

Thom Boardman Singularity の細分 と extensibility

北大 理 安藤良文

§0 紹介

$J^{(k)}(n, p)$ の部分集合の integrability を調べるために、最近 Andrew du plessis が $J^{(k)}(n, p)$ の open set に extensibility なる概念を導入した。そして $J^{(k)}(n, p)$ の open set $\Omega^I = \bigcup_{K \leq I} \Sigma^K$ の extensibility を調べた。一般に Ω^I は extensible ではない。ここでは $J^{(k)}(n, p)$ の中にその概念に対応する多様体分割を入れることを目標とする。既に $J^{(k)}(n, p)$ の Ω^I は Zariski open set である。そこで $\hat{\cdot} : J^{(k)}(n+1, p) \rightarrow J^{(k)}(n, p)$ により $\hat{\cdot}(\Omega^I)$ を考えると、これは Zariski open である。 $\hat{\cdot}(\Omega^I)$ の complement が代数的集合であり、この集合が上の細分の下に多様体の和となるようなものを考える。これは一般論としては、H. Whitney の理論から可能である。しかし具体的な分割方法を

求めるには適当ではない。

§ 1 で $J^{(2)}(n, p)$ の元 f に対して a -Jacobian extension $S_a J\{f\}$, $a \in \mathbb{R}^p$ を定義する。

$\Sigma^{i, r}(c, t) \subset J^{(2)}(n, p)$ を以下のように定義する。

$$f \in \Sigma^{i, r}(c, t)$$

$$i) \quad f \in \Sigma^{i, r}$$

ii) $\dim S_a J\{f\} \leq t$ で適当な $a \in \mathbb{R}^p$ に対して等号が成立する。 $U = \{a \in \mathbb{R}^p \mid \dim S_a J\{f\} = t\}$

iii) $\bigcap_{U \ni a} S_a J\{f\} / J\{f\}$ の次元が c である。

定理 $p-n+i \leq 2$ ならば $\Sigma^{i, r}(c, t)$ は locally Zariski closed non singular mfd である。

系 $p=2$ の場合には目的の結果が得られた。即ち $\hat{\mathcal{C}}(\Omega^F)$ を $\Sigma^{i, r}(c, t)$ の言葉で述べることが出来る。

予想 $\Sigma^{i, r}(c, t, s)$ を i) ii), iii) の他に次をみたす。

$$iv) \quad \min_{a \in U} \dim \{ S_a J\{f\} / J\{f\} \} = c$$

$$\Rightarrow \Sigma^{i, r}(c, t, s) \text{ は non singular}$$

特に $t+s=n$ の場合には 0, k, $p-n+i \leq 2$ の場合には $t=s$ である。

§ 1 Thom-Boardmann Singularity

$J^2(n, p)$ の Thom-Boardmann Singularity Σ^k の詳しい事柄は Mather [] を見ることにする。

$J^2(n, p)$ の元 f を p 個の 2 次の多項式の集合として、
 $f = (f_1, \dots, f_p)$ と表す。

m_e を定数項のない多項式環の中の極大イデアルとする。
 $\mathcal{J}\{f_1, \dots, f_p\}$ を $f_1, \dots, f_p$ で生成される m_e/m_e^2 の中のイデアルを表す。 rk によって m_e/m_e^2 の module の次元を表す。

定義 $J^2(n, p)$ の中の $M^{i,j}(n, p)$ を次のように定義する。

$f = (f_1, \dots, f_p) \in M^{i,j}(n, p) \iff$ 次の ① と ② が成立する。

$$\textcircled{1} \quad rk \mathcal{J}\{f_1, \dots, f_p\} \leq n - i$$

$$\textcircled{2} \quad rk \delta \mathcal{J}\{f_1, \dots, f_p\} \leq n - j$$

ここで δ はイデアル $\mathcal{J}$ の Jacobian extension である。

補題 $M^{i,j}(n, p) = \bigcup_{K \geq I} \Sigma^K, \quad I = (i, j)$

($K = (k_1, k_2)$ の順序 ($\geq$) は辞書式順序である。)

