.5$$

程度であり、

$$\text{第 I 項} \approx 0, \quad \text{第 V 項} \approx 0, \quad \text{第 IV 項} \approx K(H-d_1)/H \quad \dots\dots\dots(39)$$

となる。

中流域 ($x=x_2$ 近傍) では、

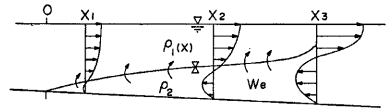


Fig. 4 Stationary salt wedge in which the turbulent entrainment is shown as the change of the discharge rate in the flow direction.

$$U_2 < 0, |U_1/U_2| \approx 0.5, F_1^2 \approx 0.1, 0.5 < d_1/H$$

程度の流れを考えると、次式の成立を想定できる。

$$|\text{第 I 項}| \ll |\text{第 I 項}|, \text{第 IV 項} \approx K(H-d_1)/H \quad \dots\dots\dots (40)$$

下流域 ($x=x_3$ 近傍) では、

$$U_2 < 0, |U_2/U_1| \approx 1, 0.5 < F_1, \frac{d_1}{H} \approx 0.5$$

程度を考えると、

$$\text{第 IV 項} \approx K(H-d_1)/H \quad \dots\dots\dots (41)$$

である。第 I、II および V 項の大小関係は十分検討できないが、 f_b は $\partial d_2/\partial x$ 程度であるから、II 項と V 項の和は相殺し合う関係にある。

以上、塩水楔の上・中・下流域について (38) 式の各項の評価を行った。これらのことを総合すると、連行速度が流量の変化率で定義される場合も (27) および (34) 式は、かなり一般的な推定式であると思われる。

2.3 実験値による定数 A の検討

(32) 式で定義される f'_i は、従来我国のほとんどの研究において全抵抗係数として扱われてきたもので、 $f_i \sim \varphi$ 型の表示がなされてきた。しかし、前述の理由から、また、玉井・浅枝 (1978) が収集した実験室や現地のデータを検討してみると、むしろレイノルズ数で評価する方が合理的なように思われる。そこで、前節で考察したところの 2 種の流れについて、 f'_i とレイノルズ数の関係を検討しよう。

Fig. 5 には、連行速度が境界面の低下速度で現わされる上層流に関して、実験値と R_e の関係が示されている。図中のデータは、Exp. 8-1~8-5 および Exp. 12-1~12-4 のもので、実験条件ならびに結果は **Table 1** のとおりである。ここに、 q : 単位幅流量、 H , d_1 : 全水深および上層厚、上・下流の測定断面の中央部の値、 $\partial d_1/\partial x$: 上層厚の変化率、 $\Delta\rho/\rho$: 無次元密度差、 F_1^2 : 内部フルード数の 2 乗、 R_e : レイノルズ数である。

表からも明らかなように、レイノルズ数の範囲は $10^3 \sim 10^4$ 程度であるが、 R_e 数と f'_i の相関は非常によく、(32) 式の関係が成立しているものと思われる。しかも内部フルード数による有意な差は認められない。ただ、A の値はかなり広い範囲 ($A=10 \sim 40$) にあるが、これに関しては測定精度の問題と側壁の影響などが考えられる。すなわち、水温は、水深方向に 2 cm 間隔で測定されているため、界面の設定誤差が結果にかなり影響を与える。後者に対しては、**Table 1** から明らかなように、上層厚が増加すると f'_i も増加する傾向にあり、このことは嶋・椎貝・玉井 (1964) の報告にもみられる。

Fig. 6 は連行速度が流量の変化率で表示される場合、つまり塩水楔に関する玉井・浅枝 (1978) の資料を示したものである。実験値は、広い範囲に点在しているが、内部フルード数の違いによる有意な差は見られ

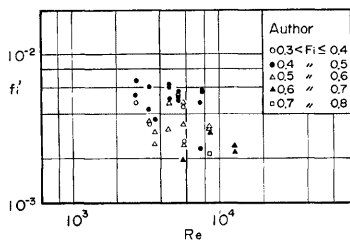


Fig. 5 The relation between f'_i and R_e concerning the upper layer flow in the experimental flume.

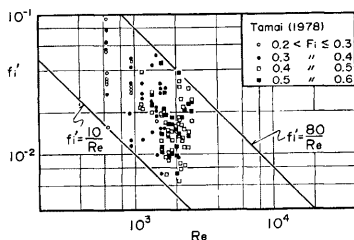


Fig. 6 The relation between f'_i and R_e concerning the salt wedge in the experimental flume.

Table 1 Hydraulic conditions for upper layer flows.

Exp No	q (cm^2/s)	H (cm)	d (cm)	$-10^3 \frac{\partial d_1}{\partial x}$	$10^3 \frac{\Delta \rho}{\rho}$	F_i^2	R_e	$10^3 f_i'$
8-1	46.34	30.60	15.23	1.866	2.15	0.256	5283	5.44
	"	"	15.65	1.573	2.12	239	5303	4.89
	"	"	16.24	1.524	2.10	216	5303	5.19
	"	"	16.60	1.561	2.08	204	5315	5.56
8-2	30.91	30.24	12.15	0.963	1.72	0.316	3619	2.49
	"	"	12.91	0.927	1.72	263	3654	2.97
	"	"	14.77	0.829	1.62	187	3667	3.69
8-3	82.06	31.90	19.97	0.890	2.23	0.222	7562	2.34
	"	"	20.43	1.756	2.20	210	7562	4.76
	"	"	20.73	2.037	2.18	203	7580	5.61
	"	"	20.98	2.098	2.11	202	7589	5.68
8-4	28.57	30.03	12.50	1.598	1.81	0.236	3353	6.04
	"	"	13.28	0.927	1.82	195	3369	4.26
	"	"	14.18	0.646	1.79	163	3377	3.50
	"	"	14.79	0.561	1.79	144	3397	3.39
8-5	100.0	32.42	21.47	2.476	2.52	0.409	12290	2.41
	"	"	22.17	2.098	2.47	379	12290	2.17
12-1	22.86	30.45	11.20	1.370	1.85	0.205	2715	6.71
	"	"	12.13	0.863	1.84	163	2724	5.35
	"	"	12.33	0.753	1.80	158	2741	4.77
12-2	49.09	31.45	14.92	1.274	1.81	0.409	5682	1.93
	"	"	15.68	1.370	1.84	347	5675	2.59
	"	"	16.99	1.000	1.84	273	5702	2.45
	"	"	17.27	1.329	1.81	264	5708	3.34
	"	"	18.02	1.740	1.77	238	5728	4.76
	"	"	18.11	1.616	1.77	234	5722	4.49
12-3	76.62	32.93	19.61	2.767	1.55	0.512	8580	2.13
	"	"	20.76	2.356	1.48	452	8609	2.11
	"	"	21.47	2.795	1.57	386	8600	3.10
	"	"	22.09	2.562	1.61	345	8658	3.20
	"	"	22.44	2.356	1.58	336	8678	2.97
12-4	39.74	31.23	14.13	1.301	1.82	0.314	4584	3.11
	"	"	14.90	1.644	1.83	266	4594	4.73
	"	"	15.48	1.575	1.81	240	4605	5.03
	"	"	16.15	1.644	1.83	209	4621	6.01
	"	"	16.71	1.616	1.81	191	4637	6.37

ず、著者らのデータと同様 (32) 式の関係が成立することが推察される。この種の流れに関しては、他にも多くの室内実験や野外観測資料があるが、ほとんど $f_i' = A/R_e$ の関係を用いて整理できるようであり、し

かもデータのばらつきは、金子(1966)や玉井・浅枝の方法によるものと同等か、もしくはこれらの方法より小さい。

以上、本節では連行速度の現われ方の相違によらず、(24)式右辺第1項は(32)式によって表示できることが明らかにされた。

2.4 抵抗係数の推定式の実験値による検証

抵抗係数 $f_i = f_i' + f_i''$ の推定式(34式)は、広範な密度流に対して、かなり一般的に成立する可能性がある。そこで、この推定式と上層密度流、下層密度流および交換密度流(Loke Exchange Flow)で測定された抵抗係数との関係について検討する。ただし、ここでは、(27)および(38)式から明らかなように、抵抗係数の測定値がこれらの式の第1項のみで定義されたものは検証データとして使用できず、乱れ計測などにより直接的方法によって得られたものか、運動方程式を直接積分して得られたものが用いられる。

Fig.7には、上層密度流に関する著者らの実験値と(34)式の関係が示されている。推定曲線は、同式で $A=15$ 、層厚比 $(H-d_1)/H=1$ として得られたものである。実験値は、Table 1 に示す f_i' に(34)式右辺第1、2項を加算したものである。したがって、これらのデータと理論曲線とがよく一致するのは当然のことである。

ここで、理論曲線の特性を詳しくみると、レイノルズ数の影響が顕著に現われるのは、 $Re=10^4$ 程度の範囲で、これが 10^5 を起えると、抵抗係数は内部フルード数と層厚比のみによって規定されることが明らかである。通常我々が観察する上層密度流の内部フルード数は0.2~0.8程度であるから、レイノルズ数の大きな流れにおいて、抵抗係数は、層厚比や内部フルード数に応じて、あるせまい範囲で変化する程度である。

Karels¹⁰⁾ (1974) は、種々のデータを収集して、ある範囲のばらつきを許せば、レイノルズ数が大きくなると抵抗係数は、一定値、

$$f_i \approx 0.8 \times 10^{-3}$$

になることを報告している。これは興味ある事実であり、いま、かりに層厚比 $(H-d_1)/H=0.5$ と置いてレイノルズ数の影響を無視すると、(34)式から算定される抵抗係数はつぎのような範囲になる。

