

KP 方程式と結合型 KP 方程式のソリトン相互作用の解析

早稲田大学基幹理工学研究科 田中悠太

Yuta Tanaka

School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

早稲田大学基幹理工学研究科 城戸真弥

Shinya Kido

School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

早稲田大学基幹理工学研究科 渡邊靖之

Yasuyuki Watanabe

School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

早稲田大学理工学術院 丸野健一

Ken-ichi Maruno

Faculty of Science and Engineering, Waseda University

立教大学理学部 笥三郎

Saburou Kakei

College of Science, Rikkyo University

1 イントロダクション

Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式

$$(-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0 \quad (1)$$

は弱非線形、弱 2 次元の仮定の下で得られる浅水波を記述する非線形偏微分方程式である。KP 方程式は N -ソリトン解などの厳密解を持つことが知られており、ソリトン解について様々な研究がなされている。その内、広田の方法によって得られる KP 方程式の 2-ソリトン解は、2 本の線ソリトンが X 字に交差する相互作用を示す [1]。Miles はこの形の KP 方程式の 2-ソリトン解は 2 本のソリトンのなす角を変化させた時にある領域で解が破綻し、その境界では Y 字型のソリトン相互作用（ソリトン共鳴）が起こることを発見した [2, 3]。浅水波の Mach 反射はソリトン共鳴によって起こる現象であり、KP 方程式のソリトン共鳴を用いた理論解析がなされている [4–11]。KP 方程式の発散しないソリトン解、つまり η 関数が零点を持たないソリトン解のソリトン相互作用を分類するという問題に対して、Chakravarty-Kodama は KP 方程式のソリトン解のロンスキアン表示について J-図形やネットワークなどを用いることでソリトン解を置換と対応させ、ソリトン相互作用の分類に成功した [12–15]。

結合型 KP 方程式（もしくは DKP 方程式）[16, 17]

$$\begin{cases} (-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 24(v^+v^-)_{xx} \\ 2v_t^+ + 3uv_x^+ + v_{xxx}^+ - 3\left(v_{xy}^+ + v^+ \int^x u_y dx\right) = 0 \\ 2v_t^- + 3uv_x^- + v_{xxx}^- + 3\left(v_{xy}^- + v^- \int^x u_y dx\right) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

は KP 方程式の拡張の 1 つである．この方程式は $v^+ = v^- = 0$ とした時に KP 方程式に一致するため，KP 方程式の全ての解を厳密解として含んでいる．Isojima-Wilcox-Satsuma は広田の方法によって結合型 KP 方程式のソリトン解を求め，spider-web 解と呼ばれる蜘蛛の巣状パターンのソリトン相互作用の持つ解を発見した [18]．この spider-web 解の発見の後，Biondini-Kodama は KP 方程式も蜘蛛の巣状のソリトン解を持つことを発見した [19]．Kodama-Maruno は結合型 KP 方程式のソリトン解のロンスキ型パフィアン表示に対して石川・若山のパフィアンの和公式を適用し，結合型 KP 方程式のソリトン相互作用の詳細な解析を行った [20]．しかし，KP 方程式のソリトン解が行列式で記述されるのに対して結合型 KP 方程式のソリトン解はパフィアンで記述されるため τ 関数が零点を持たないソリトン解のソリトン相互作用を分類することが難しく，数学的道具の不足も相まってまだソリトン相互作用の完全な分類には至っていない．

本論文では KP 方程式のソリトン解のロンスキアン表示と置換との対応について簡単に説明し，そこで現れるネットワークを用いた結合型 KP 方程式のソリトン相互作用の分類手法を提案する．

2 KP 方程式のロンスキアン解とソリトン相互作用

KP 方程式 (1) は従属変数変換 $u = 2(\log \tau)_{xx}$ によって双線形形式

$$(D_x^4 - 4D_x D_t + 3D_y^2) \tau \cdot \tau = 0 \quad (3)$$

に変形される．ここで D_x, D_y, D_t は広田の D 演算子

$$\begin{aligned} & D_x^l D_y^m D_t^n f(x, y, t) \cdot g(x, y, t) \\ &= \frac{\partial^l}{\partial x^l} \frac{\partial^m}{\partial y^m} \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(x + x', y + y', t + t') g(x - x', y - y', t - t') \Big|_{\substack{x'=0 \\ y'=0 \\ t'=0}} \end{aligned}$$

である．ここで， $\tau \rightarrow e^{ax+by+ct+d}\tau$ というゲージ変換を考えると，双線形形式 (3) は

$$\begin{aligned} & (D_x^4 - 4D_x D_t + 3D_y^2)(e^{ax+by+ct+d}\tau) \cdot (e^{ax+by+ct+d}\tau) \\ &= e^{2ax+2by+2ct+2d}(D_x^4 - 4D_x D_t + 3D_y^2)\tau \cdot \tau \end{aligned}$$