証明 Σ^K の定義の仕方により、 $\Sigma^K \ni f$ であることが、次の i) と ii) が成立することと同値であるから。

$$i) \quad rk \mathcal{J}\{f_1, \dots, f_p\} = n - k_1$$

$$ii) \operatorname{rk} \{f_1, \dots, f_p\} = n - k_2$$

定義 $\tilde{\cdot} : J^2(n+1, p) \rightarrow J^2(n, p)$ を $J^2(n+1, p)$ の元 $\tilde{f}$ の $(n+1)$ 番目の座標を 0 にする写像とする。

$$i.e. \quad x = (x_1, \dots, x_n) \text{ として}$$

$$(\tilde{\cdot} \circ f)(x) = \tilde{f}(x, 0) = f(x)$$

この節の目的は、代数的集合 $J^2(n, p) - \tilde{\cdot}(M^{i,j}(n+1, p)^c)$ を定義する多項式を記述して、①と②を比較すると、

$$J^2(n, p) - \tilde{\cdot}(M^{i,j}(n+1, p)^c) \cong M^{i,j}(n, p)$$

が知られる。そこで等号が成立するための条件 (Plessie の定理の一部) と成立しない場合の調査をする準備。

$\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p)$ を次のように表わす。

$$\tilde{f}_i(x, x_{n+1}) = \sum_{j=1}^n a_j^i x_j + a_{n+1}^i x_{n+1} + \sum_{s,t \leq n+1} b_{s,t}^i x_s x_t \quad (i=1, \dots, p)$$

$f \in J^2(n, p) - \tilde{\cdot}(M^{i,j}(n+1, p)^c)$ であるための条件は、次の通りである。

$\tilde{\cdot}(\tilde{f}) = f$ となる $\tilde{f}$ に対して、常に $\tilde{f} \in M^{i,j}(n+1, p)$ 即ち、①, ②の条件を書き直して次が成立。

$$\textcircled{1} \quad \operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_1^i & \dots & a_n^i & a^{i'} \\ a_1^p & \dots & a_n^p & a^{p'} \end{pmatrix} \leq n+1-i$$

✕

② $D(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p) / D(x_1, \dots, x_{n+1})$ の $(n-i+2)$ 次小行列式達によって生成される m_e/m_e^2 の ideal を $\mathcal{J}'$ とすると

$$\text{rk} [\mathcal{J} \{ \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p \} + \mathcal{J}'] \leq n+1-j$$

②の条件は次のように言い換えられる。(証明略)

②' $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & a' \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} & a^p \end{pmatrix}$ の $(n-i+2)$ 次の小行列式達から生成されるイデアルを $\Delta_{n-i+2}\mathcal{J}$ と書く。

$$\text{rk} [\mathcal{J} \{ f_1, \dots, f_p \} + \Delta_{n-i+2}\mathcal{J}] \leq n-j'$$

簡単のために $\mathcal{J} \mathcal{J} \{ f'_1, \dots, f'_p \} = \mathcal{J} \{ f'_1, \dots, f'_p \} + \Delta\mathcal{J}$ と定義して置く。

注意 Thom-Boardmann Singularity の定義から $i \leq n+1-p$ である。又 $i = n+1-p$ ならば $M^{i,j} = J^2(n+1, p)$ 。そこで $i > n+1-p$ の場合だけを考え、④の条件は

$$\text{rk} \mathcal{J} \{ f'_1, \dots, f'_p \} \leq n-i$$

と同値である。

$$\text{系} \quad M^{i,j}(n, p) \subseteq J^2(n, p) - \hat{\cap} (M^{i,j}(n+1, p)^c)$$

証

i) $i = n+1-p$ の時は $M^{i,j}(n+1, p) = J^2(n+1, p)$

ii) $i > n+1-p$ の時、

もし $\exists A, h \ni g$, $A > i$ ならば、次の事柄から O.K.

$$\text{rk } \bigcup \{g_1, \dots, g_p\} = n - A < n - i$$

$$\text{rk } [\bigcup \{g_1, \dots, g_p\} + \delta_{n-i+1} \bigcup] = \text{rk } [\bigcup \{g_1, \dots, g_p\}]$$

もし $\exists i, h \ni g$, $j \leq h$ ならば、注意で述べた事柄と、一般に $\delta_a \bigcup \{g_1, \dots, g_p\} \subseteq \delta \bigcup \{g_1, \dots, g_p\}$ が成立することから

$$\text{rk } \delta_a \bigcup \{g_1, \dots, g_p\} \leq \text{rk } \delta \bigcup \{g_1, \dots, g_p\} = n - h \leq n - j'$$

