

複数の母集団を持つ Two-armed Bandit Problem について

(両方の arm が未知の場合)

姫路短期大学 濱田年男 (Toshio Hamada)

1. 緒言

各期において m 個の条件 $C_1, C_2, \dots, C_m$ のいずれか 1 つが成立し、その条件のもとで 2 つの行動 a_1, a_2 のいずれかが実行可能であるとする。条件 C_i のもとで a_k ($k=1, 2$) をおこなったときに分布 $F(z | u_{ki})$ にしたがう観察値を得るものとする。ここで、パラメータ u_{ki} は未知であり、事前知識として共役事前分布 $G(u_{ki} | x_{ki})$ が与えられているものとする。また条件 C_i のもとで a_k を行って観察値 z を得たときの期待利得は $h(z)$ で与えられるものとする。また、ある期に条件 C_i が成立しているときに、次の期に条件 C_j が成立する確率は、選択した行動に無関係に p_{ij} であるとする。一期先の利得の割引率 β ($0 < \beta \leq 1$) 倍が利得の現在価値であるとする。目的は n 期間の期待割引総利得を最大にすることであり、そのためには各期においていずれの実験を行えばよいかを決定することである。

$m=1$ の場合は従来の two-armed bandit problem であり、多くの研究がなされてきている。たとえば、Bradt, Johnson and Karlin [2], Zacks [9], Kelley [6], Yakowitz [8], Berry [1], Jones [4], Kalin and Theodorescu [5], Hamada [3], Kolonko and Benzing [7], などがある。

$m \geq 2$ の場合の例として、ある町に転居してきた人が、次の日から毎朝、通勤のため家から駅まで行くものとする。選択できる行動として、バス停まで歩いてバスに乗り駅前で降りるのと、自転車で駅前まで行くという2通りの方法があるものとする。前者を a_1 、後者を a_2 とする。天候および道路の混雑している状態に依存して、所用時間が変わってくる。天候としては、 C_1 が晴れ、 C_2 が雨、 $\dots$ 、 C_m が雪、というように m 種類あるものとする。 C_i ($i=1, 2, \dots, m$) のとき a_k ($k=1, 2$) を用いたときの所用時間 z の分布が $F(z | u_{ki})$ であるとする。 u_{ki} の値は未知であり、近所の人からの情報等により事前知識が与えられているものとする。この人は毎朝天気を見ていずれの行動を選択するかを決定する。

2. 動的計画法による定式化

$x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m})$, $x_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m})$ とする。現在の条件が C_i で事前分布のパラメータが $(x_1, x_2) = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m})$ である状態を $(i; x_1, x_2)$ で表す。また $\Phi_{i2}x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, \phi_{2x_{1i}}, \dots, x_{1m})$, $\Phi_{i2}x_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, \phi_{2x_{2i}}, \dots, x_{2m})$ とする。さらに、 $R(x_{ki}) = E[h(Z) | x_{ki}]$ ($k=1, 2; i=1, 2, \dots, m$) とする。ここで次の3つの仮定を行う。

A_1 : 任意の $x_{ki} \in \Omega$ ($k=1, 2; i=1, 2, \dots, m$) に対して $R(x_{ki}) > 0$

A_2 : 任意の $x_{ki} \in \Omega$ ($k=1, 2; i=1, 2, \dots, m$) に対して

$$E[R(\phi_{2x_{ki}}) | x_{ki}] = R(x_{ki})$$

A_3 : 任意の $c > 0$, $k=1, 2, i=1, 2, \dots, m$ に対して $0 < R(x_{ki}) < c$ であるような

x_{ki} , および $c < R(x_{ki})$ であるような x_{ki} が存在する。

いま $V_n(i; x_1, x_2)$ は現在の状態が $(i; x_1, x_2)$ であり、残り n 期間ある時に以後最適政策を用いることにより得られる最大期待割引総利得とする。このとき、次のように定式化できる。 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$V_n(i; x_1, x_2) = \max \{V_n^1(i; x_1, x_2), V_n^2(i; x_1, x_2)\} \quad (1)$$