と変形されるので， τ が双線形形式 (3) の解であれば $e^{ax+by+ct+d}\tau$ もまた双線形形式 (3) の解になる．この時，

$$\begin{aligned} 2 \left(\log(e^{ax+by+ct+d}\tau) \right)_{xx} &= 2(ax + by + ct + d + \log \tau)_{xx} \\ &= 2(\log \tau)_{xx} \\ &= u \end{aligned}$$

なので元の従属変数 u は変化しない. 以降, 2つの関数 f, g が $f(x, y, t) = e^{ax+by+ct+d}g(x, y, t)$ という関係にあることを $f \asymp g$ と表す. 双線形形式 (3) はロンスキアン解

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(1)} & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & f_N^{(1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} \quad (4)$$

を持つ. 特に分散関係式 (4) を満たす f_i として

$$f_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} e^{\theta_j}, \quad \theta_j = k_j x + k_j^2 y + k_j^3 t$$

を考えると τ 関数は

$$\tau = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & \cdots & k_1^{N-1} e^{\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\theta_M} & \cdots & k_M^{N-1} e^{\theta_M} \end{pmatrix} \right|$$

$$=: |\hat{A}E|$$

と表され, これは KP 方程式 (1) のソリトン解になる. この時, τ 関数は Cauchy-Binet の公式によって

$$\tau = \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & \cdots & k_1^{N-1} e^{\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\theta_M} & \cdots & k_M^{N-1} e^{\theta_M} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_N \leq M} |\hat{A}_{\{j_1, \dots, j_N\}}| \left(\prod_{1 \leq m < n \leq N} (k_{j_n} - k_{j_m}) \right) e^{\theta_{j_1} + \cdots + \theta_{j_N}} \quad (5)$$

と展開される. 波数 k_j に大小関係

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_M$$

を課すと $\prod_{1 \leq m < n \leq N} (k_{j_n} - k_{j_m}) > 0$ なので, $\hat{A}$ 行列の全ての N 次小行列式が非負であれば τ 関数は零点を持たない. つまり, 次の 2 条件を満たす $\hat{A}$ 行列を分類することで KP 方程式のソリトン相互作用が分類できる.

- $\hat{A}$ 行列の N 次小行列式が全て非負である. このことを totally non-negative (TNN) とよぶ.
- $\hat{A}$ 行列を行基本変形で階段行列にした時, 全ての行のピボット以外の成分および全ての列に非零の成分が存在する. このことを irreducible とよぶ.

ここで 1 つ目の条件は先程の議論から τ 関数が零点を持たない, つまりもとの従属変数 u が特異点を持つような非物理的な解でないことに対応し, 2 つ目の条件はゲージ変換を含めて本質的に指数関数が M 個全て残ることに対応している. この 2 条件を満たす $\hat{A}$ 行列に対応するソリトン解は $\text{Gr}(N, M)$ の解と呼ばれる.

公式 1 (Cauchy-Binet の公式). $N \times M$ 行列 A と $M \times N$ 行列 B ($M > N$) について

$$|AB| = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_N \leq M} |A_{\{j_1, \dots, j_N\}}| |B^{\{j_1, \dots, j_N\}}|$$

が成り立つ. ここで, 添え字集合は添え字を小さい順に並べたものと同一視し, $A_{\{j_1, \dots, j_N\}}$ と $B^{\{j_1, \dots, j_N\}}$ はそれぞれ A 行列と B 行列から対応する列と行を抜き出したものを表す.

KP 方程式の $\hat{A}$ 行列の分類は完全置換 (完全順列) と対応することが知られている. 以下では完全置換から対応する $\hat{A}$ 行列を得る方法を説明する. そのために J-図形を導入する.

定義 1 (irreducible な J-図形). Young 図形の箱に以下のルールに従って $\bigcirc$ を配置したものを J-図形という:

- $\bigcirc$ が入った箱より上の箱は全て $\bigcirc$, または左の箱は全て $\bigcirc$ である.
- $\bigcirc$ だけの行や列は存在しない.

例 1 (J-図形).

