

Invariants of links in the product space of a surface and the real line

筑波大学数学系 金戸武司 (Takeshi Kaneto)

E-mail: kaneto@math.tsukuba.ac.jp

1. 序

境界を持たない曲面 Σ と直線 $\mathbf{R}$ の積空間 $\Sigma \times \mathbf{R}$ における links¹⁾ について考察する。 Σ が平面あるいは 2 次元球面のとき classical link theory に対応し、一般の曲面のときは局所的な classical link 現象と大域的な link 現象が混在するので特に興味深い研究対象である。本報告では、Kauffman の bracket polynomial の idea (cf. [Kau]) に基づいて得られた ambient isotopy invariants を取り上げる。次節で用語・記号の定義と 3 つの ambient isotopy invariants について概観し、以降の各節で各 invariants をそれぞれ、 Σ が向き付け不能な曲面、向き付けられた開曲面及び向き付けられた閉曲面の場合に適用して得られた結果について述べる。

2. bracket $\langle L \rangle$ and invariants

$\Sigma \times \mathbf{R}$ における links の同値関係については幾つかの立場 (cf. [CF], [Ro]) があるがここでは主として ambient isotopy によるものを扱う。 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の 2 つの links L, L' に対し、 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 上の恒等写像と isotopic な homeomorphism $h: \Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbf{R}$ で $h(L) = L'$ (L, L' が oriented links のときは orientation も含めての意) となるものが存在するとき L と L' は ambient isotopic であるといい、 $L \sim L'$ と表わす。 $\sim$ 同値で不変な (link の) 性質や量を ambient isotopy invariant という。

以下、links はすべて tame²⁾ とし、射影 $p: \Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma (= \Sigma \times 0$ と看做す) に関する link diagrams³⁾ として扱う⁴⁾。

¹⁾ $\Sigma \times \mathbf{R}$ の部分空間で各 (連結) 成分が円周 S^1 と同相なもの。成分数が 1 の link を knot という。knots も links の一種と看做す。

²⁾ PL links と ambient isotopic。tame でないとき wild であるという。wild links 等については [Ru] 参照。

³⁾ p による像で singularity が有限個の transversal crossings のみ、かつ各 crossing で上下の区別があるもの。

⁴⁾ 便宜上、link diagrams は $\Sigma \times 0$ の近傍 $\Sigma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ (ε は十分小さい正数) 内で実現されている links の一種と看做すことにする。このとき、任意の link は、一意的ではないが、ある link diagram と ambient isotopic である。

記号 :

$L_\Sigma := \{ \text{isotopy classes of unoriented links without trivial components in } \Sigma \}^{5)}$

$\Lambda := \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ (Laurent polynomial ring with integer - coefficient)

$\Lambda(\Sigma)$: free Λ -module generated by $\{1\} \cup L_\Sigma$

とする。

定義1. $\Sigma \times \mathbb{R}$ における unoriented link diagram L に対し、 $\text{bracket } \langle L \rangle (\in \Lambda(\Sigma))$ を次の rules で定める。

(1) $\langle K_0 \rangle = 1$ (K_0 : trivial knot diagram ⁶⁾)

(2) $\langle L \cup K_0 \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$ ($L (\neq \emptyset)$ と K_0 は no crossing)

(3) $\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle$ (但し、 Σ が nonorientable のときは $A = A^{-1}$ とする)

例. $\Sigma = T^2$ (torus) とする。

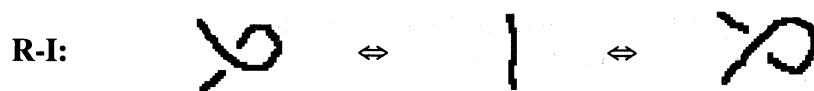
$$\begin{aligned} \left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle &= A \left\langle \text{Diagram 2} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 3} \right\rangle \\ &= A + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 4} \right\rangle (\in \Lambda(\Sigma)) \end{aligned}$$

link diagrams の局所的な次の3つのタイプの変形を Reidemeister moves という :

⁵⁾ $\Sigma \times \mathbb{R}$ 内で他の成分と交わらない topological disk を bound する成分を trivial component という。
 Σ 内の link については、 Σ 内で topological disk (この場合は他の成分と交わることを許す、cf. 例. 同心円周における外側の円周) を bound する成分を trivial component という。

⁶⁾ trivial component のみの knot を trivial knot といい、no crossing で $\Sigma \times 0$ 内の topological disk を bound する knot diagram を trivial knot diagram という。

Reidemeister moves



$\Sigma = \mathbf{R}^2$ の場合について、Reidemeister moves は generic な局所的変形であるというよく知られた事実から次の事実が得られる⁷⁾ :

Fundamental fact. link diagrams $L, L' \subset \Sigma \times \mathbf{R}$ について次は同値 ;

- (1) L と L' は ambient isotopic である、
- (2) crossing の様子⁸⁾ を変えない ambient isotopic な変形を **R-0** とすると、 L と L' は有限回の **R-0, I, II, III** 変形で移り合える。