(~~~~ の証)

$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} & q^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f^p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^p}{\partial x_n} & q^p \end{pmatrix}$ の $q^1 \dots q^p$ に関する小行列式は $D(f^1, \dots, f^p) / D(x_1, \dots, x_n)$ の $(n-i+1)$ 次の小行列の一次結合で書けるからである。

定理 (Plescia [J]) もし、 $j \geq n - p - \varepsilon$ ならば

$$J^2(n, p) - \widetilde{\tau}(M^{i,j}(n+1, p)^c) = M^{i,j}(n, p)$$

ここで $\varepsilon = 1$ ($i-j > 1$) , $\varepsilon = 0$ ($i-j \leq 1$)

注 補題より、 $\bigcup_{k \in I} \Sigma^k$ が *extensible*

(証明) $\hookrightarrow$ では上述の方法により、Intrinsic derivatives 使わない証明を与える。即ち、系中の証明より、条件①, ②から条件 ①' と ②' が言えるから、逆に ①' と ②' から ① と ② が上の条件の下に言えることを示す。

①と①' は同じ条件だから、

$$f \in \Xi^i \cap J^2(n, p) = \tilde{\gamma}(M^{i,j}(n+1, p)^c)$$

の元が $M^{i,j}(n, p)$ に含まれることを示せば良い。

そこで $(\mathbb{R}^n, 0)$, $(\mathbb{R}^p, 0)$ の座標を適当に取って

$$\begin{pmatrix} a'_1 & \cdots & a'_n \\ \vdots & & \vdots \\ a'_p & \cdots & a'_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right) = \text{rk } n-i$$

であるとする。次に ②' の条件を線型代数の言葉に書き直す。

$$B_{s,t}^j = (b_{s,t}^j + b_{t,i}^j)$$

$$B_t^j = (B_{1,t}^j, B_{2,t}^j, \dots, B_{n,t}^j)$$

$$B_t^j = (B_{n-i+1,t}^j, B_{n-i+2,t}^j, \dots, B_{n,t}^j)$$

で表わす。

$\Delta_{n-i+2} \{f^1, \dots, f^p\}$ は ②' の行列の形より

$$\begin{aligned} a^l \left(\sum_s B_{s,t}^j x_s \right) - a^j \left(\sum_s B_{s,t}^l x_s \right) \\ = \sum_s (a^l B_{s,t}^j - a^j B_{s,t}^l) x_s \end{aligned}$$

$$l \neq j, \quad n-i+1 \leq l, j \leq p, \quad n-i+1 \leq t \leq n$$

で生成される。

②' の条件

$$\text{rk } S_{ad}\{f^1, \dots, f^p\} \leq n-j$$

を書き直すと、

〃

$$\text{rk} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \circ & \cdots & \circ & & & \\ & & & 1 & & \circ \\ \hline & & \circ & & \circ & \\ \hline \end{array} \right) \leq n-j$$

この部分に次の行ベクトルを並べる
 $a^l B_t^j - a^j B_t^l$
 $l \neq j, n-i+1 \leq l, j \leq p, n-i+1 \leq t \leq n.$



$$\text{rk} \left(\begin{array}{c} a^l B_t^j - a^j B_t^l \\ l \neq j, n-i+1 \leq l, j \leq p, n-i+1 \leq t \leq n \end{array} \right) \leq (n-j) - (n-i) = i-j$$

$B^j (n-i+1 \leq j \leq p)$ を次の i 次の対称行列とみる。

$$\begin{pmatrix} B_{n-i+1, n-i+1}^j & \cdots & B_{n-i+1, n}^j \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n, n-i+1}^j & \cdots & B_{n, n}^j \end{pmatrix}$$