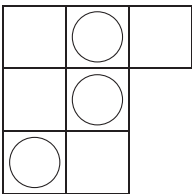


図 1: J-図形の例

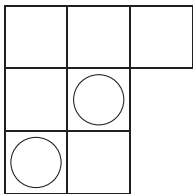


図 2: J-図形でない例

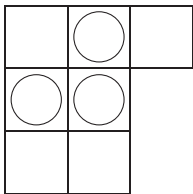
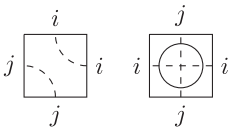


図 3: J-図形でない例

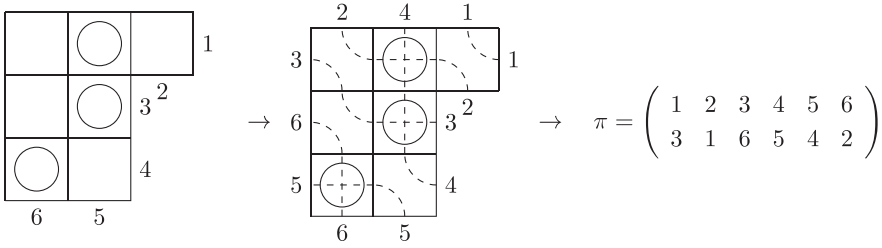
J-図形から次の手順で完全置換が得られる:

1. J-図形の右・下枠に右上から順に数字を振る.
2. 各箱を次のように読み替え, 線に従って左・上枠に数字を振る:



3. 右・下枠の数字 i に向かい合う左・上枠の数字が $\pi(i)$ となる完全置換 π が得られる.

例 2 (J-図形から完全置換).



J-図形は完全置換と一対一に対応することが知られている [21].

J-図形から $\hat{A}$ 行列を構成する方法を説明する. そのために次のような M 次正方行列を考える:

$$\phi_i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

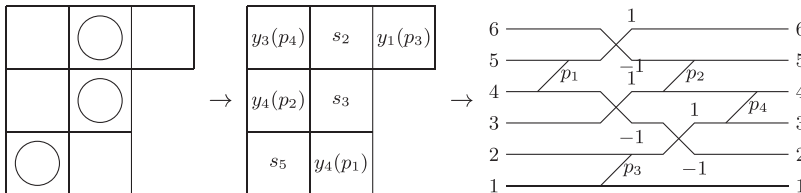
この行列は M 次単位行列の第 $(M-i, M-i)$, $(M-i, M-i+1)$, $(M-i+1, M-i)$, $(M-i+1, M-i+1)$ 成分をそれぞれ a , b , c , d に置き換えたものである. この行列によって次の 3 つの行列を定め, ネットワークと対応させる:

$$\begin{aligned} x_i(p) &= \phi_i \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{ccc} i+1 & \xrightarrow{p} & i+1 \\ & \diagdown & \\ i & & i \end{array}, \\ y_i(p) &= \phi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{ccc} i+1 & \xleftarrow{p} & i+1 \\ & \diagup & \\ i & & i \end{array}, \\ s_i &= \phi_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{ccc} i+1 & \xrightarrow{1} & i+1 \\ & \diagdown & \\ i & & i \\ & \diagup & \\ & -1 & \end{array}. \end{aligned}$$

これらを用いて次の手順で J-図形からネットワークが構成できる.

1. $\bigcirc \rightarrow s_i$, $\square \rightarrow y_i(p_j)$ と置き換える. この時, 添え字 i は一番右上は 1, 右または上に箱がある場合はその添え字 +1 とする.
2. 1 番下の行から, 同じ行の中では 1 番右から順に対応するネットワークを左詰めで並べていく.

例 3 (J-図形からネットワーク).

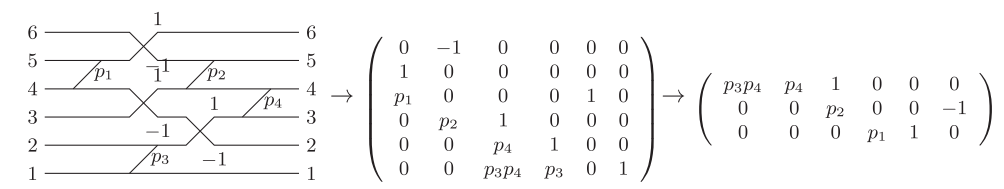


ネットワークの左側の添え字から右側の添え字への経路が存在する場合、経路の重み（何も書かれていない場合は1）の積をその経路全体の重みとする．先の手順で得られたネットワークの左側の添え字 i から右側の添え字 j への全ての経路の重みの和（経路が存在しない場合は0）を第 $(M-i+1, M-j+1)$ 成分とする M 次正方行列 A について、

$$\hat{A} = \tilde{P}_N(A_{\{1,2,\dots,N\}})^\top \tilde{P}_M,$$
$$\tilde{P}_n = (\delta_{i,n+1-j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が対応する係数行列 $\hat{A}$ である．各パラメータ p_j が正の時、得られる $\hat{A}$ 行列は irreducible かつ TNN になる [21].