定義から次が成り立つ。

命題1. unoriented link diagram $L \subset \Sigma \times \mathbf{R}$ について、

- (1) $\langle L \rangle$ は **R-0, II, III** 変形で不変、
- (2) **R-I** 変形については $\langle \text{crossing} \rangle = (-A^{-3}) \langle \text{straight} \rangle$, $\langle \text{crossing} \rangle = (-A^3) \langle \text{straight} \rangle$ 。

従って、次の2つの ambient isotopy invariants が得られる。

⁷⁾ 多様体内の compact subset の ambient isotopic な変形は compact support をもつ変形に帰着され、従って、有限回の局所的変形の合成として表わせるから。(cf. [EK])

⁸⁾ 上下関係や(各 component に沿った crossings の)順序。

命題2. unoriented link diagram $L \subset \Sigma \times \mathbf{R}$ について、

(1) $\langle L \rangle_{A=-1}$ は ambient isotopy invariant、

(2) $\langle L \rangle = f_0(A) + \sum_{j=1}^k f_j(A) \langle L_j \rangle \quad (\in \Lambda(\Sigma))$

(但し、 $f_j(A) (\neq 0) \in \Lambda = \mathbf{Z}[A, A^{-1}]$, $\langle L_j \rangle \in \mathbf{L}_\Sigma \quad (j = 1, 2, \dots, k)$) とすると、

$0 \leq m, n \leq k$ (但し、 $f_0(A) = 0$ のときは $n \neq 0$) について、 $\frac{f_m(A)}{f_n(A)}$ は ambient isotopy invariant。

最後に、 Σ が oriented のとき $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の oriented links ⁹⁾ の Jones type の ambient isotopy invariant (cf. [IK]) を取り上げる。

定義2. Σ は oriented とする。 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の oriented link diagram L に対し、 $Cross(L) := \{\text{crossing points of } L\}$ とし、各 crossing point $c \in Cross(L)$ に対し符号 $sign(c)$ を、 c における over pass を反時計回りに回して under pass に重ねたときそれぞれの向きが一致する場合は $sign(c) = 1$ 、一致しない場合は $sign(c) = -1$ と定める。 L の writhe (のたくるの意) $wr(L)$ を $wr(L) := \sum_{c \in Cross(L)} sign(c)$ と定義する。

例. $wr(\text{図}) = (-1) + (-1) + (-1) = -3$

命題3. Σ は oriented とする。 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の oriented link diagram L について、

(1) $wr(L)$ は **R-0, II, III** 変形で不変、

(2) 向き付け方に依らず、 $wr(\text{図}) = wr(\text{図}) - 1$, $wr(\text{図}) = wr(\text{図}) + 1$ 。

命題1、3 から次が得られる。

命題4. Σ は oriented とする。 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の oriented link diagram L に対し、 $F_L(A) := (-A^3)^{-wr(L)} \langle L \rangle \quad (\in \Lambda(\Sigma))$ は ambient isotopy invariant。

参考. 1) とくに、 $\Sigma = \mathbf{R}^2$ のとき、 $V_L(t) = F_L(t^{-\frac{1}{4}})$ ($V_L(t)$ は Jones polynomial¹⁰⁾)。
2) 任意の evaluation $\varepsilon: \{1\} \cup \mathbf{L}_\Sigma \rightarrow \Lambda$ に対し、その induced Λ -homomorphism $\varepsilon: \Lambda(\Sigma) \rightarrow \Lambda$ から、($F_L(A)$ の reduced) ambient isotopy invariant $\varepsilon(F_L(A)) \quad (\in \Lambda)$ が得られる。(例. N.Kamada's invariant cf. [Kam]、後述5節系2.(2)。)

⁹⁾ 各 component に向きが与えられている link。

¹⁰⁾ cf. [Jo], [Kau]。

3. $\langle L \rangle_{A=-1}$ for $\Sigma = \mathbf{P}^2$ (real projective plane)

Σ が unorientable の場合、bracket の定義において rule (3) が welldefined になるよう、制限 $A = A^{-1}$ を付けた、即ち、特殊値 $A = \pm 1$ でのみ考えることにした。更に、writhe も定義出来ないので、命題 3 の invariant $F_L(A)$ は有効ではない。

以下、 $\Sigma = \mathbf{P}^2$ (real projective plane) の場合について考察する。 $\mathbf{P}^2$ 内の non-trivial knot (=null homotopic でない simple closed curve) を K とすると、 $\mathbf{P}^2$ 内の trivial components を含まない link は K と ($\mathbf{P}^2$ 内で) isotopic だから¹¹⁾、 $L_{\mathbf{P}^2} = \{ \langle K \rangle \}$ である。また、 $A = -1$ のとき $\Lambda = \mathbf{Z}[A, A^{-1}] = \mathbf{Z}$ だから $\Lambda(\mathbf{P}^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\langle K \rangle$ である。よって、 $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}$ における link diagram L に対し、 $\langle L \rangle_{A=-1}$ は一般に、 $x + y\langle K \rangle$ ($x, y \in \mathbf{Z}$) の形で表わせる。実際にはより精密に次が成り立つ。

定理1. $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}$ における link diagram L について、 L の成分数を k 、 L の $\mathbf{Z}_2$ -homology class を $[L]$ とすると、

$$\langle L \rangle_{A=-1} = \begin{cases} (-2)^{k-1} & \text{if } [L] = 0 \text{ in } H_1(\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}, \mathbf{Z}_2) \\ (-2)^{k-1}\langle K \rangle & \text{if } [L] \neq 0 \text{ in } H_1(\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}, \mathbf{Z}_2) \end{cases}$$