補題 条件②' は 次と同値である。

(*) すべての $(a^1, \dots, a^p)$ に対して 行より

$$(\dots, a^l B^j - a^j B^l, \dots) = B(a^1, \dots, a^p)$$

をつくると、その階数が $(i-j)$ 以下である。

注 (**) f が $M^{i,j}(n, p)$ の元であるための条件は、

$$\text{行より} \quad (B^{n-i+1}, \dots, B^p)$$

8

の階数が $(i-j)$ 以下である。故に問題は、(*)か(**)を言えば解決する。

容易に確かめられるように、 $a = (a^1, \dots, a^p)$ に対して、

行列 $X(a)$ が存在して、(或分は $a^1, \dots, a^p$ による。)

$$(\dots, a^l B^{i-l} - a^l B^l, \dots) = (B^{n-i+1}, \dots, B^p) X(a)$$

と書けるが、適当な $(B^{n-i+1}, \dots, B^p)$ に対して、(*)が成立するが、(**)が成立しないとする、 $\underbrace{(\mathbb{R}^i) \oplus \dots \oplus (\mathbb{R}^i)}_{p-n+i}$ の中

に $(i-j)$ より大きい次元の空間 V が存在して、(注、 $(B^{n-i+1}, \dots, B^p)$ の行ベクトル ~~の転置~~ で生成される空間

$\forall a = (a^1, \dots, a^p)$ に対して

$$\dim \{V \cap \ker [X(a)^*]\} \geq \dim V - (i-j)$$

ここで、 $X(a)^*$ は $X(a)$ からできる線型写像。

次の補題により、適当に $a_{n-i+1}, \dots, a_p$ を取ると (証、略)

補題 $\ker X(a_1)^* \oplus \dots \oplus \ker X(a_p)^* = (\mathbb{R}^i)^{p-n+i}$

故に

$$V = V \cap \bigcup_j \ker X(a_j)^* \supseteq \bigcup_j [V \cap \ker X(a_j)^*]$$

即ち、 $\dim V \geq (p-n+i) [\dim V - (i-j)]$

とこれより V が対称行列、 B^i から造られていることを考慮すれば良い。(この実は Plaxia の 補題参照)

§2

前節で述べたように $J^2(n, p) = \tilde{\tau}(M^{ij}(n, p)^c)$ は代数的集合である。H. Whitney [] により、代数的集合は有限個の nonsingular - mfd の disjoint union で表わせる。(こゝでは Whitney condition は考えない。) これから $J^2(n, p)$ の多様体への分割が得られる。一方 Thom - Boardmann Singularity Σ^I も $J^2(n, p)$ の多様体分割を与えている。そこで次に、この両方に共通の多様体分割を具体的に記述する問題を考える。H. Whitney の理論は一般的すぎて、この場合に適用しても、具体的な分割の情報~~を~~を教えてくれないので、別の方途を求める。

方針 $\Sigma^{I, h} \cap J^2(n, p) = \tilde{\tau}(\cdot) = X$ の分割
 $f \in X$ とすると、 $a^1, \dots, a^p$ に対してベクトル空間 m_e/m_e^2 の submodule $S_a \cup \{f^1, \dots, f^p\}$ が与えられる。よって

$\Psi: X \longrightarrow \text{Map} \{ \mathbb{R}^p, GL_{n-j, j}(m_e/m_e^2) \}$
 という写像を構成する。但し次が成立するように

$$\Psi(f)(a) \supseteq S_a \cup \{f^1, \dots, f^p\}$$

$(\mathbb{R}^n, 0)$ の座標変換、 $L^2(n) (= J^2(n, n)$ の nonsingular elements) は $GL_{n-j, j}$ に自然に依る。 $L^2(p)$ は $\mathbb{R}^p$ に $L^1(p)$ の部分が自然に依る。この operation の下

に Ψ は $L^2(n) \times L^2(p)$ equivariant である。

そこで $\text{Image } \Psi(X)$ の多様体分割も考えて、その個々の多様体の上に Ψ を制限すると、 Ψ が smooth fibre bdle であることを示す。

§1 の ②' の条件は

$$A_j = B \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad n-i+2 \leq j \leq p$$

$$A_p = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と置くと、

(イ) すべての $(a_1, \dots, a_p)$ に対して、 $\text{rk } \sum_{n-i+1 \leq s \leq p} a_s A_s \leq i-j$ と書ける

$f \in \sum_{i=1}^n$ であつたから

(ロ) $\{V(\sum a_s A_s)\}_{a \in \mathbb{R}^p}$ で生成される $\mathbb{R}^i$ の部分空間は、次元が $(i-n)$ の $V((B^{n-i+1}, \dots, B^p))$ に等しい。