但し

$$V_0(i; x_1, x_2) = 0 \quad (2)$$

ここに

$$V_n^1(i; x_1, x_2) = E[h(Z) + \beta \sum_{j=1}^m p_{ij} V_{n-1}(j; \Phi_{iz} x_1, x_2) \mid x_{1i}] \quad (3)$$

$$V_n^2(i; x_1, x_2) = E[h(Z) + \beta \sum_{j=1}^m p_{ij} V_{n-1}(j; x_1, \Phi_{iz} x_2) \mid x_{2i}] \quad (4)$$

(3), (4) はそれぞれつぎのように書き直せる。

$$V_n^1(i; x_1, x_2) = R(x_{1i}) + \beta \sum_{j=1}^m p_{ij} E[V_{n-1}(j; \Phi_{iz} x_1, x_2) \mid x_{1i}] \quad (5)$$

$$V_n^2(i; x_1, x_2) = R(x_{2i}) + \beta \sum_{j=1}^m p_{ij} E[V_{n-1}(j; x_1, \Phi_{iz} x_2) \mid x_{2i}] \quad (6)$$

いま、 $V_n^1(i; x_1, x_2) \geq V_n^2(i; x_1, x_2)$ ならば a_1 が最適である。また $V_n^1(i; x_1, x_2) \leq V_n^2(i; x_1, x_2)$ ならば a_2 が最適である。さらにまた $V_n^1(i; x_1, x_2) = V_n^2(i; x_1, x_2)$ ならば a_1, a_2 ともに最適である。

$V_n(i; x_1, x_2)$, $V_n^1(i; x_1, x_2)$, $V_n^2(i; x_1, x_2)$ に対して次の性質が得られる。

[補題 1] $(x_1, x_2) \in \Omega^{2m}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $n \geq 1$ に対して、

$$(i) \quad E[V_n(i; \Phi_{iz} x_1, x_2) \mid x_{1i}] \geq V_n(i; x_1, x_2)$$

$$(ii) E[V_n(i; x_1, \Phi_{1,2} x_2) | x_{2,1}] \geq V_n(i; x_1, x_2).$$

[補題 2] $(x_1, x_2) \in \Omega^{2m}$, $1 \leq k \leq 2$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq 1$ に対して,

$$(i) V_n^k(i; x_1, x_2) \geq R(x_{k,1}) + \sum_{t=2}^n \beta^{t-1} \sum_{j=1}^m p\{j^{-1}\} \{R(x_{1,j}) \vee R(x_{2,j})\}$$

$$(ii) V_n(i; x_1, x_2) \geq \sum_{t=1}^n \beta^{t-1} \sum_{j=1}^m p\{j^{-1}\} \{R(x_{1,j}) \vee R(x_{2,j})\}.$$

[補題 3] $(x_1, x_2) \in \Omega^{2m}$, $1 \leq k \leq 2$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq 1$ に対して,

$$(i) V_n^k(i; x_1, x_2) \leq R(x_{k,1}) + \sum_{t=2}^n \beta^{t-1} \sum_{j=1}^m p\{j^{-1}\} \{R(x_{1,j}) + R(x_{2,j})\}$$

$$(ii) V_n(i; x_1, x_2) \leq \sum_{t=1}^n \beta^{t-1} \sum_{j=1}^m p\{j^{-1}\} \{R(x_{1,j}) + R(x_{2,j})\}.$$

[補題 4] $(x_1, x_2) \in \Omega^{2m}$, $1 \leq k \leq 2$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq 1$ に対して,

$$(i) \sum_{t=1}^n \beta^{t-1} \sum_{j=1}^m p\{j^{-1}\} R(x_{1,j}) < R(x_{2,1}) \text{ ならば } V_n^1(i; x_1, x_2) < V_n^2(i; x_1, x_2)$$

$$(ii) \sum_{t=1}^n \beta^{t-1} \sum_{j=1}^m p\{j^{-1}\} R(x_{2,j}) < R(x_{1,1}) \text{ ならば } V_n^1(i; x_1, x_2) > V_n^2(i; x_1, x_2).$$

いま, $\Xi = \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \cdots \times \{1, 2\}$ とし, s を m 次元行ベクトルとする. また,

$V_n^1(i; x_1, x_2) \geq V_n^2(i; x_1, x_2)$ ならば $\delta_n(i; x_1, x_2) = 1$, $V_n^1(i; x_1, x_2) < V_n^2(i; x_1, x_2)$ なら

ば $\delta_n(i; x_1, x_2) = 2$ とする. さらに, $Q_n(s) = \{(x_1, x_2) \mid s = (s_1, s_2, \dots, s_m),$

$\delta_n(i; x_1, x_2) = s_i, 1 \leq i \leq m\}$ とする.