証明は L の交点数に関する帰納法を用いる。詳細は [IK] 参照。

参考. (1) $[L] = 0$ in $H_1(\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}, \mathbf{Z}_2)$ は「 K と homotopic な L の成分は偶数本」と同値、また、 $[L] \neq 0$ in $H_1(\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}, \mathbf{Z}_2)$ は「 K と homotopic な L の成分は奇数本」と同値。

(2) classical knot theory における Jones polynomial $V_L(t)$ について、類似の結果 $V_L(1) = (-2)^{k-1}$ はよく知られている。

(3) 2項が混ざった形 $x + y\langle K \rangle$ ($x, y \in \mathbf{Z} - \{0\}$) が生じない理由は、bracket の定義における rule (3) の右辺の2項に現われる link diagrams の $\mathbf{Z}_2$ -homology classes は共に左辺のそれに一致する、即ち、 A -cut 及び A^{-1} -cut による link diagrams の変形は $\mathbf{Z}_2$ -homology classe を変えないからである。

(4) (3) と同様の理由で $\langle L \rangle_{A=\pm 1}$ は単項だから $A = \pm 1$ のとき命題 2 (2) の invariant $\frac{f_m(\pm 1)}{f_n(\pm 1)}$ (複合同順) は常に 0 となり有効ではない。

¹¹⁾ $\mathbf{P}^2 - K$ は open 2-ball より 2次元Schoenflies theorem から導かれる。

4. Conductance invariant $C(L)$ of special tunnel links L

平面 $\mathbf{R}^2$ から 2 点を除いた曲面を Σ とする。 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の unoriented links を ([GK] に従い、) tunnel links という。Goldman-Kauffman [GK] は、電気回路網の 2 極間の conductance (=抵抗の逆数) の概念とその性質を応用して、tunnel links のある class に属する links (=special tunnel links in [GK]) L に対し conductance と呼ばれる有理数 $c(L)$ を対応させ、それが ambient isotopy invariant であることを示した。

本節では命題 2. (2) の invariant $\frac{f_m(A)}{f_n(A)}$ と conductance invariant $c(L)$ の関係を調べ、上述 [GK] の結果の別証を与える。

[1] conductance $C(L)$ の定義

定義3. 1) (loops, multi-edges を許した) graph N の各 edge e に対し、実数 $c(e) (\neq 0)$ (conductance of e と呼ぶ) が対応しているとき、 N を (signed) network という。以下、特に断わらない限り N は graph として connected とする。

2) network N における (spanning) tree T に対し、 $w(T) := \prod_{e: \text{edge of } T} c(e)$ を weight of T

といい、 $w(N) := \sum_{T: \text{spanning tree of } N} w(T)$ を weight of N という。

定義4. network N において 2 頂点 $\{v, v'\}$ ($v = v'$ も許す) が指定されているとき、 (N, v, v') を two-terminal network という。 e' を v と v' を結ぶ (N に含まれない) new edge とし、 N に e' を加えて得られる two-terminal network

$(N + e', v, v')$ ($c(e') := 1$) に対し、 $w'(N + e') := \sum_{T': \text{spanning tree of } N + e', \text{ containing } e'} w(T')$ と定める。

$c(N, v, v') := \frac{w(N)}{w'(N + e')}$ を conductance of N across the terminals v, v' という。

定義5. 1) tunnel link diagram L に対し、(包含写像 $i: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^2$ により $\mathbf{R}^2$ の link diagram と看做して、) $\mathbf{R}^2$ の shading (= L で分割された領域を白、黒に塗分けること) は、常に、unbounded region が unshaded (=白塗り) となるように行うものとする。 $\mathbf{R}^2$ から除かれた 2 点 (= $\mathbf{R}^2 - \Sigma$) が shaded region(s) にあるとき、 L を special tunnel link という。

2) special tunnel link L に対し、shading によって (shaded regions を 頂点とし、crossings を edges とし、crossing of type  に対応する edge の conductance を 1、crossing of type  に対応する edge の conductance を -1 とし、除かれた 2 点を含む shaded region(s) に対応する頂点を v, v' として) 得られる two-terminal network $(G(L), v, v')$ を用いて、 $c(L) := c(G(L), v, v')$ を L の conductance と定める。

[2] 結果

定理2. Σ が $\mathbf{R}^2$ から2点を除いた surface であるとき、connected special tunnel link diagram L (in $\Sigma \times \mathbf{R}$) ($p(L)$ が connected の意) に対し、

$$\langle L \rangle = f_0(A) + \sum_{j=1}^k f_j(A) \langle L_j \rangle \quad (\in \Lambda(\Sigma)) \quad (\text{但し、} L_1 = \bigcirc \text{、} L_2 = \bigodot \text{、} \vdots = \{v, v'\} \text{、}$$

$$f_j(A) \in \Lambda = \mathbf{Z}[A, A^{-1}], \quad \langle L_j \rangle \in \mathbf{L}_\Sigma \quad (j=1, 2, \dots, k), \quad \langle L_j \rangle \neq \langle L_{j'} \rangle \text{ if } j \neq j')$$