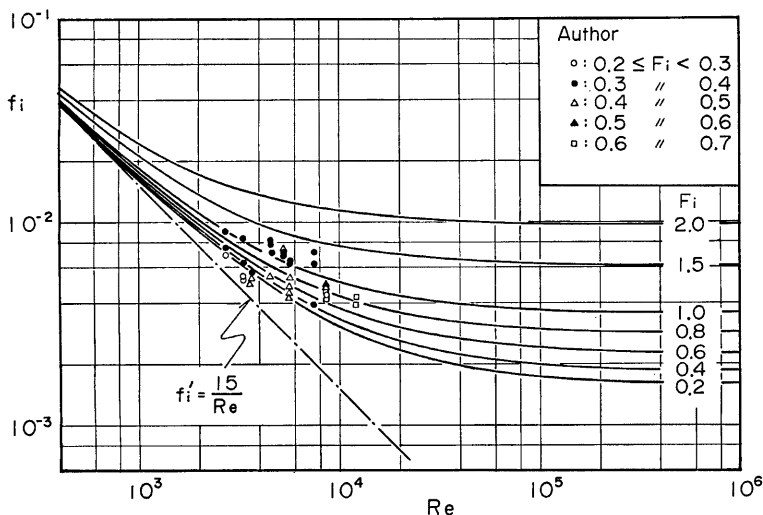


Fig. 7 The shear stress coefficient for the upper layer flow in the experimental flume

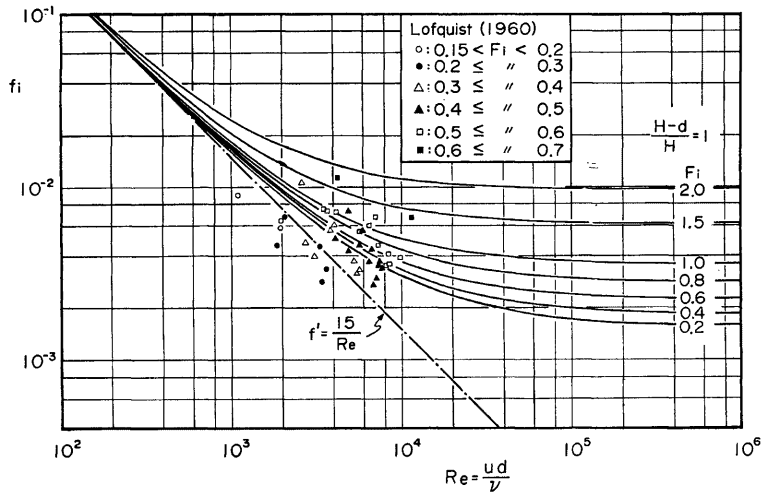


Fig. 8 The shear stress coefficient for the density under flow in the experimental flume.

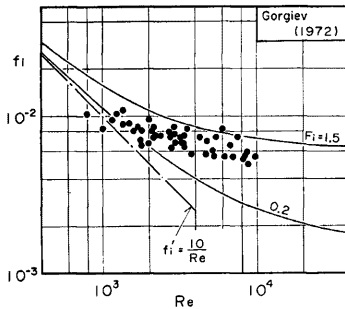


Fig. 9 The shear stress coefficient for the density under flow in the experimental flume.

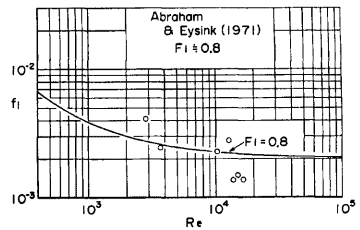


Fig. 10 The shear stress coefficient for the lock exchange flow in the experimental flume.

$$0.83 \times 10^{-3} < f_i < 2.1 \times 10^{-3}, \quad (0.2 < F_i < 0.8)$$

これは、前者より若干大きな値であるが、データのばらつきを考慮すると、Karels の報告と一致していると見なしてもよい。

Fig. 8 および **Fig. 9** は (34) 式と下層密度流に関する実験値を比較したもので、前者は Lofquist¹⁹⁾ (1960) 後者は Gorgiev²⁰⁾ (1972) のものである。計算値は、層厚比 $(H-d_1)/H$ を $(H-d_2)/H$ (d_2 : 下層流の層厚) に置き換え、これを 1 とし、さらに前者で $A=15$ 、後者で $A=10$ として求められている。なお、Gorgiev のデータは内部フルード数が不明なため、これによるデータの分類がなされていない。しかし、実験規模から考えて、内部フルード数は 0.2~1.5 程度の範囲にあることが推察できる。

これらの図から明らかなように、下層流においても両者の対応はよい。とくに、比較的精度がよいとされている Lofquist のデータは、内部フルード数の増加に伴って抵抗係数が増加する様子が顕著にみられ、(34)

式の特徴をよく物語っている。

Fig. 10 は, Abraham・Eysink (1971) の交換密度流のデータと比較したもので, 計算値は, 層厚比 1/2 および (33) 式において $u_i/U_1=0.69$ として得られる $A=1.86$ を用いて得られたものである。この実験値に対しては, 側壁まさつの影響の補正がなされているため, A の値として, 2 次元層流理論から推定されたものが使われている。さて, 同図においても両者の対応はよく, (34) 式の妥当性が認められる。

2. 5 結語

本章では, 連続式, 質量保存則および運動量保存則に基づいて, 乱流連行による混合効果を詳細に議論し, 境界面におけるせん断応力およびまさつ抵抗係数について考察した。その結果, 従来それ程重要視されなかった乱流連行による混合効果の重要性が明らかにされるとともに抵抗係数の算定式が提案された。同式は, 上層流, 下層測および交換密度流に関する実験値により検証された。しかし, 実験値との比較において, 右辺第 1 項の A の値は, 著者らおよび Lofquist のデータに対して $A=15$, Gergiev のものに対して $A=10$ のように任意に選ばれ, Abraham & Eysink のデータに対するものを除くと, これを普遍的に定めることができなかった。この最大の原因は, 側壁まさつの効果の程度によるものと思われる。したがって, もし, これを的確に評価できれば, A の値は (32) 式によって定められることが推察される。

つぎに, (34) 式の定性的な特徴を総括すると以下のようなものである。界面抵抗係数は, レイノルズ数, 内部フルード数および層厚比によって定められる。与えられた層厚比の条件下において, レイノルズ数が 10^3 以下では, ほぼこれのみによって抵抗係数は定まり, R_e が $10^3 \sim 10^4$ の範囲では, R_e と F_i の影響が同程度になる。これが 10^5 を越えると, 抵抗係数は内部フルード数のみによって規定され, F_i が大きくなり混合が活発化するに伴い大きくなる。このような興味深い事実は, 従来の $f_i \sim \phi$ 型の抵抗則には見られなかったもので, この型の抵抗則にみられる最大の疑問点を解消するものと思われる。

3. 運動量および熱・質量輸送の混合距離

3. 1 概説

安定な密度成層場においては, 水粒子の移動や擾乱に対して安定な向きに働く重力(浮力)のため, 一樣場のそれに比べて乱れの渦のスケールが減少する。このことは, 運動量, 熱量および質量などの混合距離が減少することを対応する。

ここで, プラントルの混合距離理論に準じた扱いにおいて, 分布形の議論がどのように進められてきたか検討しよう。この種の流れに関しては, 気象学の分野において早くから注目されてきた。Monin・Obukhov²¹⁾ (1954) は, 一樣場における速度場の条件に加えて, 熱輸送(浮力束)の効果, すなわち安定度長 L を導入した相似理論を次のように提案した。

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{du}{dz} = \phi_M(z/L) \rightarrow u(z) = \frac{u_*}{\kappa} \left(\ln \frac{z}{z_0} + \alpha \frac{z}{L} \right) \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$\frac{\kappa z}{T_*} \frac{d\theta}{dz} = \phi_H(z/L) \rightarrow \theta(z) = \frac{T_*}{\kappa} \left(\ln \frac{z}{z_0} + \alpha' \frac{z}{L} \right) \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$L = u_*^3 / \left(\kappa \frac{g}{T} \frac{H}{\rho \epsilon_p} \right) \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここに, z_0 : 粗度定数, α, α' : Monin-Obukhov 定数, θ : 温位, $T_*: H/(\rho \epsilon_p u_*)$, ϵ_p : 定圧比熱, H : 熱量束。 ϕ_M, ϕ_H : Monin・Obukhov 関数で, $z/L \ll 1$ のとき Taylor 展開され, 右側に示される log-linear 則が導かれる。安定成層場に関する log-linear 則の研究は 1960 年代に活発に行われ, 例えば, McVehill²²⁾ (1964) は, $0 \leq z/L \leq 1$ の領域で, 上式が成り立つことを報告した。Webb²³⁾ (1970) は, 種々の観測資料を整理し, $z/L=1$ 程度の領域まで上式が適用されることを確かめ, Monin-Obukhov 定数 $\alpha=5.2$ を提案した。また, z/L が 1 を越えると, 対数型の分布形に移行することを報告している。芦田・江頭²⁴⁾ (1977) は, 水による上層密度流の流速分布も (42) 式で近似できることを示した。しかし, カルマン定数