[定理 1] 任意の $s \in \Xi$, $n \geq 1$ に対して $Q_n(s) \neq \emptyset$ である.

3. 最大期待割引総利得の分割

[補題 5] $(x_1, x_2) \in \Omega^{2m}$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq 1$ に対して, $V_n(i; x_1, x_2)$ は次のように分割

される.

$$V_n(i; x_1, x_2) = \sum_{j=1}^m W_n(i; j; x_{1j}, x_{2j})$$

ここに $W_n(i; j; x_{1j}, x_{2j})$ は次のように再帰的に定義される.

$$W_n(i; i; x_{1i}, x_{2i}) = \max \left\{ R(x_{1i}) + \beta \sum_{s=1}^m p_{is} E[W_{n-1}(s; i; \phi_z x_{1i}, x_{2i}) | x_{1i}], \right. \\ \left. R(x_{2i}) + \beta \sum_{s=1}^m p_{is} E[W_{n-1}(s; i; x_{1i}, \phi_z x_{2i}) | x_{2i}] \right\}$$

および $j \neq i$ に対して

$$W_n(i; j; x_{1j}, x_{2j}) = \beta \sum_{s=1}^m p_{is} W_{n-1}(s; j; x_{1j}, x_{2j}). \quad (7)$$

いま,

$$W_n^1(i; i; x_{1i}, x_{2i}) = R(x_{1i}) + \beta \sum_{s=1}^m p_{is} E[W_{n-1}(s; i; \phi_z x_{1i}, x_{2i}) | x_{1i}], \quad (8)$$

$$W_n^2(i; i; x_{1i}, x_{2i}) = R(x_{2i}) + \beta \sum_{s=1}^m p_{is} E[W_{n-1}(s; i; x_{1i}, \phi_z x_{2i}) | x_{2i}]. \quad (9)$$

とおくと, 次の補題が成立する.

[補題 6] $(x_1, x_2) \in \Omega^{2m}$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq 1$ に対して,

$$V_n^1(i; x_1, x_2) - V_n^2(i; x_1, x_2) = W_n^1(i; i; x_{1i}, x_{2i}) - W_n^2(i; i; x_{1i}, x_{2i})$$

この補題により, $V_n^1(i; x_1, x_2) - V_n^2(i; x_1, x_2)$ の符号を調べる代わりに,

$W_n^1(i; i; x_{1i}, x_{2i}) - W_n^2(i; i; x_{1i}, x_{2i})$ の符号を調べれば十分であることがわかる.

4. 最適政策

いま, $f(t)$ は条件 C_i が成立してから t 期後に初めて条件 C_i が再び成立する確率を

表すものとする。このとき、次の補題が成立する。

[補題 7] $1 \leq i \leq m$, $(x_{1i}, x_{2i}) \in \Omega^2$, $n \geq 1$ に対して,

$$(i) \quad W_n^1(i; i; x_{1i}, x_{2i}) = R(x_{1i}) + \sum_{t=2}^n \beta^{t-1} f\{\beta^{t-1}\} E[W_{n-t+1}(i; i; \phi_z x_{1i}, x_{2i}) | x_{1i}]$$

$$(ii) \quad W_n^2(i; i; x_{1i}, x_{2i}) = R(x_{2i}) + \sum_{t=2}^n \beta^{t-1} f\{\beta^{t-1}\} E[W_{n-t+1}(i; i; x_{1i}, \phi_z x_{2i}) | x_{2i}].$$

いま,

$$D_n(i; x_1, x_2) = W_n^1(i; i; x_{1i}, x_{2i}) - W_n^2(i; i; x_{1i}, x_{2i})$$

とおくと, $D_n(i; x_{1i}, x_{2i}) \geq 0$ ならば a_1 が最適であり, $D_n(i; x_{1i}, x_{2i}) \leq 0$ ならば a_2