例 4 (ネットワークから $\hat{A}$ 行列).



が得られ、 $\tau = |\hat{A}E|$ に対応するソリトングラフは図 4 のようになる．



図 4: $\text{Gr}(3, 6)$ のソリトンの例

例 5 (完全置換の分類と $\hat{A}$ 行列). $\pi(l) > l$ となる要素の数が 2 個である 4 次の完全置換と対応する $\hat{A}$ 行列は次の 7 種類である．

表 1: $\text{Gr}(2, 4)$ に対応する完全置換の分類

完全置換	J-図形	ネットワーク	$\hat{A}$ 行列
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} p_3 p_4 & p_1 + p_4 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 p_2 & p_2 & 1 \end{pmatrix}$
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} p_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 p_2 & p_2 & 1 \end{pmatrix}$
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 p_2 & p_2 & 1 \end{pmatrix}$
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} p_2 p_3 & p_3 & 0 & -1 \\ 0 & p_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & p_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} p_2 p_3 & p_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 1 \end{pmatrix}$
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} p_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 1 \end{pmatrix}$

3 結合型 KP 方程式のロンスキ型パフィアン解とソリトン相互作用

結合型 KP 方程式 (2) は従属変数変換

$$\begin{cases} u = 2(\log \tau^{(n)})_{xx} \\ v^{\pm} = \tau^{(n \pm 1)} / \tau^{(n)} \end{cases}$$

によって双線形形式

$$\begin{cases} (-4D_x D_t + D_x^4 + 3D_y^2) \tau^{(n)} \cdot \tau^{(n)} = 24 \tau^{(n+1)} \tau^{(n-1)} \\ (2D_t + D_x^3 - 3D_x D_y) \tau^{(n+1)} \cdot \tau^{(n)} = 0 \\ (2D_t + D_x^3 + 3D_x D_y) \tau^{(n-1)} \cdot \tau^{(n)} = 0 \end{cases}$$

に変形される。この双線形形式はロンスキ型パフィアン解

$$\begin{aligned} \tau^{(n)} &= (1, 2, \dots, 2n), \\ \frac{\partial}{\partial t_l} (i, j) &= (i + l, j) + (i, j + l) \quad (t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t) \end{aligned} \quad (6)$$

を持つ．特に分散関係式 (6) を満たすものとして

$$\begin{aligned}\tau^{(n)} &= \text{Pf}[\mathcal{E}_n B \mathcal{E}_n^\top], \\ \mathcal{E}_n &= \begin{pmatrix} e^{\theta_M} & e^{\theta_{M-1}} & \cdots & e^{\theta_1} \\ k_M e^{\theta_M} & k_{M-1} e^{\theta_{M-1}} & \cdots & k_1 e^{\theta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_M^{2n-1} e^{\theta_M} & k_{M-1}^{2n-1} e^{\theta_{M-1}} & \cdots & k_1^{2n-1} e^{\theta_1} \end{pmatrix}, \\ \theta_i &= k_i x + k_i^2 y + k_i^3 t\end{aligned}$$

を選ぶとこれはソリトン解になる．ただし， B は M 次反対称行列である．この時， τ 関数は石川・若山のパフィアンの和公式によって

$$\begin{aligned}\tau^{(n)} &= \text{Pf}[\mathcal{E}_n B \mathcal{E}_n^\top] \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{2n} \leq M} |(\mathcal{E}_n)_{\{i_1, \dots, i_{2n}\}}| \text{Pf} \left[B_{\{i_1, \dots, i_{2n}\}}^{\{i_1, \dots, i_{2n}\}} \right] \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{2n} \leq M} \text{Pf} \left[B_{\{i_1, \dots, i_{2n}\}}^{\{i_1, \dots, i_{2n}\}} \right] \left(\prod_{1 \leq \mu < \nu \leq 2n} (k_{i_{M-\nu+1}} - k_{i_{M-\mu+1}}) \right) e^{\theta_{M-i_1+1} + \cdots + \theta_{M-i_{2n}+1}}\end{aligned}$$

と展開される．

例 6.