とすると、 $c(L) = (-i) \frac{f_1(\sqrt{i})}{f_2(\sqrt{i})}$ (ここに、 $i \in \mathbf{C}, i^2 = -1$) である。

よって、命題2. (2) より次の別証を得る。

系. ([GK]) connected special tunnel link diagram L に対し、conductance $c(L)$ は ambient isotopy invariant 。

[3] 定理2の証明

定義より $c(L) = c(G(L), v, v') = \frac{w(G(L))}{w'(G(L) + e')}$ だから次の補題を示せば十分。

補題. $r := \text{rank}(\Pi_1(G(L)))$, $E := \text{total number of edges of } G(L)$, $s := \sum_{e: \text{edge of } G(L)} c(e)$ とすると、

$$(1) \quad w(G(L)) = i^r i^E (\sqrt{i})^{-3s} f_1(\sqrt{i}), \quad (2) \quad w'(G(L) + e') = i^{r+1} i^E (\sqrt{i})^{-3s} f_2(\sqrt{i}).$$

補題の証明.

[Kau] に従い、state model 理論における概念、用語を準備しておく。 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の unoriented link diagram L に対し、 $\Sigma (= \Sigma \times 0)$ 内の graph $U := p(L)$ を (L に対する) universe といい、 U の各頂点に対し A または A^{-1} を選ぶ選び方、即ち、

$S: \{\text{vertices of } U\} \rightarrow \{A, A^{-1}\}$ を U の state という。各 state S に対し、
 $\langle L | S \rangle := \prod_{v: \text{vertex of } U} S(v) = A^m A^{-n}$ (但し、 m, n はそれぞれ $S^{-1}(A), S^{-1}(A^{-1})$ の位数)、

L_S : L の各 crossing を state S に従って解消して得られた (crossings を持たない) $\Sigma (= \Sigma \times 0)$ 内の link (diagram)、

$\tilde{L}_S$: L_S から trivial components を除いた残りの link (diagram)、

$$|S| := \begin{cases} \text{total number of trivial components of } L_S & \text{if } \tilde{L}_S \neq \emptyset \\ (\text{total number of trivial components of } L_S) - 1 & \text{if } \tilde{L}_S = \emptyset \end{cases}$$

とすると定義より、

$$\langle L \rangle = \sum_{S: \text{state of } U} (-A^2 - A^{-2})^{|S|} \langle L | S \rangle \langle \tilde{L}_S \rangle$$

である。従って、定理 2. における仮定：

$$\langle L \rangle = f_0(A) + \sum_{j=1}^k f_j(A) \langle L_j \rangle \quad (\in \Lambda(\Sigma)) \quad (\text{但し、} L_1 = \bigcirc, L_2 = \bigotimes, \vdots = \{v, v'\},$$

$$f_j(A) \in \Lambda = \mathbf{Z}[A, A^{-1}], \quad \langle L_j \rangle \in \mathbf{L}_2 \quad (j=1, 2, \dots, k), \quad \langle L_j \rangle \neq \langle L_{j'} \rangle \text{ if } j \neq j')$$

より

$$1) \quad f_1(A) = \sum_{\substack{S: \text{state of } U \\ \text{s.t. } \langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_1 \rangle}} (-A^2 - A^{-2})^{|S|} \langle L | S \rangle, \quad 2) \quad f_2(A) = \sum_{\substack{S: \text{state of } U \\ \text{s.t. } \langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_2 \rangle}} (-A^2 - A^{-2})^{|S|} \langle L | S \rangle$$

である。 ($\because \Lambda(\Sigma)$ は free Λ -module.) 更に、 $A = \sqrt{i}$ のとき、 $-A^2 - A^{-2} = 0$ だから、

$$1') \quad f_1(\sqrt{i}) = \sum_{\substack{S: \text{state of } U \\ \text{s.t. } \langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_1 \rangle}} \langle L | S \rangle_{A=\sqrt{i}}, \quad 2') \quad f_2(\sqrt{i}) = \sum_{\substack{S: \text{state of } U \\ \text{s.t. } \langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_2 \rangle}} \langle L | S \rangle_{A=\sqrt{i}}$$

である。¹²⁾

(1) を示す。

$G(L)$ の任意の spanning tree T に対し、自然な 1 対 1 対応 $\varphi: \{v \mid v: \text{vertex of the universe } U = p(L)\} \rightarrow \{e \mid e: \text{edge of } G(L)\}$ により、canonical な U の state $S(T): \{v \mid v: \text{vertex of the universe } U = p(L)\} \rightarrow \{A, A^{-1}\}$ を

$$S(T)(v) := \begin{cases} A^{c(\varphi(v))} & \text{if } \varphi(v) \subset T \\ A^{-c(\varphi(v))} & \text{if otherwise} \end{cases}$$

と定めると、crossing v における $A^{c(\varphi(v))}$ -cut は shaded region(s) を繋ぎ、 $A^{-c(\varphi(v))}$ -cut は shaded region(s) を離すから、 $L_{S(T)}$ は one component で T は $L_{S(T)}$ で 2 つに分けられた $\mathbf{R}^2$ の bounded region の方に含まれる¹³⁾。よって、 $\tilde{L}_{S(T)} = L_{S(T)}$ かつ