が最適であり, $D_n(i; x_{1i}, x_{2i}) = 0$ ならば a_1, a_2 ともに最適である。いま

$$D_n^+(i; x_{1i}, x_{2i}) = \max\{D_n(i; x_{1i}, x_{2i}), 0\}$$

$$D_n^-(i; x_{1i}, x_{2i}) = \min\{D_n(i; x_{1i}, x_{2i}), 0\}$$

とおくと

$$W_n^1(i; i; x_1, x_2) = W_n(i; i; x_{1i}, x_{2i}) + D_n^-(i; x_{1i}, x_{2i}) \quad (10)$$

$$W_n^2(i; i; x_1, x_2) = W_n(i; i; x_{1i}, x_{2i}) - D_n^+(i; x_{1i}, x_{2i}) \quad (11)$$

[補題 8] $1 \leq i \leq m$, $(x_{1i}, x_{2i}) \in \Omega^2$, $n \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} D_n(i; x_{1i}, x_{2i}) = & \{R(x_{1i}) - R(x_{2i})\} \left\{1 - \sum_{t=2}^n \beta^{t-1} f\{\beta^{t-1}\}\right\} \\ & + \sum_{t=2}^n \beta^{t-1} f\{\beta^{t-1}\} \{E[D_{n-t+1}^+(i; i; \phi_z x_{1i}, x_{2i}) | x_{1i}] \\ & + E[D_{n-t+1}^-(i; i; x_{1i}, \phi_z x_{2i}) | x_{2i}]\}. \end{aligned}$$

[補題 9] $1 \leq i \leq m$, $(x_{1i}, x_{2i}) \in \Omega^2$, $n \geq 1$ に対して,

$$R(x_{1i}) - c_n R(x_{2i}) \leq D_n(i; x_{1i}, x_{2i}) \leq c_n R(x_{1i}) - R(x_{2i})$$

ここに c_n は 1 以上の正の定数であり, 次のように再帰的に定義される.

$$c_1 = 1$$

であり, $n \geq 2$ に対して,

$$c_n = 1 + \sum_{t=2}^n \beta^{t-1} f\left(\frac{1}{t-1}\right) (2c_{n-t+1} - 1)$$

である.

[定理 2] $1 \leq i \leq m$, $(x_{1i}, x_{2i}) \in \Omega^2$, $n \geq 1$ に対して,

$$(i) \quad R(x_{1i}) > c_n R(x_{2i}) \text{ ならば } D_n(i; x_{1i}, x_{2i}) > 0$$

$$(ii) \quad R(x_{1i}) < c_n^{-1} R(x_{2i}) \text{ ならば } D_n(i; x_{1i}, x_{2i}) < 0.$$

この定理により, 現在の状態が $(i; x_1, x_2)$ であり, 残り期間が n のときに, もし $R(x_{1i})/R(x_{2i}) > c_n$ ならば a_1 が最適であり, またもし $R(x_{1i})/R(x_{2i}) < c_n^{-1}$ ならば a_2 が最適である. しかし $c_n^{-1} \leq R(x_{1i})/R(x_{2i}) \leq c_n$ のときには, a_1, a_2 のいずれが最適であるかはわからない.

参考文献

- [1] Berry, D. A. (1972). A Bernoulli two-armed bandit. Ann. Math. Statist. 43, 871-897.
- [2] Bradt, R. N., Johnson, S. M. and Karlin, S. (1956). On sequential designs for maximizing the sum of n observations. Ann. Math. Statist.

- 27, 1060-1074.
- [3] Hamada, T. (1984). On a uniform two-armed bandit problem. J. Japan Statist. Soc. 14, 179-197.
- [4] Jones, P. (1976). Some results for the two-armed bandit problem. Math. Operationsforsch. u. Statist. 7, 471-475.
- [5] Kalin, D. and Theodorescu, R. (1982). A note on structural properties of the Bernoulli two-armed bandit problem. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization 13, 469-472.
- [6] Kelley, T. A. (1974). A note on the Bernoulli two-armed bandit problem. Ann. Statist. 2, 1056-1062.
- [7] Kolonko, M. and Benzing, H. (1985) On monotone optimal decision rules and stay-on-a-winner rule for the two-armed bandit. Metrika 32, 395-407.
- [8] Yakowitz, S. J. (1969). Mathematics of Adaptive Control Processes. American Elsevier Publishing Co., New York.
- [9] Zacks, S. (1967). Bayes sequential strategies for crossing a field containing absorption points. Naval Res. Logist. Quart. 14, 329-343.