$$\begin{aligned}\tau^{(1)} &= \text{Pf} \left[\begin{pmatrix} e^{\theta_4} & e^{\theta_3} & e^{\theta_2} & e^{\theta_1} \\ k_4 e^{\theta_4} & k_3 e^{\theta_3} & k_2 e^{\theta_2} & k_1 e^{\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_4} & k_4 e^{\theta_4} \\ e^{\theta_3} & k_3 e^{\theta_3} \\ e^{\theta_2} & k_2 e^{\theta_2} \\ e^{\theta_1} & k_1 e^{\theta_1} \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{Pf} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \det \left[\begin{pmatrix} e^{\theta_4} & e^{\theta_2} \\ k_4 e^{\theta_4} & k_2 e^{\theta_2} \end{pmatrix} \right] + \text{Pf} \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right] \det \left[\begin{pmatrix} e^{\theta_4} & e^{\theta_1} \\ k_4 e^{\theta_4} & k_1 e^{\theta_1} \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \text{Pf} \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right] \det \left[\begin{pmatrix} e^{\theta_3} & e^{\theta_2} \\ k_3 e^{\theta_3} & k_3 e^{\theta_2} \end{pmatrix} \right] + \text{Pf} \left[\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \right] \det \left[\begin{pmatrix} e^{\theta_3} & e^{\theta_1} \\ k_3 e^{\theta_3} & k_1 e^{\theta_1} \end{pmatrix} \right] \\ &= (k_2 - k_4) e^{\theta_2 + \theta_4} + 3(k_1 - k_4) e^{\theta_1 + \theta_4} + 2(k_2 - k_3) e^{\theta_2 + \theta_3} + 6(k_1 - k_3) e^{\theta_1 + \theta_3}\end{aligned}$$

波数 k_j に大小関係

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_M$$

を課すと $\prod_{1 \leq \mu < \nu \leq 2n} (k_{i_{M-\nu+1}} - k_{i_{M-\mu+1}})$ は全て同符号になるので， B 行列の全ての $2n$ 次主小行列のパフィアンが非負であれば τ 関数は零点を持たない．つまり，そのような条件を満たす B 行列を分類することで結合型 KP 方程式のソリトン相互作用が分類できる．

定義 2 (パフィアン)．パフィアンは $(i, j) = -(j, i)$ を用いて次のように定義される：

$$(1, 2, \dots, 2N) = \sum_{i=2}^{2N} (-1)^i (1, i) (2, \dots, i-1, i+1, \dots, 2N).$$

特に $(i, j) = a_{i,j}$ の時, $2N$ 次反対称行列 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2N}$ に対して

$$\text{Pf}[A] := (1, 2, \dots, 2N)$$

と定め, これを $\text{Pf}[A]$ と表記する.

例 7 (反対称行列のパフィアン).

$$\begin{aligned} \text{Pf} \left[\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} \\ -a_{1,2} & 0 \end{pmatrix} \right] &= a_{1,2}, \\ \text{Pf} \left[\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ -a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ -a_{1,3} & -a_{2,3} & 0 & a_{3,4} \\ -a_{1,4} & -a_{2,4} & -a_{3,4} & 0 \end{pmatrix} \right] &= a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3} \end{aligned}$$

公式 2 (石川・若山のパフィアンの和公式). $2n \times m$ 行列 A ($m \geq 2n$) と m 次反対称行列 B に対して

$$\text{Pf}[ABA^\top] = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{2n} \leq m} \text{Pf}[B_{\{i_1, \dots, i_{2n}\}}] \det[A_{\{i_1, \dots, i_{2n}\}}]$$

が成り立つ.

B 行列を分類するために, KP 方程式のソリトン相互作用の分類理論で現れた $x_i(p_j)$, $y_i(p_j)$, s_i を用いて

$$A^{-1}B(A^{-1})^\top = J \Leftrightarrow B = AJA^\top,$$

A = “適当な $x_i(p_j)$, $y_i(p_j)$, s_i の積”,

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & q_1 & & & \\ -q_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & q_l \\ O & & & -q_l & 0 \\ \hline & & O & & O \end{array} \right),$$

$$\text{rank} J = 2l,$$

$$\det B = \prod_{\mu=1}^l q_\mu^2$$

と変形する操作 (標準化) を提案する. B 行列を標準化してから石川・若山のパフィアンの和公

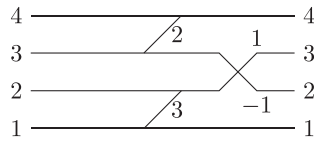
式を適用して τ 関数を展開することを考える．例えば例 6 の場合， B 行列は

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = y_3(2)y_1(3)s_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (y_3(2)y_1(3)s_2)^\top \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top \\
 &=: AJA^\top
 \end{aligned}$$