が0.4よりかなり小さく0.1~0.2程度になり、しかも、 α や L について十分の情報を提供できなかった。日野 (1979) は、(45) 式と同様な方法で、界面近傍の乱流層の流速分布形を導いた。しかし、これらの研究では、日野のものを除いて、運動量や熱量の輸送が中立状態のそれからどのように変化するか考察されていない。

Kao²⁵⁾ (1959) は、中立状態と安定状態におけるまざつ速度の関係を次式のように仮定した。

$$u_* = u_{*N} g(h/L) \quad \dots\dots\dots (45)$$

ここに、 h ：特性長。さらに、加速度平衡式を次のように提示した。

$$l \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = l_N \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - B \frac{g}{T} l_H \frac{d\theta}{dz} \quad \dots\dots\dots (46)$$

ここに、 l , l_N ：運動量の混合距離、 l_H ：熱量の混合距離、 T ：気温、 θ ：温位、 B ：比例定数。上式に、混合距離、 ϕ および g の関係式を代入し、 ϕ について解き、流速および気温分布形を議論した。しかし、求められた式形が複雑なため実用性に乏しいものである。

水工学の分野において、この加速度平衡式は、その後価値が見い出された。日野²⁶⁾ (1963) は、これを用いて開水路における固液混相流の乱れ構造を議論し、カルマン定数が減少することを説明した。小松²⁷⁾ (1978) は、成層密度噴流における混合距離や乱れ強度について考察し、over-all Richardson Number の増加に伴い、これらの乱れ特性量が減少することを明らかにした。

プラントルの混合距離を用いた分布形の議論は以上のようなものであるが、次にそれぞれの取り扱いにおいて混合距離がどのように設定されているか調べよう。相似理論において、運動量および熱量に関する混合距離 l および l_H はそれぞれ次のように置ける。

$$l = l_N / \phi_M(z/L) = \kappa z / \phi_M(z/L) \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$l_H = l_N / \phi_H(z/L) = \kappa z / \phi_H(z/L) \quad \dots\dots\dots (48)$$

日野 (1979) の議論では、安定度長 L は、浮力束 q_B を用いて、 $L' = u_*^3 / (\kappa q_B)$ と置かれており、Kao の相似理論は、安定度長に含まれるまざつ速度 u_* の代わりに中立状態のまざつ速度 u_{*N} が用いられている。したがってこれらの点を考慮すると、上式と同じものになる。安定な成層場においては、

$$1 \leq \phi_N, \phi_H$$

であり、このように設定された混合距離は、中立状態のそれに比べて減少することがわかる。

以上のように、固定壁面上の境界層流れでは、混合距離を (47) および (48) 式のように置くことの妥当性が認められている。また、芦田・江頭 (1977) や日野 (1979) の研究を参考にすると、密度境界上の流れでも、巨視的には log-linear 則が成り立ち、混合距離の分布を (47)、(48) 式のように設定できるように思われる。しかし、この場合、カルマン定数が普偏値 $\kappa = 0.4 \sim 0.41$ とはならず、これよりかなり小さな値になること、 α および L の推定が困難なこと、さらに境界面における界面条件の設定などの問題が残される。

境界面が流体間の密度境界からなっている場合と固体面である場合の流れの大きな相違点は、前者において境界面を通して運動量、熱および質量輸送が起ることである。芦田・江頭 (1978) は、この点を考慮し、さらに上述の問題点を除くため、境界面で混合距離 l_0 , l_{0H} および $l_{0\sigma}$ を与え、混合距離の分布を次式のように置くことにより、流速、水温および密度分布則を議論した。

$$l = l_0 + \kappa z \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$l_H = l_{0H} + \kappa_H z \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$l_\rho = l_{0\sigma} + \kappa_\rho z \quad \dots\dots\dots (51)$$

このうち、上層密度流に関する一例を示すと、つぎのようである。

$$\frac{(l_0 + \kappa z) u_* \frac{du}{dz}}{u_*^2} = 1 \rightarrow u(\eta) = u_i + \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{\beta + \kappa \eta}{\beta} \quad \dots\dots\dots (52)$$

$$\frac{(l_{0H} + \kappa_H z) u_* \frac{dT}{dz}}{-T' w'} = 1 \rightarrow T(\eta) = T_i + \frac{dT}{2} \frac{K}{R_i u_* \kappa_H} \frac{1}{\beta} \ln \frac{\beta + \kappa_H \eta}{\beta} \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$\frac{(l_{00} + \kappa_{\rho} z) u_* d \rho}{-\rho' w'} \frac{d\rho}{dz} = 1 \rightarrow \rho(\eta) = \rho_i - \frac{\Delta \rho}{2} \frac{K}{R_{i*}} \frac{U}{u_*} \frac{1}{\kappa_{\rho}} \ln \frac{\beta_{\rho} + \kappa_{\rho} \eta}{\beta_{\rho}} \quad \dots\dots\dots (54)$$

ここに, u_i , T_i , ρ_i : 境界面における流速, 水温, 密度, β , β_H , β_{ρ} : 境界面における無次元混合距離で, 上層厚を d として, それぞれ, l_0/d , l_{0H}/d , $l_{0\rho}/d$, κ , κ_H , κ_{ρ} : 運動量, 熱, 質量に関するカルマン定数. U : 平均流速, u_* : まさつ速度, $\overline{T'w'}$: 熱量束, $\overline{\rho'w'}$: 質量束. ΔT , $\Delta \rho$: 上・下層の水温および密度差. R_{i*} : over-all Richardson Number, K : 実験定数 0.0015, η : 界面から鉛直上向きに選んだ無次元座標, z/d である.

前報 (1978) では, 上述の分布形を規定する重要な量 β , β_H および β_{ρ} や κ , κ_H および κ_{ρ} について十分議論されなかった. そこで, 本章において, これらについて考察を進める.

3. 2 境界面における混合距離

(1) 運動量に関する混合距離; l_0

境界面近傍は密度こう配も大きく, 通常安定度の強い密度成層をなしている. このように安定度の強い領域において, Webb (1970) は, (42) 式の極限が次式のようになることを示した.

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_* \alpha}{\kappa L} \quad \dots\dots\dots (55)$$

これは, 運動量および熱量 (質量) 輸送のみによって速度場が規定されることを意味し, しかも流速分布は直線になる. このことについては, Long²⁸⁾ (1970) も乱れの基礎方程式に基づいたオーダ比較および次元解析の考察に基づいて言及している. また, このことは, flux Richardson Number が界面近傍のどこかで限界になることを考えると, 乱れのエネルギー式からも導かれる. 安定度の強い領域での流速分布の直線性は, Ellison・Turner²⁹⁾ の inclined plume, 芦田・江頭³⁰⁾ (1975) の泥水密度流, 小松 (1978) の密度噴流の界面近傍に見い出せる.

さて, この事実を適用して境界面における混合距離がどのような水理量によって定まるか検討しよう. 境界面 (速度こう配あるいは密度こう配が最大になる点) $z = 0$ における速度こう配は (49) 式を用いると次のように書ける.

$$\partial u / \partial z = u_* / l_0 \quad \dots\dots\dots (56)$$

また, 速度場が質量輸送と運動量輸送のみによって規定されることから, 比例定数 k_1 として, 次式が成り立つ.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = k_1 \frac{g}{\rho} \frac{\overline{\rho'w'}}{u_*} \quad \dots\dots\dots (57)$$

鉛直方向の質量輸送 $\overline{\rho'w'}$ を境界面の拡散係数 $\epsilon_{\rho i}$ により表示すると,

$$\overline{\rho'w'} = -\epsilon_{\rho i} \partial \rho / \partial z \quad \dots\dots\dots (58)$$

上式の $\epsilon_{\rho i}$ は, 芦田・江頭 (1975) が理論的考察により次式のように与えている.

$$\epsilon_{\rho i} = -\frac{\Delta \rho / 2}{\partial \rho / \partial z} \frac{KU}{R_{i*}} \quad \dots\dots\dots (59)$$

ここに, $\Delta \rho$: 上・下層の密度差, U : 上層の平均流速, R_{i*} : over-all Richardson Number. (58) と (59) 式から $\epsilon_{\rho i}$ を消去すると, 界面における質量輸送は, 次式のように表示される.

$$\overline{\rho'w'} = \frac{\Delta \rho KU}{2 R_{i*}} \quad \dots\dots\dots (60)$$

(56), (57) および (60) 式を用いて, $\partial u / \partial z$ および $\overline{\rho'w'}$ を消去し, l_0 について解くと, 無次元混合距離 β が次のように求められる.

$$\beta = l_0 / d = \gamma_1 (U / u_*)^{-3} \quad \dots\dots\dots (61)$$

ここに, d : 上層厚, $\gamma_1 = 2 / (k_1 K)$. 上式は, 混合距離が流速係数 U / u_* の 3 乗に逆比例することを意味する. 前章の抵抗則との関係からみると, レイノルズ数が大きく, しかも内部フルード数が 1 より大きければ, ほぼ $\beta \propto F_1^2$ なる関係が成り立つ.