こゝで行き A に対して $V(A)$ は A の列ベクトルで生成される部分空間とする。 $\mathbb{R}^{p-n+i}$ の open dense set を

$$U = \{ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p-n+i} \mid \dim V(\sum a_s A_s) = i-j \}$$

($\mathbb{R}^i$) の部分空間 C を次のように置く。

$$C_1 = \bigcap_{a \in U} V(\sum a_s A_s) \quad C_2 = V((B^{n-i+1}, \dots, B^p))^\perp$$

$$C = C_1 + C_2$$

A_j を $\mathbb{R}^i$ への線型写像、 A_j^* と見立て、射影 $\pi^* : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^i / C$ と結合して $\pi^* \circ A_j^* = \bar{A}_j^*$ を考える。

//

(イ) すべての $(a_1^l, \dots, a_p^l)$ に $\dim \operatorname{Im}(\sum a_s \overline{A_s}^*) \leq i-j-c-h$

(ii) $\bigcap_{\substack{U \ni a}} \operatorname{Im}(\sum a_s \overline{A_s}^*) = \{0\}$

補題 上で与えられた $B^{n-iH}, \dots, B^P$ に対して、
階数が $(p-n+i)$ の行列 (a_{lj}^l) $n-i+1 \leq j \leq p$, $1 \leq l \leq i-c-h$
と $(i-c-h)$ 次の正則行列 T があって

$$\begin{pmatrix} a_1^l & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{i-c-h}^l \end{pmatrix} T \overline{B}^j = \begin{pmatrix} a_1^l & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{i-c-h}^l \end{pmatrix} T \overline{B}^l$$

ここで $\overline{B}$ は π^* によって B から送られる行列。

(証明) 条件 (ii) より、 $\bigcap_{\substack{U \ni a}} \operatorname{Im}(\sum a_s \overline{A_s}^*)^\perp = \mathbb{R}/\mathbb{C}$
が言える。

そこで、 $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ の basis $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-c-h}$ を各 α_s からどれ
かの $(\operatorname{Im}(\sum a_s \overline{A_s}^*))^\perp$ に入る $\{ \}$ に取ると

$${}^t \alpha \left(\dots, a_l \overline{B}^j - a_l^j \overline{B}^l, \dots \right) = 0$$

$$\text{i.e. } a_s^l {}^t \alpha_s \overline{B}^j = a_s^j {}^t \alpha_s \overline{B}^l, \quad n-i+1 \leq l, j \leq p$$

ここで α_s に対して $a_s^{n-i+1}, \dots, a_s^p$ が対応する。

これは

$$\begin{pmatrix} a_1^l & & \\ & \ddots & \\ & & a_{i-c-h}^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t \alpha_1 \\ \vdots \\ {}^t \alpha_{i-c-h} \end{pmatrix} \overline{B}^j = \begin{pmatrix} a_1^j & & \\ & \ddots & \\ & & a_{i-c-h}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t \alpha_1 \\ \vdots \\ {}^t \alpha_{i-c-h} \end{pmatrix} \overline{B}^l$$

$\begin{pmatrix} {}^t \alpha_1 \\ \vdots \\ {}^t \alpha_{i-c-h} \end{pmatrix} = T$ と置く。行列 (a_{lj}^l) の階数が、

$(p-n+i)$ であることは次のように示される。

もし階数が $(p-n+i)$ より小であるとすると、 $(\exists \lambda_{n-i+1}, \dots, \lambda_p) \neq 0$ が存在して

$$\top (\sum \lambda_j \bar{B}_j) = 0 \text{ matrix}$$

$$\text{i.e. } (\sum \lambda_j \bar{B}_j) = 0 \text{ matrix}$$

このことより (E) の条件が満足されない、

$$\dim V((B_{n-i+1}, \dots, B_p)) = i-j < i-h$$

となり矛盾する。

(この部分で $\pi^* A_j^*$ の形を考える。)

$$\text{系 } a_j^e \neq 0 \quad (\forall e, j)$$

証. (E) の条件から

系 $\bar{B}_j$ の階数は j によらず一定である。特に

$p-n+i=2$ の場合には、 $\text{rk } \bar{B}^1 = (i-j)$ でなければならず、またすべての a^{n-i+1}, a^{n-i+2} に対して、 $\text{rk} (a^{n-i+1} \bar{B}^{n-i+1} + a^{n-i+2} \bar{B}^{n-i+2}) = (i-j)$

$$\text{系 } 2 \leq p-n+i \leq i-c-h \quad \text{i.e.} \quad p+c+h \leq n$$

これらの系は $\sum_{i=h}^n \cap \mathcal{J}^2(n, p) - \mathcal{J}^2(M^{i,j}(n+1), p)^c \neq \emptyset$ の場合に成立する事柄である。