と標準化される．この時， J 行列の 2×2 反対称小行列ブロックの個数 $l = 1$ が τ 関数の添え字 $n = 1$ に等しいので，

$$\begin{aligned}
 \tau^{(1)} &= \text{Pf}[\mathcal{E}_1 B \mathcal{E}_1^\top] \\
 &= \text{Pf}[(\mathcal{E}_1 A) J (\mathcal{E}_1 A)^\top] \\
 &= \text{Pf} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \det \left[\left\{ \begin{pmatrix} e^{\theta_4} & e^{\theta_3} & e^{\theta_2} & e^{\theta_1} \\ k_4 e^{\theta_4} & k_3 e^{\theta_3} & k_2 e^{\theta_2} & k_1 e^{\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{\{1,2\}} \right] \right] \\
 &= \det \left[\begin{pmatrix} e^{\theta_4} & e^{\theta_3} & e^{\theta_2} & e^{\theta_1} \\ k_4 e^{\theta_4} & k_3 e^{\theta_3} & k_2 e^{\theta_2} & k_1 e^{\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \\
 &\simeq \det \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & k_1 e^{\theta_1} \\ e^{\theta_2} & k_2 e^{\theta_2} \\ e^{\theta_3} & k_3 e^{\theta_3} \\ e^{\theta_4} & k_4 e^{\theta_4} \end{pmatrix} \right]
 \end{aligned}$$

としてロンスキアン表示できる．またこの時，標準化に用いた $A = y_3(2)y_1(3)s_2$ をネットワーク表示すると



となり，例 5 で現れるネットワークに一致する．このソリトン解は図 5 のような相互作用を示す．

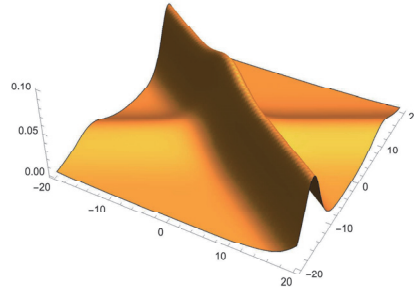


図 5: ソリトン解の例

一般に次のことが示せる.

主結果 1 (結合型 KP 方程式のソリトン解の分類). $\tau^{(n)} = \text{Pf}[\mathcal{E}_n B \mathcal{E}_n^\top]$ の B 行列を標準化した時, J 行列の 2×2 反対称小行列ブロックの個数 l によって次のように解を大別できる.

- 結合型 KP 方程式特有の解 ($l > n$)
- KP 方程式の解 ($l = n$)
- 自明解 $\tau^{(n)} = 0$ ($l < n$)

特に結合型 KP 方程式の解が KP 方程式の解にもなっている時, 適切に標準化を行うことで標準化の定めるネットワークが KP 方程式のソリトン相互作用の分類理論で現れるネットワークと完全に一致する.

証明. B 行列の標準化に用いた

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,M} \end{pmatrix}$$

に対して

$$\hat{A} := \tilde{P}_{2n}(A_{\{1,2,\dots,2n\}})^\top \tilde{P}_M = \begin{pmatrix} a_{M,2n} & \cdots & a_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & \cdots & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

とする. この表示を用いるとロンスキ型パフィアン解は

$$\begin{aligned} \tau^{(n)} &= \text{Pf}(\mathcal{E}_n B \mathcal{E}_n^\top) \\ &= \text{Pf}\left((\mathcal{E}_n A) J (\mathcal{E}_n A)^\top\right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{2n} \leq M} \det((\mathcal{E}_n A)_{\{i_1, \dots, i_{2n}\}}) \text{Pf}(J_{\{i_1, \dots, i_{2n}\}}^{\{i_1, \dots, i_{2n}\}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det ((\mathcal{E}_n A)_{\{1,2,\dots,2n\}}) \\
&= \det (\mathcal{E}_n A_{\{1,2,\dots,2n\}}) \\
&= \det \left((A_{\{1,2,\dots,2n\}})^\top (\mathcal{E}_n)^\top \right) \\
&\simeq \det \left(\tilde{P}_{2n} (A_{\{1,2,\dots,2n\}})^\top (\tilde{P}_M)^2 (\mathcal{E}_n)^\top \right) \\
&= \det(\hat{A}E) \quad (E = \tilde{P}_M(\mathcal{E}_n)^\top)
\end{aligned}$$

としてロンスキアン表示できる。 □

結合型 KP 方程式特有のソリトン解としては以下のようなものが存在する。

例 8 (波数 k の値によって向きが変わる Y 字の解). 係数行列を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

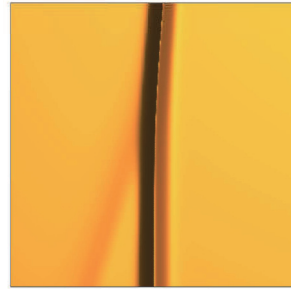
とした

$$\tau^{(1)} \simeq (k_2 - k_1)e^{\theta_1 + \theta_2} + (k_3 - k_1)e^{\theta_1 + \theta_3} + (k_4 - k_3)e^{\theta_3 + \theta_4}$$