つぎに、(61) 式の関係を実験的に検証しよう。

Fig. 11 には、前章の **Table 1** に示す実験データと Lofquist (1960) のものが示されている。著者らのデータは、速度こう配を $\partial u / \partial z \approx \Delta u / \Delta z$ ($\Delta z = 2 \text{ cm}$) で求め、 u_* を (27) 式で評価し、これらを (56) 式に適用して算定されており、白丸は下流断面、黒丸は上流断面の無次元混合距離である。Lofquist のデータは、実験値を単に変形して求められている。

同図から、 β と U/u_* は、(61) 式の関数関係にあることが明らかである。したがって、(57) 式つまり、境界面近傍では、速度場が質量輸送と運動量輸送によって一意的に定まるとともに無次元混合距離が (61) 式で表示されることが検証された。この際、(61) 式の係数 γ_1 は、

$$120 \leq \gamma_1 < 300$$

程度のせまい範囲にある。

(2) 質量および熱量に関する混合距離 l_{00} , l_{0R}

Webb (1970) は、速度場と同様な方法、すなわち (43) 式の極限から次式を提案した。

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\alpha T_*}{\kappa L} \dots\dots\dots (62)$$

上式は、温位あるいは密度場が運動量と質量（熱量）輸送のみによって規定されることを意味する。このことは乱れのエネルギー方程式からも推測され、種々の実験においても認められている。

さて、上述のことは、密度こう配が次式で表示されることを意味する。

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho}{g} k_2^2 \frac{(g\rho'w'/\rho)^2}{u_*^4} \dots\dots\dots (63)$$

ここに、 k_2 : 比例定数。質量輸送の項に (60) 式を適用すると、上式はつぎのようになる。

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho}{g} \left(\frac{k_2 K}{2} \right)^2 \left(\frac{U}{u_*} \right)^4 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \dots\dots\dots (64)$$

また、(54) および (60) 式より密度こう配は、次式のように表示される。

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho'w'}{l_{00} u_*} = -\frac{\Delta\rho}{2} \frac{K}{R_{i*}} \left(\frac{U}{u_*} \right) \frac{1}{l_{00}} \dots\dots\dots (65)$$

ここで、(64) 式と (65) 式を等置すると質量輸送に関する混合距離および無次元混合距離が、それぞれ次式のように導かれる。

$$l_{00} = \gamma_2 (U/u_*)^{-3} d \dots\dots\dots (66)$$

$$\beta_0 = \gamma_2 (U/u_*)^{-3}, \quad (\beta_0 = l_{00}/d) \dots\dots\dots (67)$$

ここに、 γ_2 は定数で、 $\gamma_2 = 2/(k_2 K)$ 。上式から明らかなように、 l_{00} および β_0 の関数形は運動量の場合と同様である。つぎに、**Table 1** に示した各実験ケースの下流断面の測定値を用いて (67) 式の検証を行う。なお、 l_{00} は、 $d\rho/dz = \Delta\rho/\Delta z$ ($\Delta z = 2 \text{ cm}$) とし、(65) 式から算定されている。

Fig. 12 には、このようにして求められた β_0 と U/u_* の関係が示されている。図から、無次元混合距離は、 U/u_* の -3 乗に比例することが明らかであり、(67) 式の関係が妥当なものであることがわかる。また、係数 γ_2 次、

$$10 \leq \gamma_2 \leq 40$$

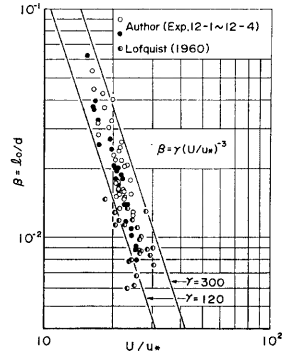


Fig. 11 The relation between non-dimensional mixing length for momentum and velocity coefficient.

程度の範囲にあり、運動量に関する係数 γ_1 の1/10程度である。これは、次章で考察するように、質量輸送の方が密度こう配による浮力の影響を顕著に受けるためである。

なお、熱に関する混合距離についても上と同様に議論できるが、水の膨張係数がほぼ一定とみなせる領域では、質量の混合距離と同一である。つまり、

$$l_{0H} = l_{0\rho}, \quad \beta_H = \beta_\rho \quad \dots\dots (68)$$

3.3 カルマン定数の推定

成層密度流においては、乱れのスケールが減少する。このことは、混合距離の分布を (49), (50) および (51) 式のように表示した場合、カルマン定数が普遍定数ではなく、密度分布形に応じて場所的に変化することに相当する。しかし、これまでの研究により、運動量や密度境界層内の分布形を議論することを目的とした場合、乱れの微細構造にまで立入

らないでも十分であることが明らかである。つまり、境界層内の混合距離の変化を直線で近似し、そのこう配を与えるカルマン定数が、物理量に応じてどのように変化するかを議論すれば十分である。このような観点から、ここでは (49), (50) および (51) 式の κ , κ_H および κ_ρ について考察する。

(1) 運動量に関するカルマン定数; κ

Kao (1959) が提案した加速度平衡式 (46式) を、ここで対象としている流れに書き換えると、次式が得られる。

$$l \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = l_N \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + B \frac{g}{\rho} l_0 \frac{d\rho}{dz} \quad \dots\dots\dots (69)$$

constant flux layer の議論であるから、(54) 式の質量束は、界面における質量束 (58) あるいは (60) 式と等しい。そこで、(60) 式を (54) 式に代入し、これを (69) 式の右辺第2項に適用すれば、次式が導かれる。

$$l \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = l_N \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + B \frac{1}{2} g' \frac{K}{R_{i*}} \frac{U}{u_*} \quad \dots\dots\dots (70)$$

ここに、 $g' = \Delta\rho/\rho \cdot g$ である。以下、固液混相流において日野 (1963) が展開した方法に準じて議論する。ここで、

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_*}{l} = \frac{u_*}{l_N} \psi, \quad \left(\psi = \frac{l_N}{l} \right) \quad \dots\dots\dots (71)$$

とおくと、(70) 式と (71) 式より、加速度平衡式は次のようになる。

$$\frac{u_*^2}{l_N} \psi^2 = \frac{u_*^2}{l_N} \psi - B \frac{1}{2} g' \frac{K}{R_{i*}} \frac{U}{u_*} \quad \dots\dots\dots (72)$$

対象とする領域で、 $l_0 + \kappa z = \kappa z (l_0/\kappa z + 1) \doteq \kappa z$ とできるから、 ψ はつぎのように示される。

$$\psi = \frac{l_{0N} + \kappa_N z}{l_0 + \kappa z} \doteq \frac{\kappa_N}{\kappa} \quad (\text{independent of } z) \quad \dots\dots\dots (73)$$

この条件下で (72) 式を $z=0 \sim d$ 区間で積分すると、

$$\psi^2 - \psi - \frac{1}{2} B \frac{K}{R_{i*}} \frac{U}{u_*} \frac{g'd}{u_*^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (74)$$

ここに、 B' は次式のようなである。

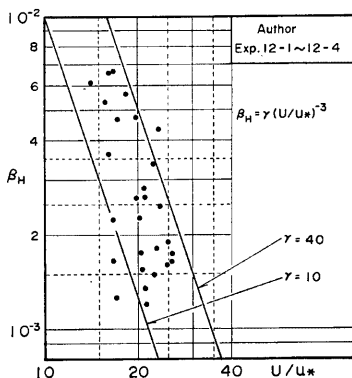


Fig. 12 The relation between non-dimensional mixing length for mass and velocity coefficient.

$$B' = \frac{1}{\kappa_N} \ln \frac{\beta_N + \kappa_N}{\beta_N} = \text{const}, \quad (\beta_N = l_{0N}/d) \quad \dots\dots\dots(75)$$

中立状態のカルマン定数 κ_N および無次元混合距離 β_N の導入に際し、境界面から水温境界層が発達しない仮想的な流れが想定されている。そこで、 $\kappa_N = 0.4$ とし、 β_N が β の値から大きくはずれないものとする、 B' はオーグ 1 程度の値になる。したがって、これを B に含めて、 $B/B' = B$ と置き、(74) 式を解くと、次式が得られる。

$$\psi = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{B}{R_{i*}} \frac{K}{u_*} \frac{g'd}{u_*^2}} \right) \quad \dots\dots\dots(76)$$

上式に、 $R_{i*} = F_i^{-2} = \{U^2/(g'd)\}^{-1}$ を代入し、 $1/\psi = \kappa/\kappa_N$ として、複号のプラス側をとると、カルマン定数比が次のように求められる。

$$\frac{\kappa}{\kappa_N} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2 \frac{BK}{R_{i*}} \frac{U}{u_*}}} \quad \dots\dots\dots(77)$$

前章の抵抗則の結果を参考にすると、上式はつぎのことを意味する。レイノルズ数が小さい流れでは、 R_e および F_i が増加すると κ/κ_N も大きくなる。さらに R_e が大きくなると、混合距離は F_i のみによって定まり、 F_i の増加に伴い大きくなる。これは、 F_i が増加すると、浮力による渦スケールの減衰効果が小さくなることに相当している。

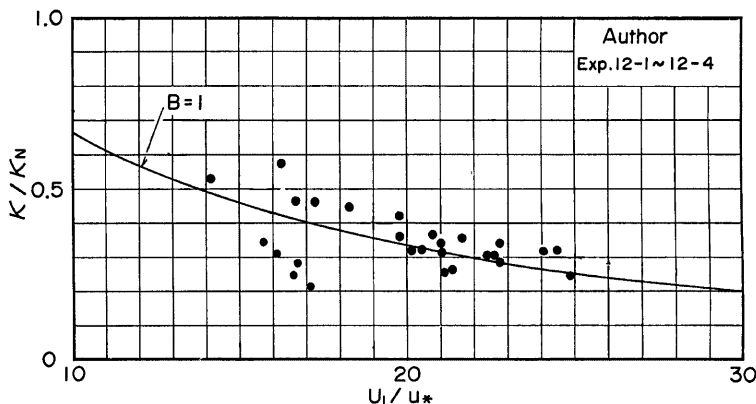


Fig. 13 The relation between κ/κ_N for momentum mixing length and velocity coefficient.