条件 (*) $\langle \tilde{L}_{S(T)} \rangle = \langle L_1 \rangle$, $|S(T)| = 0$ を満たす。

逆に、条件 (*) $\langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_1 \rangle$, $|S| = 0$ を満たす任意の U の state S に対し、 $|S| = 0$ より $\tilde{L}_S = L_S$ 、従って、 $\langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_1 \rangle$ より L_S は one component で non trivial in $\Sigma = \mathbf{R}^2 - \{v, v'\}$ 、更に、 L_S を boundary にもつ $\mathbf{R}^2$ の bounded region D 内に $G(L)$ の spanning tree $T = \{x \mid D \supset x: \text{vertex or edge of } G(L)\}$ が (一意的に) 存在する¹⁴⁾。

¹²⁾ $\langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_1 \rangle$ or $\langle L_2 \rangle$ のとき、 $\tilde{L}_S \neq \emptyset$ だから $|S|$ = total number of trivial components of L_S 、よって、 $|S| = 0 \Leftrightarrow L_S$ has no trivial component である。

¹³⁾ ここでは、 $G(L)$ は $\mathbf{R}^2$ において、各 shaded region 内の 1 点を頂点とし、各 crossing に対応する edge を両側の shaded region(s) 内の頂点をその crossing を通る arc として実現された planar graph として扱った。

¹⁴⁾ $\because \langle L_S \rangle = \langle L_1 \rangle$ より $D \supset \{v, v'\}$ だから $v, v' \in T$ より $T \neq \emptyset$ 。 T が cycle をもつか、あるいは、 $G(L)$ の頂点で T に含まれないものがあれば、 L_S の定め方から、 L_S は two components 以上をもつことになり L_S は one component に反する。故に T は $G(L)$ の spanning tree。

このとき、 T の定め方から $L_{S(T)} = L_S$ だから $S = S(T)$ 。

以上と 1') より

$$1'') f_1(\sqrt{i}) = \sum_{\substack{S: \forall \text{ state of } U \\ \text{s.t. } \langle \bar{L}_S \rangle = \langle L_1 \rangle, |S|=0}} \langle L | S \rangle_{A=\sqrt{i}} = \sum_{T: \forall \text{ spanning tree of } G(L)} \langle L | S(T) \rangle_{A=\sqrt{i}}$$

を得る。一方、 $G(L)$ の任意の spanning tree T に対し、定義より

$$\begin{aligned} \langle L | S(T) \rangle &= \prod_{v: \text{vertex of } U} S(T)(v) = \left(\prod_{\substack{v: \text{vertex of } U \\ \text{s.t. } \varphi(v) \in T}} S(T)(v) \right) \left(\prod_{\substack{v: \text{vertex of } U \\ \text{s.t. } \varphi(v) \in G(L)-T}} S(T)(v) \right) \\ &= \left(\prod_{\substack{v: \text{vertex of } U \\ \text{s.t. } \varphi(v) \in T}} A^{c(\varphi(v))} \right) \left(\prod_{\substack{v: \text{vertex of } U \\ \text{s.t. } \varphi(v) \in G(L)-T}} A^{-c(\varphi(v))} \right) = \left(\prod_{e: \text{edge of } T} A^{c(e)} \right) \left(\prod_{e: \text{edge of } G(L)-T} A^{-c(e)} \right), \end{aligned}$$

よって、 $r = \text{rank}(\Pi_1(G(L))) = \text{total number of edges of } G(L) - T$ より

$$\begin{aligned} i^r i^E (\sqrt{i})^{-3s} \langle L | S(T) \rangle &= \left(\prod_{e: \text{edge of } T} i(\sqrt{i})^{-3c(e)} (\sqrt{i})^{c(e)} \right) (i^r \prod_{e: \text{edge of } G(L)-T} i(\sqrt{i})^{-3c(e)} (\sqrt{i})^{-c(e)}) \\ &= \left(\prod_{e: \text{edge of } T} i(\sqrt{i})^{-3c(e)} (\sqrt{i})^{c(e)} \right) \left(\prod_{e: \text{edge of } G(L)-T} i i(\sqrt{i})^{-3c(e)} (\sqrt{i})^{-c(e)} \right) \\ &= \left(\prod_{e: \text{edge of } T} i(\sqrt{i})^{-2c(e)} \right) \left(\prod_{e: \text{edge of } G(L)-T} i^2 (\sqrt{i})^{-4c(e)} \right) = \left(\prod_{e: \text{edge of } T} i \left(\frac{1}{i} \right)^{c(e)} \right) \left(\prod_{e: \text{edge of } G(L)-T} (-1) \left(\frac{1}{-1} \right)^{c(e)} \right) \\ &= \prod_{e: \text{edge of } T} c(e) = w(T) \quad \left(\because i \left(\frac{1}{i} \right)^{c(e)} = \begin{cases} 1 & \text{if } c(e) = 1 \\ -1 & \text{if } c(e) = -1 \end{cases}, c(e) = \pm 1 \text{ より } (-1) \left(\frac{1}{-1} \right)^{c(e)} = 1 \right) \end{aligned}$$