について波数 $k_1 = -1, k_2 = -0.5, k_3 = 0.8, k_4 = 1$ に対応するソリトングラフは図 6a のような Y 字の解になり, 波数 $k_1 = -1, k_2 = -0.5, k_3 = 0.2, k_4 = 1$ に対応するソリトングラフは図 6b のような Y 字の解になる. KP 方程式のソリトン解は係数行列 A を決定してしまえば波数 k の値を変化させても y が十分大きい領域や小さい領域で現れる漸近ソリトンの本数は変化しないが, このソリトン解は同じ係数行列 B でも波数 k の値によって y が十分大きい領域や小さい領域で現れる漸近ソリトンの本数が変化する例になっている。



(a) 上に 2 本の Y 字



(b) 上に 1 本の Y 字

図 6: 波数 k の値によって向きが変わる Y 字の解

例 9 (同じような初期値から異なる振る舞いをする解). 波数 $k_1 = -0.6, k_2 = -0.2, k_3 = 0.2,$

$k_4 = 0.6$ について、係数行列を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -b & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とした

$$\tau^{(1)} \approx 0.4e^{\theta_1+\theta_2} + 0.8be^{\theta_1+\theta_3} + 1.2e^{\theta_1+\theta_4} + 0.4e^{\theta_2+\theta_3} + 0.4e^{\theta_3+\theta_4}$$

のソリトングラフを考える．この解は t が十分小さい時は τ 関数の第 2 項は波形にほとんど寄与せず， b の値を変化させても図 7a, 8a, 9a のようにほぼ同じ波形を示す．特に B 行列の 2 次主小行列のパフィアンとして負のものが現れる $b = -1$ の場合でも $t = -100$ では発散する領域を持たない．このソリトン解の時間発展は， $b = 0$ の時は図 7 のように時刻によらず X 字になり， $b = 1$ の時は図 8 のように時間経過によって相互作用部分に穴があき， $b = -1$ の時は図 9 のように時間経過によって発散する領域が現れる．KP 方程式の場合は複数のソリトン解のある時刻での大まかな波形が同じであればその後も同じような相互作用を示すが，結合型 KP 方程式の場合はこの例のようにほぼ同じ初期波形でも初期値のわずかな違いによってその後の相互作用が大きく異なる場合がある．特に結合型 KP 方程式のソリトン解で負の $2n$ 次主小行列のパフィアンを持つ B 行列を与えることで初期に発散していなかった解が有限時刻で発散する解が得られ，このような振る舞いは KP 方程式では現れない．