つぎに、(77) 式と実験値との関係調べよう。Fig. 13 には、Table 1 に示す上層流の実験から得られたものが示されるとともに $K = 0.0015$ (芦田・江頭, 1975), $B = 1$, $\kappa_N = 0.4$ として得られる理論曲線が示されている。実験値にはかなりのばらつきがあるが、測定精度の問題を考慮すると、両者はかなりよく一致しているものと思われる。

加速度平衡式、(46) 式に関して、機械的まさつおよび浮力による加速度の線形性について異論もあるが、右辺第 2 項の比例係数は $B \approx 1$ 程度であり、ここで対象としている流れの解析では、大きな矛盾はないようである。したがって、Fig. 13 の比較からも明らかなように、カルマン定数は、(77) 式で $B = 1$ として推定できる。

(2) 熱量および質量に関するカルマン定数； κ_H , κ_p

上流層に関する水温および密度分布は、(53) および (54) 式で与えられる。この際、境界面の水温 T_i お

よび密度 ρ_i は、これまでの研究 (芦田・江頭, 1975, 1978) により、次式で推定できることが明らかにされている。

$$T_i = (T_1 + T_2)/2, \quad \rho_i = (\rho_1 + \rho_2)/2 \quad \dots\dots\dots(78)$$

ここに、添字 1 は上層を意味し、 $T_1 = \int_0^d T(z) dz/d \dots\dots$ などである。したがって、境界面の値に上式を適用し、それぞれの分布則の断面平均値を求めるとカルマン定数が自動的に求められる。つまり、平均量を与えて、逆に内部構造を定める方法から得られる。

さて、(53) 式および (54) 式を境界面から水面まで積分して整頓すると、それぞれ次式を得る。

$$\kappa_H = K F_i^2 \frac{U}{u_*} \left(\frac{\beta_H + \kappa_H}{\kappa_H} \ln \frac{\beta_H + \kappa_H}{\beta_H} - 1 \right) \quad \dots\dots\dots(79)$$

$$\kappa_p = K F_i^2 \frac{U}{u_*} \left(\frac{\beta_p + \kappa_p}{\kappa_p} \ln \frac{\beta_p + \kappa_p}{\beta_p} - 1 \right) \quad \dots\dots\dots(80)$$

$\beta_H = \beta_p$ であることから、上式の解は $\kappa_H = \kappa_p$ となり、熱と質量に関する混合距離は等しくなる。この事実は、熱、塩分、水蒸気やその他溶解物質の拡散係数が等しいことに相当し、多くの実験・観測結果からその妥当性が実証されている。

Fig. 14 には、流速係数 U/u_* に (34) 式 ($A = 15$, $(H - d_1)/H = 0.5$) および β_p (β_H) に (61) 式 ($\gamma_2 = 10$) を用いて上式を解き、 R_e をパラメータに、カルマン定数比 κ/κ_{pN} ($\kappa_{pN} = 0.4$) と F_i との関係調べたものが示されている。また、**Table 1** に示す Exp. 12-1~12-4 の測定値も示されている。

図から明かなように、推定曲線および実験値は、 F_i が大きくなると κ_p も増加する。これは、 F_i が増加すると、安定度効果が減じ、混合距離が大きくなることを意味している。 $R_e < 10^4$ 程度の範囲では、 R_e の影響が顕著にみられ、 R_e が大きい程、 κ_p も大きくなる。このように、実験値と推定曲線とはかなりよく対応している。 R_e が 10^4 を越えた実験値はないが、推定値において、これが大きくなるに伴い、その影響は小さくなり、 10^6 を越えると、レイノルズ数の影響は消失する。

以上、(79) 式あるいは (80) 式により熱および質量に関するカルマン定数が推定できることが明らかにされた。

3. 4 結語

運動量、質量および熱量に関する混合距離について考察し、安定な密度成層場では、一様場のそれに比較して混合距離が減少することを明らかにし、その推定法を提示した。

flux Richardson Number が限界値を示すような安定度の強い領域では、運動量、熱量あるいは質量輸送のみによってそれぞれの場が規定されるという条件を用いて、境界面の混合距離を議論した。その結果、界面の混合距離は、 U/u_* の -3 乗に比例することが導かれ、実験的にも検証された。混合距離の分布については、直線分布を仮定し、そのこう配を議論した。運動量に関する混合距離については、加速度平衡式を、熱量および質量に対しては積分法により考察し、 κ および κ_p ($=\kappa_H$) の推定法を提示し、実験値との比較により、妥当な結果が得られた。これによると、多くの研究者によって指摘されているように、浮力の影響は、熱および質量に関する混合距離に対して顕著に現われ、その減衰効果が大きい。

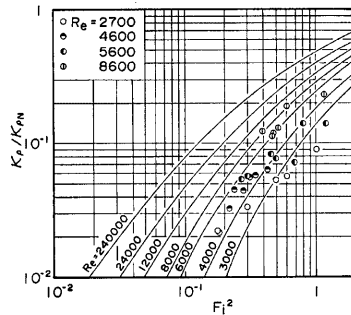


Fig. 14 The relation between κ for mass mixing length and velocity coefficient.

4. 拡散係数

4.1 概説

前章の考察から、安定な密度成層場においては、乱れのスケール、すなわち混合距離が減少することが明らかにされた。したがって、渦動粘性係数および渦動拡散係数などの輸送係数も一様場のものより減少する。

密度成層場の輸送係数については、海洋の水温や塩分分布、大気中の気温や水蒸気分布などの問題に関連して古くから海洋および気象学者によって研究され、また、一般の流体力学者も興味を示してきた。これらの研究のうち代表的なものを挙げると、つぎのようである。

Rossby・Montgomery³¹⁾ (1935) は、混合距離を用いてエネルギーのつり合いを表示し、渦動粘性係数 ε を次のように表わした。

$$\varepsilon = \varepsilon_N (1 + a R_i)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (81)$$

ここに、 ε_N ：中立安定状態の渦動粘性係数（以下、粘性係数と呼ぶ）、 R_i ：gradient Richardson Number, $R_i = -g \, d\rho/dz / (du/dz)^2 / \rho$, a ：定数。Munk・Anderson³²⁾ (1948) は、Sverdrup (1936) の観測データから、上式の係数を $a=10$ と定めた。さらに、渦動拡散係数 ε_ρ （以下、拡散係数と呼ぶ）について、定性的考察から $\varepsilon_\rho = \varepsilon_{\rho_N} (1 + a' R_i)^b$ なる関数形を仮定し、Jacobsen (1913) の条件 $\varepsilon_\rho/\varepsilon \leq 1$ と Taylor (1931) の条件 $R_i \leq 1$ を用い、次式を得た。

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_{\rho_N} (1 + 3.33 R_i)^{-3/2} \quad \dots\dots\dots (82)$$

ここに、 ε_{ρ_N} ：中立安定状態の拡散係数、したがって、上式を用いると、輸送係数比すなわち、Austausch coefficient ($1/p_r$) は次式ようになる。

$$\frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon} = \frac{1}{p_r} = \frac{(1 + 3.33 R_i)^{-3/2}}{(1 + 10 R_i)^{-1/2}}, \quad (\varepsilon_{\rho_N} = \varepsilon_N) \quad \dots\dots\dots (83)$$

ここに、 p_r ：乱流プラントル数で、flux Richardson Number R_f と R_i との関係は、プラントル数を用いて、 $R_f = R_i/p_r$ と書ける。

Monin・Obukhov の相似理論を拠りどころとした研究も数多くあるが、相似関数を用いて輸送係数およびその係数比を示すつぎのようになる。

$$\varepsilon = \varepsilon_N / \phi_M = \kappa z u_* / \phi_M = \varepsilon_N (1 - \alpha R_i) \quad \dots\dots\dots (84)$$

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_{\rho_N} / \phi_H = \kappa z u_* / \phi_H = \varepsilon_{\rho_N} (1 - \alpha' R_i) \quad \dots\dots\dots (85)$$

$$\varepsilon_\rho / \varepsilon = \phi_H / \phi_M = \text{const.} \quad (\alpha = \alpha') \quad \dots\dots\dots (86)$$

Webb は、気象観測により、 $R_i \leq 0.2$ の範囲で上の関係を確かめた。Oke³³⁾ (1970) は、Webb と同様、観測資料に基づいて、 $R_i \leq 0.1$ の領域で上の関係を認めた。しかし、McVehill (1964) は、地上 4 m 地点の R_i の測定値に基づいた観測値から、 R_i の増加につれて $\varepsilon_\rho/\varepsilon$ が減少することを報告している。

もう一つの研究手法として、乱れ構造の定式化をはかり、これに基づいて考察する立場がある。Ellison³⁴⁾ (1957) および Ellison・Turner³⁵⁾ (1960) は、新たに 2 乗平均密度変動方程式を提案し、これと乱れのエネルギー式および質量の輸送方程式に基づいて考察し、実験値などを参考にして次式を提案した。

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_{\rho_N} (1 - R_f)^2 \equiv \varepsilon_{\rho_N} \left(1 - \frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon} R_i \right)^2 \quad \dots\dots\dots (88)$$

$$\frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon} = \frac{b(1 - R_f/R_{fc})}{(1 - R_f)^2} \quad \dots\dots\dots (89)$$