以下 $p-n+i=2$ の場合を考える。この場合には、補題より $\bar{B}^{n-i+1}$ と $\bar{B}^{n-i+2}$ を同じ $\mathbb{R}^i$ の変換で、 $i-j+1$ 列から i 列までが 0 ベクトルであるようにできる。故に

2つの $(i-j, i-c-k)$ 行列 F_1, F_2 が存在して (階数はいつでも $(i-j)$)

$$(i) \quad V(aF_1 + bF_2) = V(a\bar{B}^{n-i+1} + b\bar{B}^{n-i+2})$$

$$(ii) \quad V(F_1) + V(F_2) = \mathbb{R}^i / \mathbb{C}$$

$$(iv) \quad \dim V(aF_1 + bF_2) = i-j \text{ unless } a=0, b=0$$

$$\bigcap_{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} V(aF_1 + bF_2) = \{0\}$$

補題 $F(i-j, i-c-k) = F$ を 行列空間とする。

$F \times F$ の中で、(i), (iv) を満足する集合は open set である。

上の集合を $U(i-j, i-c-k)$ と置く

$$\text{補題 } V(aF_1 + bF_2) = V(a'F_1 + b'F_2) \quad (\forall a, b)$$

$\Rightarrow$ 適当な $(i-j)$ 次の正則行列 S に対して

$$F_1 = {}^sF_1 S, \quad F_2 = {}^sF_2 S$$

$\mathbb{R}^n$ の Grassman mfds を考える。

$$G_{n-k, n-i+c}(\mathbb{R}^n)$$

$$= \left\{ (V_1, V_2) \mid \dim V_1 = n-k, \dim V_2 = n-i+c, V_1 \supseteq V_2 \right\}$$

これは容易に mfd であることが判る。

$$\xi \longmapsto G_{n-h, n-i+c}(\mathbb{R}^n)$$

を V_1/V_2 の $(i-j)$ frame $F(V_1/V_2)$ を associate した bdl とする。

$$\xi \times \xi \xrightarrow{\pi} G \text{ の中の sub-bdl } \mathcal{U} \longrightarrow G$$

を

$$\mathcal{U} = \left\{ \xi \times \xi \ni (F_1, F_2) \mid \begin{array}{l} \pi(F_1, F_2) = (V_1, V_2) \\ \bigcap_{(a,b) \neq (0,0)} V(aF_1 + bF_2) = \{0\} \\ V(F_1) + V(F_2) = V_1/V_2 \\ \dim V(aF_1 + bF_2) = i-j \end{array} \right\}$$

において定義する。

$\mathcal{U}$ の fibre は $\mathcal{U}(i-j, i-c-h)$ である。 $\mathcal{U} = GL(i-j)$ の openate するから $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}/GL(i-j)$

(Ψ の構成)

$$\text{以下 } p-n+i=2$$

$$f \in \Sigma^{i,h} \cap J^2(n, p) = \hat{\tau}(M^{i,j}(n+1, p)^c)$$

に対して、 $\Psi(f)$ は次で与えられる。

$$V_1 = \mathcal{S}\{f^1, \dots, f^p\} \quad V_2 = \mathcal{J}\{f^1, \dots, f^p\} + C$$

F_1, F_2 は 補題で与えられたもの (C1)

$$\text{すると、} \Psi(f)(a, b) = \mathcal{J}\{f^1, \dots, f^p\} + C + V(aF_1 + bF_2)$$

定義 $\Sigma^{i,h}(C, i-j)$ を次の条件で定義する。

- (i) $f \in \Sigma^{i,h} \cap [\mathcal{J}^2(n,p) - \tilde{\mathcal{U}}(M^{i,j}(n+1,p))^c]$
 (ii) $U = \{ (a^1 \dots a^p) \mid \dim \mathcal{S}_a \mathcal{U} \{f^1 \dots f^p\} = i-j \}$
 $\cap \mathcal{S}_a \mathcal{U} \{f^1 \dots f^p\} / \mathcal{U} \{f^1 \dots f^p\}$ の次元が c
 $U \ni a$