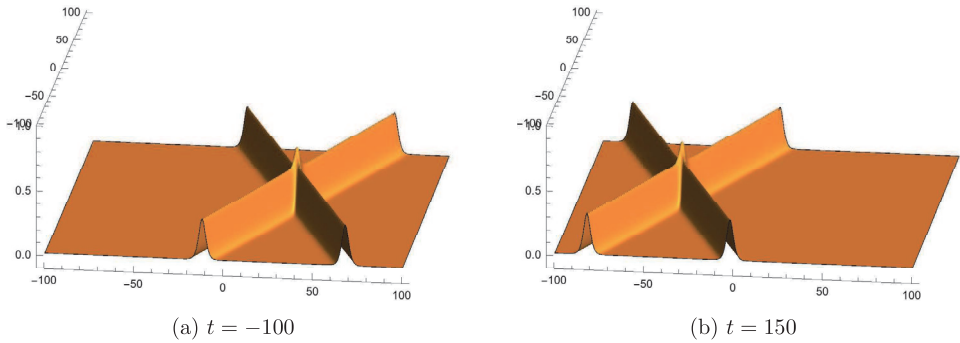


図 7: X 字の解

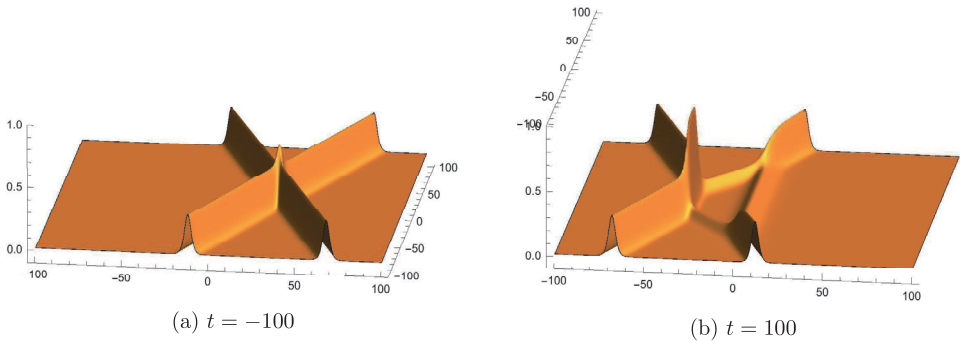


図 8: 途中から穴があく解

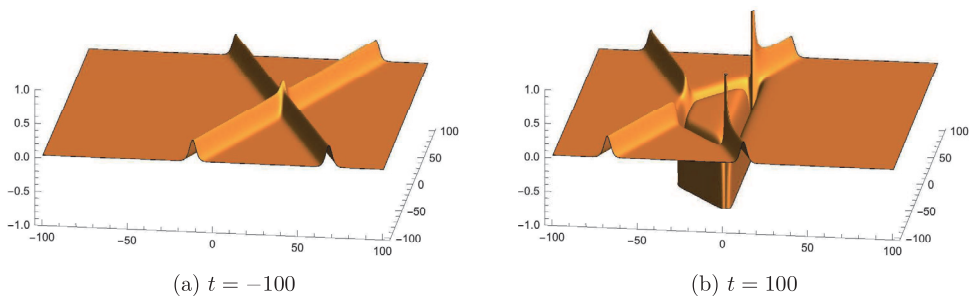


図 9: 途中から発散する解

4 まとめと今後の課題

本論文ではネットワークを用いた結合型 KP 方程式ソリトン解の分類手法を提案し、結合型 KP 方程式のソリトン相互作用について調べた。具体的には、結合型 KP 方程式のソリトン解のロンスキ型パフィアン表示について反対称行列の標準化という操作を考えることによって、その解が結合型 KP 方程式特有のものなのか、あるいは KP 方程式の解にもなっているかの判定が与えられた。特に結合型 KP 方程式のソリトン解が KP 方程式の解にもなっている場合、ロンスキ型パフィアン解のロンスキアン表示が得られ、ネットワークまで含めて KP ソリトン相互作用の分類理論と一致することがわかった。またこのことから、KP ソリトン相互作用の分類理論におけるネットワークは結合型 KP 方程式においては反対称パラメータ行列の標準化の手順を示すことがわかった。しかし、結合型 KP 方程式特有のソリトン解の中には例 8 や例 9 のような解が存在し、結合型 KP 方程式のソリトン相互作用の分類を困難にしている。このような解の振る舞いをより詳細に解析することが今後の課題である。

参考文献

- [1] J. Satsuma, 1976, J.Phys. Soc. Jpn. **40**, 286-290.
- [2] J. W. Miles, 1977, J. Fluid. Mech. **79**, 157-169.
- [3] J. W. Miles, 1977, J. Fluid. Mech. **79**, 171-179.
- [4] M. Oikawa, H. Tsuji, 2006, Fluid Dyn. Res. **38**, 868-898.
- [5] Y. Kodama, M. Oikawa, H. Tsuji, 2009, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 312001.
- [6] Y. Kodama, 2010, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 434004.
- [7] H. Yeh, W. Li, Y. Kodama, 2010, Eur. Phys. J. Special Topics **185**, 97-111.
- [8] W. Li, H. Yeh, Y. Kodama, 2011, J. Fluid. Mech. **672**, 326-357.
- [9] C. Kao, Y. Kodama, 2012, Math. Comput. Simul. **82**, 1185-1218
- [10] Y. Kodama, H. Yeh, 2016, J. Fluid Mech. **800**, 766-786.

- [11] J. Knowels, H. Yeh, 2019, J. Fluid. Mech. **861**, 517-523.
- [12] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2008, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 275209.
- [13] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2009, Stud. Appl. Math. **123**, 83-151.
- [14] Y. Kodama, L. K. Williams, 2011, PNAS. **108**, 8684-8989.
- [15] Y. Kodama, 2017, *KP Solitons and the Grassmanians – Combinatorics and Geometry of Two-Dimensinal Wave Patterns* (Springer, Singapore).
- [16] M. Jimbo, T. Miwa, 1983, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **19**, 943-1001.
- [17] R. Hirota, Y. Ohta, 1990, J. Phys. Soc. Jpn. **60**, 798-809.
- [18] S. Isojima, R. Willox, J. Satsuma, 2003, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 9533-9552.
- [19] G. Biondini, Y. Kodama, 2003, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 10519-10536.
- [20] Y. Kodama, K. Maruno, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 4063-4086.
- [21] A. Postnikov, 2006, arXiv:math/0609764.
- [22] 高崎金久, 2017, 線形代数とネットワーク (日本評論社, 東京).