故に、

$$\begin{aligned} i^r i^E (\sqrt{i})^{-3s} f_1(\sqrt{i}) &= \sum_{T: \forall \text{ spanning tree of } G(L)} (i^r i^E (\sqrt{i})^{-3s} \langle L | S(T) \rangle_{A=\sqrt{i}}) \\ &= \sum_{T: \forall \text{ spanning tree of } G(L)} w(T) = w(G(L)) \end{aligned}$$

を得る。

(2) を示す。

e' を含む $G(L) + e'$ の任意の spanning tree T' に対し、 $T' \cap G(L)$ は v を含む component T_1 と v' を含む component T_2 からなり、それぞれは $G(L)$ 内の trees で、 $T_1 \cup T_2$ は $G(L)$ のすべての頂点を含む。(以下、このような性質を満たす $G(L)$ 内

の two trees T_1, T_2 を spanning two trees of $(G(L), v, v')$ と呼ぶことにする。) 逆に、任意の spanning two trees T_1, T_2 of $(G(L), v, v')$ に対し、 e' を含む $G(L) + e'$ の spanning tree $T' := T_1 \cup \{e'\} \cup T_2$ が一意的に定まる。よって、 $G(L) + e'$ の spanning trees 全体と $G(L)$ 内の spanning two trees of $(G(L), v, v')$ 全体は 1 対 1 に対応する。従って、定義より $c(e') = 1$ だから、

$$3) \quad w'(G(L) + e') := \sum_{T': \text{spanning tree of } G(L) + e', \text{ containing } e'} w(T') = \sum_{T_1, T_2: \text{spanning two trees of } (G(L), v, v')} w(T_1) w(T_2) \quad .$$

任意の spanning two trees T_1, T_2 of $(G(L), v, v')$ に対し、 $T := T_1 \cup T_2$ ($\subset G(L)$) とするとき、(1) においてと同様に、canonical な U の state $S(T)$ を

$$S(T)(v) := \begin{cases} A^{c(\varphi(v))} & \text{if } \varphi(v) \subset T \\ A^{-c(\varphi(v))} & \text{if otherwise} \end{cases}$$

と定めると、前と同様の理由から、 $L_{S(T)}$ は two components で $\mathbf{R}^2$ 内で、それぞれ、 T_1, T_2 を含む 2 つの topological disks を bound し、共に non trivial in $\Sigma = \mathbf{R}^2 - \{v, v'\}$ 。よって、 $\tilde{L}_{S(T)} = L_{S(T)}$ かつ

条件 (*) $\langle \tilde{L}_{S(T)} \rangle = \langle L_2 \rangle$, $|S(T)| = 0$ を満たす。

逆に、条件 (*) $\langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_2 \rangle$, $|S| = 0$ を満たす任意の U の state S に対し、 $|S| = 0$ より $\tilde{L}_S = L_S$ 、従って、 $\langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_2 \rangle$ より L_S は two components で、各 component は non trivial in $\Sigma = \mathbf{R}^2 - \{v, v'\}$ 、更に、 L_S を boundary にもつ $\mathbf{R}^2$ の 2 つの topological disks D_j ($j=1, 2$) 内に、それぞれ、 $G(L)$ の trees $T_j = \{x \mid D_j \supset x : \text{vertex or edge of } G(L)\}$ ($j=1, 2$) が (一意的に) 存在し、spanning two trees of $(G(L), v, v')$ をなす ($\because$ cf. 前脚注13))。このとき、 T の定め方から $L_{S(T)} = L_S$ だから $S = S(T)$ 。

以上と 2') より

$$2'') \quad f_2(\sqrt{i}) = \sum_{\substack{S: \text{state of } U \\ \text{s.t. } \langle \tilde{L}_S \rangle = \langle L_1 \rangle, |S|=0}} \langle L | S \rangle_{A=\sqrt{i}} = \sum_{\substack{T: T_1 \cup T_2, \text{ where } \\ T_1, T_2: \text{spanning two} \\ \text{trees of } (G(L), v, v')}} \langle L | S(T) \rangle_{A=\sqrt{i}}$$

を得る。一方、任意の spanning two trees T_1, T_2 of $(G(L), v, v')$ に対し、 $T := T_1 \cup T_2$ ($\subset G(L)$) とすると、定義より

$$\begin{aligned} \langle L | S(T) \rangle &= \prod_{v: \text{vertex of } U} S(T)(v) = \left(\prod_{\substack{v: \text{vertex of } U \\ \text{s.t. } \varphi(v) \in T}} S(T)(v) \right) \left(\prod_{\substack{v: \text{vertex of } U \\ \text{s.t. } \varphi(v) \in G(L) - T}} S(T)(v) \right) \\ &= \left(\prod_{\substack{v: \text{vertex of } U \\ \text{s.t. } \varphi(v) \in T}} A^{c(\varphi(v))} \right) \left(\prod_{\substack{v: \text{vertex of } U \\ \text{s.t. } \varphi(v) \in G(L) - T}} A^{-c(\varphi(v))} \right) = \left(\prod_{e: \text{edge of } T} A^{c(e)} \right) \left(\prod_{e: \text{edge of } G(L) - T} A^{-c(e)} \right), \end{aligned}$$