定理 $\Xi|_{\Sigma^{i,h}(c,i-j)} : \Sigma^{i,h}(c,i-j) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}$
 は smooth differentiable fibre bdle

証明

$\tilde{\mathcal{U}}$ の元 $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow GL(i-j, n-i+j) (m_1/m_2)$

$$V = \{ f \in \mathcal{J}^2(n,p) \mid \mathcal{S}_a \mathcal{U} \{f^1 \dots f^p\} \subseteq C(a,b) \}$$

とすると

$$\mathcal{S}_a \mathcal{U} \{f+g\} \subseteq \mathcal{S}_a \mathcal{U} \{f^1 \dots f^p\} + \mathcal{S}_a \mathcal{U} \{g^1 \dots g^p\}$$

だから V は vector subspace である。

一方適当な $a \in \mathbb{R}^p$ に対して $\dim \mathcal{S}_a \mathcal{U} \{f^1 \dots f^p\} = i-j$
 即ち、 $\mathcal{S}_a \mathcal{U} \{f^1 \dots f^p\} = C(a,b)$ は V 中の open condition
 だから $\Xi|_{\Sigma^{i,h}(c,i-j)}$ の fibre は open mfd $\mathcal{R}_c$ を与える。

そこで

$$\Phi : U(i-j, i-c-h) \times \mathcal{R}_c \times L^2(n) \times L^2(p) \rightarrow \mathcal{J}^2(n,p)$$

を $L^2(n) \ni g, L^2(p) \ni h$ に対して

$$\Phi \{ (F_1, F_2) \times (f^1 \dots f^p) \times g \times h \} = h \circ f \circ g$$

そこで、 $f=(f^1, \dots, f^P)$ によって §2 で行なってきた操作 (1) で $(H_1, H_2) \in \cup(i, j, i-c-h)$ が得られるものとする。

ϕ は constant rk であることが、今までの構成から判る。故に constant rk theorem により、 $\text{Im } \phi$ 、即ち $\Sigma^{c,h}(C, i-j)$ は mfd である。

locally Zariski closed であることは容易に調べられる。

§3 Example

その 1 §2 の最も簡単な場合は $\tilde{\tau}: J^2(4, 2) \rightarrow J^2(3, 2)$ の場合で §1 の定理の等号の成立しないのは、nontrivial case は $M^{3,1}$ の場合である。この時、

$$\Sigma^{3,0} \cap [J^2(3, 2) - \tilde{\tau}(M^{3,1}(4, 2)^c)] = \Sigma^{3,0}(1, 2)$$

系 $\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup (\Sigma^{3,0} - \Sigma^{3,0}(1, 2))$ は extensible である。

その 2 次に簡単な場合は $\tilde{\tau}: J^2(5, 2) \rightarrow J^2(4, 2)$ の場合で、§1 の定理の等号の成立しないのは、nontrivial case で、 $M^{4,2}$ と $M^{4,1}$ である。このとき、

$$\Sigma^{4,0} \cap [J^2(4, 2) - \tilde{\tau}(M^{4,1}(5, 2)^c)] = \Sigma^{4,0}(2, 3)$$

$$= \Sigma^{4,0}(2,3) \cup \Sigma^{4,0}(1,3)$$

$$\Sigma^{4,0} \cap [J^2(4,2) - \tilde{\tau}(M^{4,2}(5,2)^c)] = \Sigma^{4,0}(0,2)$$

$$\Sigma^{4,1} \cap [J^2(4,2) - \tilde{\tau}(M^{4,2}(5,2)^c)] = \Sigma^{4,1}(1,2)$$

系 $\Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup (\Sigma^{4,0} - (\Sigma^{4,0}(2,3) \cup \Sigma^{4,0}(1,3)))$ は
extendible

$\Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup (\Sigma^{4,0} - \Sigma^{4,0}(0,2) \cup \Sigma^{4,1}(1,2))$ は
extendible

文献

Andrew du Plessis ; Maps without certain Singularities

~~Math.~~

; Comment. Math. Helvetici. 1975

Mather ; On Thom-Boardman Singularities

Peixoto の 論文集

H. Whitney ; Elementary structure of algebraic set.