ここに、 R_{fc} ： R_f の限界値。b：定数で、(81) 式で $\varepsilon_{\rho_N}/\varepsilon_N = 1.4$ とおくと $b=1.4$ である。Lauder³⁶⁾ (1975) は、Ellison や Townsend³⁷⁾ (1958) が省略した圧力変動量と他の乱れ変動量との相関を基礎方程式に加え、これらを実験値に基づいて評価し、次式を提案した。

$$\frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\rho_N}}{\varepsilon_N} \cdot \frac{1 + \Phi \Phi_T B}{1 + \Phi_T (0.8 - 0.5 \Phi_T) B} \quad \dots\dots\dots (90)$$

ここに、 B ：無次元浮力パラメータ。 $B = \alpha' k^2 g / D^2 / T \cdot (\partial T / \partial z)$ (α' ：熱膨張係数、 k ：乱れの運動エネルギー、 D ：乱れの粘性逸散率、 T ：気温)、 Φ 、 Φ_T ：実験定数で、Champagne (1970) らや Webster³⁸⁾ (1963) の実験値から、 $\Phi = 0.2$ 、 $\Phi_T = 0.31$ と定められている。

つぎに、これらの式において、 ε および ε_p に対して浮力の影響がどのように現われるか調べよう。相似理論に基づいた (84)～(86) 式では、 ε および ε_p は R_i とともに同様に減少し、係数比 $\varepsilon_p/\varepsilon$ はほとんど浮力の影響を受けない。相似理論は、 R_i と R_f が近似的に等しく、 R_i が小さい、例えば $R_i < 0.2$ (Webb 1970) 程度の領域の議論であり、この点が他のものと異なる。Munk・Anderson の (83) 式と $R_{fe} = 0.1$ と置いた Ellison の (89) 式とを比較すると、 R_i が 0.1 より大きい領域では、 $\varepsilon_p/\varepsilon$ の R_i に関する減少傾向はほぼ同様で、 R_i が 1 を越えると、両者ともこれに逆比例して小さくなる。しかし、値そのものは前者の方が 3 倍程度大きい。つぎに、Launder の式で $B \rightarrow \infty$ とすると、 $\varepsilon_p/\varepsilon \rightarrow 0.31 \varepsilon_{pN}/\varepsilon_N$ となり、(83) 式および (89) 式のものより浮力の効果が顕著でない。このように、それぞれの式によって浮力の影響の現れ方は異なるが、Munk・Anderson の式は、Merritt・Rudinger³⁹⁾ (1973) の詳細な上層密度流実験によってその妥当性が示され、また、(89) 式は Ellison・Turner (1960) の塩水を用いた閉管路実験を、Launder の式は Webster (1964) の風洞実験の結果をよく説明する。

以上、安定な密度成層場における渦動粘性係数や渦動拡散係数に関する主な研究について概括した。しかし、相似理論に基づいた研究以外は、平均場の議論がなされておらず、現象を解析する際、これらの式を直接適用することは難しい。

著者らは前報 (1978) において密度成層流の分布則について議論し、前章では、流速および水温（密度）境界層内の混合距離について考察した。本章では、この結果を用いた拡散係数の推定法について検討する。

4. 2 境界面の拡散係数

境界面における拡散係数と連行係数の関係が著者 (1975) らによって、(59) 式のように導かれたが、これについて更に考察を進める。

同式には境界面の密度こう配が重要な変数として含まれており、まず、これを推定する必要がある。ところで、密度こう配は、(65) 式のように求められた。そこで、これを用いて密度こう配を消去すると、拡散係数は次式のように表示される。

$$\varepsilon_{pi} = \frac{2}{k_B K} \left(\frac{U}{u_*} \right)^{-4} U d \quad (= l_{02} u_*) \quad \dots\dots\dots (91)$$

ここで、 $2/(k_B K)$ は (66) 式の γ_2 そのものであり、これを用いると、上式は次のように変形される。

$$\varepsilon_{pi} = \gamma_2 \left(\frac{U}{u_*} \right)^{-4} U d = \gamma_2 \left(\frac{U}{u_*} \right)^{-4} q \quad \dots\dots\dots (92)$$

ここに、 q ：単位幅流量。上式の関数を調べるため、 $\gamma_2 = 10$ 、動粘性係数 $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ とし、さらに、 U/u_* に関する (34) 式を適用した結果が Fig. 15 に示されている。同時に、水温 20°C の時の分子熱拡散係数も示されている。図から明らかなように、流量が大きくなると拡散係数はこれに比例して増加する。一方、流水抵抗にレイノルズ数の影響が現れる規模の小さな流れでは、その変化の様子がかなり複雑であり、しかも、拡散係数は、分子拡散の高々数倍程度である。このことと後述の Fig. 16 に示すように $1/p_r$ が小さいことと考え合せると、実験室規模の現象においては、水温や塩分境界層が流速の

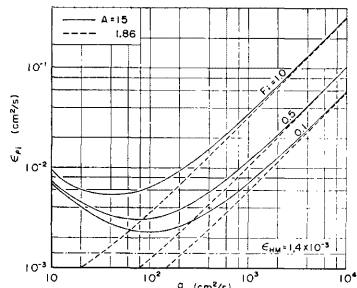


Fig. 15 The relation between turbulent diffusion coefficient and discharge rate in unit width with internal Froude number.

それに比べて発達しにくいという事実がよく理解できる。

境界面における拡散係数 (59) 式は, (92) 式のように簡単化されることを示した。

つぎに, これらの式の妥当性を検討するため, Ellison の理論と比較してみる。(56) 式および (61) 式の関係を用いて境界面の粘性係数 ε_i を表示すると,

$$\varepsilon_i = l_0 u_* = \gamma_1 (U/u_*)^{-3} u_* d \quad \dots\dots\dots (93)$$

上式と R_i を用いて (59) 式を変形すると,

$$\frac{\varepsilon_{Hi}}{\varepsilon_i} = \frac{K}{2} \gamma_1 R_i^{-1} \quad \dots\dots\dots (94)$$

と表わされる。さらに上式を $R_i = 0$ の領域まで適用するため, $0.1 < R_i$ の領域で上式を十分近似できるように関数で置き換えると, つぎようになる。

$$\frac{\varepsilon_{Hi}}{\varepsilon_i} = \left\{ \left(\frac{K}{2} \gamma_1 \right)^{-1} R_i + 1 \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (95)$$

ここで, $K=0.0015$ とし, $\gamma_1=120, 200, 300$ に対する上式の関係を示したのが Fig. 16 である。同図には, Merritt・Rudinger, Ellison・Turner および Jacobsen のデータと Ellison の (89) 式 ($R_{fc}=0.1$, $b=1.4$) が示されている。(95) 式と (89) 式はほぼ同様の傾向を示し, $R_i < 2.0$ では両者とも実験値や観測値とよく適合しているが, R_i が 2.0 を越えると, データより小さい値を示す。ただし, Merritt・Rudinger が提示した右端の二つのデータは層流域のものである。この点を考慮し, $R_i < 2.0$ 以下のデータとの比較および Ellison の理論との関係から考えて, (95) 式は妥当な結果を示しているものと思われる。したがって, 界面の拡散係数は, (59) および (92) 式を用いて容易に推定できるものと思われる。

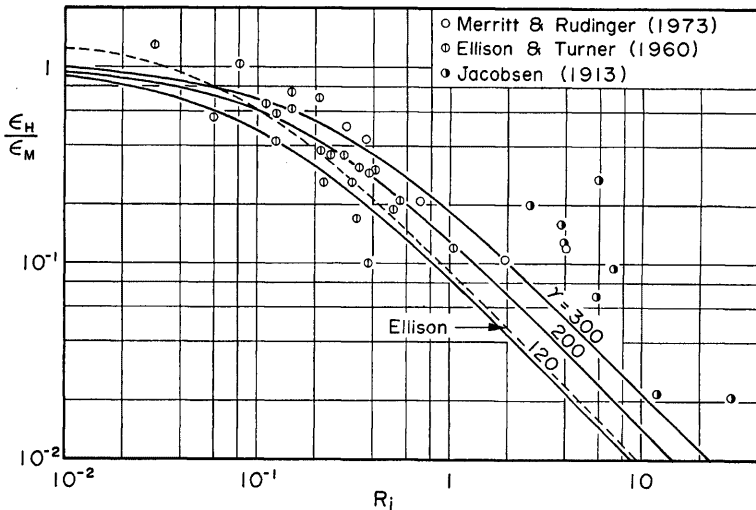


Fig. 16 The relation between transport coefficient ratio at interface for heat and momentum and gradient Richardson number.