よって、 $r = \text{rank}(\Pi_1(G(L))) = (\text{total number of edges of } G(L) - T) - 1$ より、

$$\begin{aligned}
i^{r+1} i^E (\sqrt{i})^{-3s} \langle L | S(T) \rangle &= \left(\prod_{e: \text{edge of } T} i(\sqrt{i})^{-3c(e)} (\sqrt{i})^{c(e)} \right) (i^{r+1} \prod_{e: \text{edge of } G(L)-T} i(\sqrt{i})^{-3c(e)} (\sqrt{i})^{-c(e)}) \\
&= \left(\prod_{e: \text{edge of } T} i(\sqrt{i})^{-3c(e)} (\sqrt{i})^{c(e)} \right) \left(\prod_{e: \text{edge of } G(L)-T} i i(\sqrt{i})^{-3c(e)} (\sqrt{i})^{-c(e)} \right) \\
&= \left(\prod_{e: \text{edge of } T} i(\sqrt{i})^{-2c(e)} \right) \left(\prod_{e: \text{edge of } G(L)-T} i^2 (\sqrt{i})^{-4c(e)} \right) = \left(\prod_{e: \text{edge of } T} i \left(\frac{1}{i} \right)^{c(e)} \right) \left(\prod_{e: \text{edge of } G(L)-T} (-1) \left(\frac{1}{-1} \right)^{c(e)} \right) \\
&= \prod_{e: \text{edge of } T} c(e) = \left(\prod_{e: \text{edge of } T_1} c(e) \right) \left(\prod_{e: \text{edge of } T_2} c(e) \right) = w(T_1) w(T_2) \quad (\because \text{最初の等号は前と同様、2番目の等号は定義 } T := T_1 \cup T_2 \text{ から、3番目の等号も定義から。}) \\
&\text{故に、3) より}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i^{r+1} i^E (\sqrt{i})^{-3s} f_2(\sqrt{i}) &= \sum_{T: \forall \text{ spanning tree of } G(L)} (i^{r+1} i^E (\sqrt{i})^{-3s} \langle L | S(T) \rangle_{A=\sqrt{i}}) \\
&= \sum_{T_1, T_2: \forall \text{ spanning two trees of } (G(L), v, v')} w(T_1) w(T_2) = w'(G(L) + e')
\end{aligned}$$

を得る。

5. Homeomorphism invariants of links in $\Sigma \times \mathbf{R}$ for orientable closed surfaces Σ

$\Sigma \times \mathbf{R}$ における links の別の同値関係として $\Sigma \times \mathbf{R}$ 上の homeomorphisms によるものがある。即ち、 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の 2 つの links L, L' に対し、homeomorphism $h: \Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbf{R}$ で $h(L) = L'$ (L, L' が oriented links のときは orientation も含めての意) となるものが存在するとき L と L' は $\approx$ 同値であると定め、 $L \approx L'$ と表わす。 $\approx$ 同値で不変な (link の) 性質や量を homeomorphism invariant¹⁵⁾ という。

本節では Σ が closed oriented の場合について、命題 4. の ambient isotopy invariant $F_L(A)$ から得られる homeomorphism invariants を取り上げる。証明等は [Kan1] 参照。

命題 5. Σ を closed orientable surface とする。任意の homeomorphism $h: \Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbf{R}$ に対し、homeomorphism $g: \Sigma \rightarrow \Sigma$ と homeomorphism $g': \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ で homeomorphism $g \times g': \Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbf{R}$ ($(g \times g')(x, t) := (g(x), g'(t))$) が h と isotopic となるものが存在する。ここに、 g' は恒等写像 $1_{\mathbf{R}}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 、または、reflection $r: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ($r(t) = -t$) である。¹⁶⁾

¹⁵⁾ ambient homeomorphism invariant というべきかもしれないが。

¹⁶⁾ 証明には [He] の「10.2.Theorem」(p.89) を用いた。詳細は [Kan1] 参照。

定理3. Σ を closed oriented surface とする。任意の homeomorphism $h: \Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbf{R}$ に対し、 $g: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 、 $g': \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を前命題5における homeomorphisms とする。 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の任意の oriented link diagram L に対し、ambient isotopy invariant $F_L(A) (\in \Lambda(\Sigma))$ を (free Λ -module $\Lambda(\Sigma)$ の) 生成系 $\{1\} \cup \mathbf{L}_\Sigma$ に関する 1 次結合として、

$$F_L(A) = f_0(A) + \sum_{j=1}^k f_j(A) \langle L_j \rangle \quad (\in \Lambda(\Sigma))$$

(但し、 $f_j(A) \in \Lambda = \mathbf{Z}[A, A^{-1}]$, $\langle L_j \rangle \in \mathbf{L}_\Sigma$ ($j=1, 2, \dots, k$), $\langle L_j \rangle \neq \langle L_{j'} \rangle$ if $j \neq j'$) と表わす。このとき、 $g \times g'(L)$ ($= L'$ とおく) は oriented link $h(L)$ と ambient isotopic な oriented link diagram で、 $F_{L'}(A)$ は次のように表わせる:

$$F_{L'}(A) = \begin{cases} f_0(A) + \sum_{i=1}^k f_i(A) \langle g(L_i) \rangle & \text{if } h \text{ is orientation preserving} \\ f_0(A^{-1}) + \sum_{i=1}^k f_i(A^{-1}) \langle g(L_i) \rangle & \text{if } h \text{ is orientation reversing.} \end{cases}$$