4. 3 拡散係数の分布

(1) 拡散係数の推定式

質量および熱量に関する混合距離の分布を用いて拡散係数を表示すると,

$$\varepsilon_H = l_H u_* = (l_{0H} + \kappa_H z) u_* \quad \dots\dots\dots (96)$$

上式において、 $l_{0H} u_* = \varepsilon_{Hi}$ である。これまでの議論から明らかなように、 $l_{0H} = l_{0p}$ および $\kappa_H = \kappa_p$ であり、質量および熱量の拡散係数は等しい。 l_{0H} に関する (67) 式あるいは、 ε_{pi} に関する (92) 式の関係を用いて、単位幅流量 q との関係に書き改めると、上式は次のようになる。

$$\varepsilon_H(\eta) = \left\{ \gamma_2 \left(\frac{U}{u_*} \right)^{-3} + \kappa_H \eta \right\} \left(\frac{U}{u_*} \right)^{-1} q \quad \dots\dots\dots (97)$$

ここに、 $\eta = z/d$ である。また、水温境界層内の拡散係数の断面平均値は、上式を $\eta = 0 \sim 1$ まで積分して、次のように示される。

$$\varepsilon_H \text{ mean} = \left\{ \gamma_2 \left(\frac{U}{u_*} \right)^{-3} + \frac{1}{2} \kappa_H \right\} \left(\frac{U}{u_*} \right)^{-1} q \quad \dots\dots\dots (98)$$

ここに、 $\varepsilon_H \text{ mean}$: 拡散係数の断面平均値。レイノルズ数の大きな流れにおいて、 $F_i = \text{const.}$ 上でみると、 $\varepsilon_H \text{ mean}$ は単位幅流量に比例して大きくなり、当然、 F_i が大きい程大きくなる。また、従来、密度成層場の拡散現象を解析する際、度々用いられている次式、

$$\varepsilon_H \text{ mean} = kq \quad (k: \text{係数})$$

は、上述のことから考えて、係数 k の問題を別にすれば妥当な設定であろう。

(2) 実験値との比較

上層流に関して3ケース (Exp. 10-3~5) 中層流に関して2ケース (Exp. 10-1, 2) の実験が、次のようなトレーサー法 (椿⁴⁰1974) により行われた。ビーターの動圧部を用いて過マンガン酸カリ溶液を所定の位置から連続注入し、これを2秒間隔で計15~18コマカメラ撮影を行った。さらにこれらの写真を重ねて包絡線が画かれ、これにより拡散幅 $\sqrt{\overline{Y^2}}$ を評価すると、拡散係数は次式で推定される。

$$\varepsilon_H = \frac{1}{2} \frac{d\overline{Y^2}}{dt} \quad \dots\dots\dots (99)$$

上式は、一様等方乱流場のものであるため、これにより求められた実験値は厳密性に欠ける。しかし、この方法によりオーダ内の推定は十分できると思われるので、ここでは、こうして求められた拡散係数と (96) あるいは (97) 式との比較を行なう。

Fig. 17 および **Fig. 18** には、上層流に関する実験値と推定値を比較したものが示されるとともに、これまで述べた理論の妥当性を検討するため、水温および流速分布に関して (53) 式および (52) 式による計算値と実験値も比較されている。これらの図から明らかなように、全ての分布においてほぼ妥当な結果が得られ

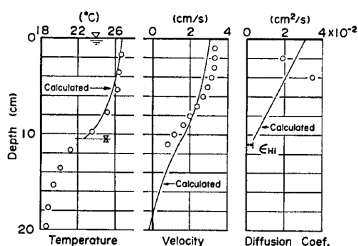


Fig. 17. The relation between our theory and experiment concerning the upper layer flow. The measurement points for diffusion coefficient are in the thermal boundary layer.

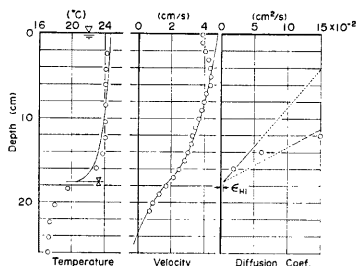


Fig. 18 The relation between our theory and experiment concerning the upper layer flow. One of the three points for diffusion coefficient is out of the thermal boundary layer.

ている。ここで、拡散係数に注目すると、水温境界層（芦田・江頭，1977）が自由表面近傍まで十分発達している Fig. 17 の結果では (96) 式（Thermal boundary layer, 実線）で拡散係数を推定できる。しかし、水温境界層が水面下 13 cm 程度までしか発達していない Fig. 18 の結果においては、水面下 12 cm の測定値は、推定値よりかなり大きくなっている。これは、水温分布形から明らかなように、水温境界層の発達が十分でないため、この点の測定値には浮力の影響が殆んど現われていないものと推定される。したがって、(96) 式は、このように水温境界層の発達していない領域では、拡散係数を小さく推定し過ぎる。そこで、浮力の影響を受けない領域では、近似的に次の関数、 $l \approx l_p = l_H$ が成立するので、(96) 式の κ_H を運動量に関するカルマン定数 κ に置き換えた次式によって推定されるものと思われる。

$$\epsilon_H = \left\{ \gamma_2 \left(\frac{U}{u_*} \right)^{-3} + \kappa \right\} \left(\frac{U}{u_*} \right)^{-1} q \quad \dots\dots\dots (100)$$

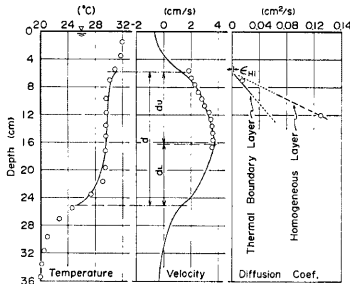


Fig. 19 The relation between our theory and experiment concerning the middle layer flow. One is in the thermal boundary layer and the other is out of it.

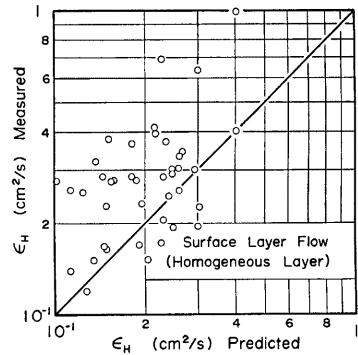


Fig. 21 The relation between predicted values and experimental ones for diffusion coefficient in the homogeneous layer of upper layer flows.

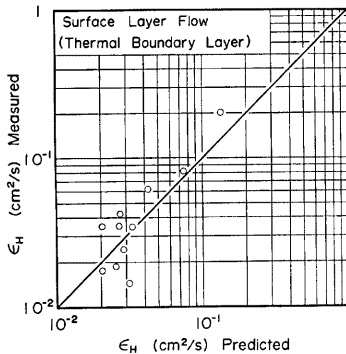


Fig. 20 The relation between predicted values and experimental ones for diffusion coefficient in the thermal boundary layer of upper layer flows.

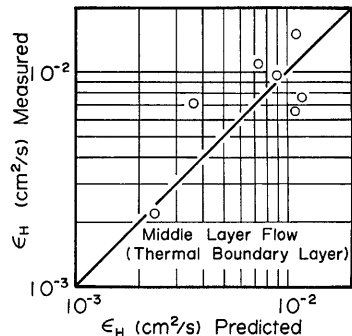


Fig. 22 The relation between predicted values and experimental ones for diffusion coefficient in the thermal boundary layer of middle layer flows.

このような考察に基づいて、Fig. 18 には、(100) 式が破線 (Homogeneous layer) で示されている。これによると、水面下 12 cm の実験値がかなりの確に推定されることが明らかである。

Fig. 19 には中層流に関する一例が示されている。同図からも明らかなように、水温境界層内と境界層が発達していない領域のデータが、それぞれ (96) 式および (100) 式を用いて推定されることが明らかである。

Fig. 20 および Fig. 21 は上層流について、前者が水温境界層内の、後者が境界層外の全ての実験値と推定値との相関をみたもので、Fig. 22 および Fig. 23 は中層流に対して、それぞれを比較したものである。これらの図から、水温境界層内および境界層外の実験値は、それぞれ (96) 式および (100) 式によってかなりよく推定されていることが明らかであり、十分目的が達せられたものと思われる。

4. 4 結語

以上、熱および質量輸送に関する混合距離の考察に基づいて、拡散係数の推定式を提案し、さらに実験値との比較を行なった。

境界面の拡散係数は (92) 式のように極めて単純な式で与えられることが明らかにされ、同式を検証するため、 R_t と輸送係数比との関係について、Ellison の理論や多くの実験値と比較し、その妥当性が示された。

ついで、拡散係数の分布について、その推定式を提案し、実験値との比較を行った。水温境界層が発達している領域では、(96) あるいは (97) 式で推定可能であることが明らかにされた。

境界面近傍では拡散係数が小さく、さらに、(94) および (95) 式からも明らかなように、プラントル数が大きいと、境界層の発達に抑制され、これが発達するには十分長い流下距離が必要である。このような理由から、水温境界層が主流全領域にわたって発達するような実験が一例しかできなかった。そのため、境界層が十分発達しない領域では、 κ_H の代わりに κ と置いた (100) 式を用いて推定の方がより妥当な結果が得られることを示した。

ここで対象とする流れの水温 (熱) や質量 (密度) 境界層の発達過程については、今後の課題である。

5. 結 論

本論は、密度成層流の種々の現象を解析するに最も基本的な問題である密度境界面における抵抗則、運動量輸送、質量および熱輸送に関する混合距離、ならびに鉛直拡散係数について考察したもので、研究内容と得られた主な成果を要約すると次のとおりである。

(1) 境界面の抵抗則については、これまでの研究の不備な点を考察し、従来殆んど無視されていた乱流進行による混合効果を考慮した運動量保存則などの展開から、新しい抵抗則 (34) 式を導いた。すなわち、従来の $f_s \sim \phi$ 型の抵抗則では、内部フルード数が増加し混合が活発になると、逆に抵抗係数が減少するという大きな問題点があったのに対し、(34) 式は、内部フルード数が増加するにつれ抵抗も大きくなるという、より妥当な結果を与える。しかも、同式は、レイノルズ応力を直接測定した Gergiev の実験の傾向と一致するとともに Lofquist の詳細な実験値をよく説明する。したがって、(34) 式は適用領域も広くかなり一般性

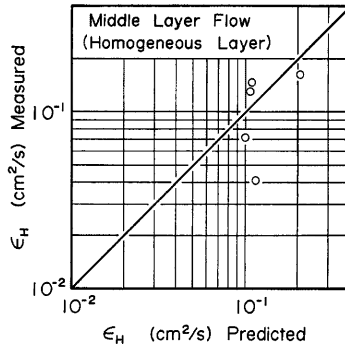


Fig. 23 The relation between predicted values and experimental ones for diffusion coefficient in the homogeneous layer of middle layer flows.

のある抵抗係数の算定式であることが推察される。しかし規模の小さい、すなわち R_0 の小さい流れでは、A の推定の問題について考察を進める必要がある。

(2) 混合距離の推定は、流速、水温および質量分布などを規定し、また、渦動粘性係数や拡散係数の分布と密接な関係がある。まず、境界面における混合距離 l_0 , l_{0H} および l_{00} を推定するため、先に導かれた界面の拡散係数の推定式と、安定の強い成層場においては、速度場、水温場および密度場が運動量輸送と質量輸送のみによって定められるという事実を用いて、これを議論した。その結果、境界層の厚さ d で無次元化された混合距離 β , β_H , β_0 は $(U/u_*)^{-3}$ に比例することが明らかにされた。混合距離の分布については、従来の研究との比較から $l=l_0+\kappa z$ のように置いた方が合理的であることを述べ、境界層内の平均的な κ を議論した。運動量に関する混合距離に関しては、Kao が提案した加速度平衡式を用いて議論し、浮力効果のため、カルマン定数が減少する、つまり、混合距離が減少することが明らかにされ、その定量評価法が (77) 式のように与えられた。質量および熱量輸送の混合距離に関しては、平均量を定めて、それから内部の分布を推定する方法で議論し、運動量の場合のように陽形式では表示できないが、Fig. 14 に示す結果が得られた。さらに、質量輸送や熱輸送などが運動量輸送よりも密度成層の影響を顕著に受けるという従来から認められている事実を説明し得た。

(3) 拡散係数については、密度成層場の混合距離に基づいて考察した。すなわち混合距離理論に基づいた勾配型の拡散係数は $\epsilon_p=\epsilon_H=l_0 u_*$ ($l_0=l_H$) と表示されることに注目し、巨視的には、界面からの距離、流速係数 U/u_* および単位幅流量の関数になることを示した。しかし、実験室規模の現象では、水温境界層の発達が抑制され、非常に長い水路を用いなければ主流全域に境界層が形成されない。このような場合、境界層内とそれが発達していない領域とでは、推定式が異なり、前者では (96) あるいは (97) 式が用いられ、後者の領域では (100) 式が用いられることが明らかにされた。ただし、境界層の発達過程については今後の課題として残されている。

最後に、本研究は一部文部省科学研究費（代表者 足立昭平 名古屋大学教授）の補助を受けた。ここに記して感謝の意を表す。また、実験ならびに資料・図面作成などで常に助力していただいた京都大学防災研究所・吉田義則技官ならびに当時大学院学生で現在山口県庁・古谷健氏に対して深謝する。

参 考 文 献

- 1) Keulegan, G.H.: Interfacial Instability and Mixing in Stratified Flows, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 43, RP2040, 1949, pp. 487-500.
- 2) 岩崎敏夫・岸田州雄・富岡亮一：二成層流における密度混合について，土木学会第18回年次学術講演概要集，第Ⅰ部，1962.
- 3) 椎貝博美：塩水楔に関する研究，1964，pp. 51～58.
- 4) 浜田徳一：密度流の問題 (1)，第13回海岸工学講演会講演集，1966，pp. 259～262.
- 5) 金子安雄：2層流境界面抵抗係数の一例，第13回海岸工学講演会講演集，1966，pp. 263～267.
- 6) 水理委員会密度流研究小委員会：成層密度流の界面現象 (1)，土木学会論文報告集，第242号，1975，pp. 73～90.
- 7) 玉井信行・浅枝 隆：淡塩2層流境界面における抵抗係数について，土木学会論文報告集，第271号，1978，pp. 67～81.
- 8) 須賀堯三・高橋 晃：塩水くさびに関する大型水路実験による二三の考察，土木学会第26回年次学術講演概要集，第Ⅰ部，1971，pp. 137～140.
- 9) Ippen, A.T. and D.R.F. Harleman: Steady-State Characteristics of Subsurface Flow, Gravity Waves Symposium, Circular No. 521, the National Bureau of Standards, 1952, pp. 79-93.

- 10) 嶋 祐之・椎貝博美・玉井信行: 河床勾配のある場合の塩水楔について, 土木学会第19回年次学術講演概要, 第I部, 1964.
- 11) Abraham, G. and W.D. Eysink: Magnitude of Interfacial Shear in Exchange Flow, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 19, No. 2, 1971, pp. 125-150.
- 12) Pedersen, F.B.: Gradually Varying Two-Layer Stratified Flow, *Journal of Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 98, 1972, pp. 257-268.
- 13) 柏村正和: 河口流出における密度流効果, 第18回水理講演会講演集, 1974, pp. 221-236.
- 14) 日野幹雄: 密度流の流速分布および界面抵抗について, 第23回水理講演会論文集, 1979, pp. 347-353.
- 15) 芦田和男・江頭進治: 密度躍層のある場における濁水の挙動に関する研究 (1), 京都大学防災研究所年報, 第18号, B, 1975, pp. 459-512.
- 16) 芦田和男・江頭進治: 成層密度流の流速分布則に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第21号 B-2, 1978, pp. 455-465.
- 17) Keulegan, G.H.: Laminar Flow at the Interface of Two Liquids, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 32, RP 1591, 1944, pp. 303-327.
- 18) Karels, M., C.B. Vreugdenhil and G.A.L. Delvigne: Momentum and mass transfer in stratified flows, Delft Hydraulics Laboratory, report on literature study, R880, 1974, pp. 266-2-13.
- 19) Lofquist, K.: Flow and Stress Near an Interface between Stratified Liquids, *The Physics Of Fluid*, Vol. 3, Numb, 2, 1960, pp. 158-175.
- 20) Georgiev, B.V.: Some Experimental Investigation on Turbulent Characteristics of Stratified Flows, *International Symposium on Stratified Flows*, 1972, pp. 507-515.
- 21) Lumley, J.L. and H.A. Panofsky: *The Structure of Atmospheric Turbulence*, John Wiley & Sons, 1964, pp. 99-118.
- 22) McVehil, G.E.: Wind and Temperature Profiles near the Ground in Stable Stratification, *Quar. Jour. Roy. Met. Soc.* Vol. 90, 1964, pp. 136-146.
- 23) Webb, E.K.: Profile Relationships: The Log-Linear Range, and Extension to Strong Stability, *Quar. Jour. Roy. Met. Soc.* Vol. 96, 1970, pp. 67-90.
- 24) 芦田和男・江頭進治: 密度躍層のある場における濁水の挙動に関する研究 (3), 京都大学防災研究所年報, 第20号 B-2, 1977, pp. 437-450.
- 25) Kao, S.K.: Turbulent Transfer in the Boundary Layer of a Stratified Fluid, *Journal of Meteorology*, Vol. 16, 1959, pp. 497-503.
- 26) 日野幹雄: 固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文集, 第92号, 1963, pp. 11-20.
- 27) 小松利光: 成層密度噴流における乱れおよび流れ特性に関する研究, 1978, pp. 54-96.
- 28) Long, R.R.: A Theory of Turbulence in Stratified Fluids, *J. Fluid Mech.* Vol. 42, 1970, pp. 349-365.
- 29) Ellison, T.H. and J.S. Turner: Turbulent entrainment in stratified flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 6, 1959, pp. 423-448.
- 30) 芦田和男・江頭進治: 泥水密度流に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第237号, 1975, pp. 37-50.
- 31) Rossby, C.G. and R.B. Montgomery: The layer of frictional influence in wind and ocean currents, *Pap. Phys. Oceanogr. Meteorol.*, Vol. 3, 1935, pp. 1-101.
- 32) Munk, W.H. and E.R. Anderson: Note on a Theory of the Thermocline, *J. Marine Research*,

- Vol. 7, 1948, pp. 276-295.
- 33) Oke, T.R.: Turbulent Transport Near the Ground in Stable Conditions, J. Applied Meteorol., Vol. 9, 1970, pp. 778-786.
 - 34) Ellison, T.H.: Turbulent transport of heat and momentum from an infinite rough plane, J. Fluid Mech. Vol. 2, 1957, pp. 456-466.
 - 35) Ellison, T.H. and J.S. Turner: Mixing of dense fluid in a turbulent pipe flow, Part 2. Dependence of transfer coefficients on local stability, J. Fluid Mech. Vol. 8, 1960, pp. 529-544.
 - 36) Launder, B.E.: On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum, J. Fluid Mech., Vol. 67, 1975, pp. 569-581.
 - 37) Townsend, A.A.: Turbulent flow in a stably stratified atmosphere, J. Fluid Mech. Vol. 3, 1958, pp. 361-372.
 - 38) Webster, C.A.G.: An experimental study of turbulence in a density-stratified shear flow, J. Fluid Mech. Vol. 19, 1963, pp. 221-245.
 - 39) Merritt, G. and G. Rudinger: Thermal and Momentum Diffusivity Measurements in a Turbulent Stratified Flow, AIAA Journal, Vol. 11, 1973, pp. 1465-1470.
 - 40) 椿東一郎：水理学Ⅰ，森北出版，pp. 173~178.