定義6. $\mathbf{M}(\Sigma)$ を Σ の mapping class group¹⁷⁾ とする。任意の mapping class $\mathbf{x} = [g] \in \mathbf{M}(\Sigma)$ ($g: \Sigma \rightarrow \Sigma$ は homeomorphism で $[g]$ は g を含む isotopy class (= mapping class)) に対し、isomorphisms $\mathbf{x}, \mathbf{x}_*: \Lambda(\Sigma) \rightarrow \Lambda(\Sigma)$ を

$$\mathbf{x}(f_0(A) + \sum_{i=1}^n f_i(A) \langle L_i \rangle) := f_0(A) + \sum_{i=1}^n f_i(A) \langle g(L_i) \rangle,$$

$$\mathbf{x}_*(f_0(A) + \sum_{i=1}^n f_i(A) \langle L_i \rangle) := f_0(A^{-1}) + \sum_{i=1}^n f_i(A^{-1}) \langle g(L_i) \rangle$$

と定める。このとき、 $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}_* | \mathbf{x} \in \mathbf{M}(\Sigma)\}$ は $\Lambda(\Sigma)$ 上の group action をなし、これを G と表わし、group action G による $\Lambda(\Sigma)$ の orbit space を $\Lambda(\Sigma)/G$ とする。

系1. Σ を closed oriented surface とする。 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の任意の oriented link diagram L に対し $F_L(A)$ の G -orbit $\text{orb}(F_L(A)) (= \{y(F_L(A)) | y \in G\} \in \Lambda(\Sigma)/G)$ は homeomorphism invariant 。

系2. Σ を closed oriented surface とする。 $F_L(A)$ の reduced invariants について、 $F_L(A) = f_0(A) + \sum_{j=1}^k f_j(A) \langle L_j \rangle$ ($\in \Lambda(\Sigma)$) (但し、 $f_j(A) \in \Lambda = \mathbf{Z}[A, A^{-1}]$, $\langle L_j \rangle \in \mathbf{L}_\Sigma$) とすると、

(1) ambient isotopy invariant $\hat{F}_L(A) (= \varepsilon_0(F_L(A))) := \sum_{j=0}^k f_j(A)$ ($\in \Lambda$) に対し、 $\{\hat{F}_L(A), \hat{F}_L(A^{-1})\}$ は homeomorphism invariant、

¹⁷⁾ Σ 上の自己同相の isotopy classes 全体のなす群。

(2) N.Kamada's invariant ¹⁸⁾ $K_L(A) (= \varepsilon_1(F_L(A))) := f_0(A) + \sum_{j=0}^k f_j(A)(-A^2 - A^{-2})^{|L_j|-1}$
 $(\in \Lambda)$ (但し、 $|L_j|$ は L_j の成分数) に対し、 $\{K_L(A), K_L(A^{-1})\}$ は homeomorphism invariant 。

付記. 本稿は $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の links の invariants について、主として、[IK], [Kan1], [Kan3] における結果の一部をまとめたものである。[Kan3] に関連した結果の full proof の記述は本稿 4 節が最初である。ここでは割愛した関連する結果については前述文献及び [Kan2] を参照されたい。

References

- [CF] R. H. Crowell and R. H. Fox, Introduction to Knot Theory, Grad. Text Math. 57, Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [EK] Edwards and Kirby, Deformations of spaces of imbeddings, Ann. of Math. 93, 63-88 (1971)
- [GK] J.R. Goldman - L.H. Kauffman, Knots, Tangles, and Electrical Networks, Advances in Applied Math. 14, 267 - 306 (1993).
- [He] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. Math. Studies 86, Princeton University Press (1976).
- [IK] K. Inoue - T. Kaneto, A Jones type invariant of links in the product space of a surface and the real line, J. of Knot Theory and Its Ram. 3, 153 - 161 (1994).
- [Jo] V. F. Jones, A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985) 103-111.
- [Kam] N. Kamada, The crossing number of alternatin link diagrams on a surface, Knots'96 (Proceedings of the fifth international research institute of Mathematical Society of Japan), World Scientific, Singapore (1997) 377-382
- [Kan1] T. Kaneto, A homeomorphism invariant of links in the product space of a surface and the real line, preprint
- [Kan2] _____, Product of links in the product space of a surface and the real line, 「結び目理論と様々な数学の絡み」 (研究集会報告集), 427-435 (1997).
- [Kan3] _____, Invariants of tunnel links and numerators of rational tangles, to appear in 研究集会「結び目理論」(早稲田大学 1998. 1/26 - 28) 報告集
- [Kau] L. H. Kauffman, State models and Jones polynomial, Topology 26 (1987) 395-407.
- [Ro] D. Rolfsen, Knots and links, Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish, Inc. (1976).
- [Ru] T.B. Rushing, Topological embeddings, Pure and Applied Math. 52, Academic Press (1973).

¹⁸⁾ [Kam] 参照。記号 $K_L(A)$ は便宜的に用いたここだけのもの。