

Perron-Frobenius 方程式の Galerkin 近似解

九大 工学部 香田 徹
宮大 工学部 村尾 健次

1. まえがき

近年、工学、物理学、数学等の種々の分野で非線型差分方程式や非線型微分方程式にみられる不規則現象への関心が高まりつつある⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。この不規則現象は、系が確定的であるにも拘らず、複雑なストカスティックな振舞を示すので、通常“カオス”（あるいは“確定系のカオス”）と総称されている。電気・電子工学の分野では、ある種の非線型サンプル値制御系に、この種の不規則解が存在することが知られているが⁽⁵⁾、最近では、デジタルフィルタ、パルス幅変調回路、DC-DC 変換器等で生じる不規則現象もカオスの一種ではないかという指摘もある⁽⁶⁾。カオスが生じる最も単純な系は、一次元差分方程式

$$x_{n+1} = \tau(x_n) \quad , \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (*)$$

である。但し、 τ は区間 I からそれ自身への写像である。不

規則現象を呈する非線型微分方程式も、Lorenz 変換や Poincaré 変換を施すことにより、(*)の差分方程式として理解しようという試みもあり⁽²⁾、(*)の差分方程式は最も精力的な研究がなされている系である⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾。これらの研究では、(*)の解軌道 $\{x_n\}$ が区間 I の部分集合 S を訪れる頻度の長時間平均の存在がまず問題とされる。長時間平均が存在し、しかも初期値 x_0 に殆んど依存しない場合、長時間平均は不変測度と呼ばれ、これに対する密度関数は不変密度と呼ばれる。不変密度は、それ自身基本的な量であるが、不規則解の複雑さを示す指標としてのエルモゴロフエントロピーや相関関数を知る上で不可欠な重要な量である。不変密度は、Perron-Frobenius 方程式 (略して P-F 方程式) と呼ばれる一種の関数方程式を満たすが、一般にその解析解を得ることは困難であり、不変密度を近似的に求める方法が幾つか提案されている⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾。中でも $Ulam-Li$ ⁽¹³⁾ の方法が最も代表的であろう。この方法は、区間 I を N 個の部分区間に分割し、各部分区間間のマルコフ過程として(*)の解軌道を考え、不変測度をマルコフ推移行列の不動点とみなすものである。また、区間分割数 N を十分大きくした時、不動点 (近似解) が真の解へ $1/N$ 収束するため、写像 T に対する条件が得られている。彼等の方法では、 N 変数の連立一次方程式を解くことになるが、実際の数値計算

では、変数の数 N はおやみに大きくとれず、本文で詳しく述べるのであるが、近似解の収束の速さは十分とはいえない。

本稿では、これを改善するために新たな近似解法を与えようとするものである。本解法は、(*)の不変密度を区間分割数 N の $(K-1)$ 次の区分多項式を用いてガレルキン法的に近似する一種の有限要素法であり、 NK 変数の連立一次方程式の問題に帰着される。本解法による近似解が区間分割数 N を十分大きくとった時真の不変密度に L_1 収束するための写像でに対する条件を与えると共に、 U_{lam-L_i} の近似解が本解法の $K=1$ のガレルキン近似解に他ならないことを明らかにする。又、幾つかの具体的な写像に対して、本解法を適用した結果、本近似解の収束の速さはほぼ N^{-K} に比例し、 U_{lam-L_i} の解法と異なり、かなり少ない変数 NK の連立一次方程式を解くだけで、十分精度の良い近似解が得られ、更に計算時間の点でも優れていることを述べる。特に、混合的でない写像にみられる島状の不変密度を近似的に求める場合、本解法は、Shibata ら⁽⁴⁾の直交関数による近似解法より優れていることも併せて注意する。

2. P-F方程式と不変密度

本稿は、一次元非線型差分方程式

$$x_{n+1} = \tau(x_n), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

の不規則解について考察する。但し、 τ は区間 I からそれ自身への写像であり、

$$\tau: I \rightarrow I \quad (2)$$

と記す。(1)の解軌道 $\{x_n\}$ の性質、すなわち (2) の写像 τ の性質を調べる場合、数学、物理学、工学等の分野では、 $\{x_n\}$ が区間 I の部分集合 S を訪れる頻度の時間平均 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \chi_S(x_n)$ の存在が先ず問題とされる。但し、 χ_S は、 S の定義関数で

$$\chi_S(x) = 1, \quad x \in S \quad ; \quad \chi_S(x) = 0, \quad x \notin S$$

である。エルゴード定理によれば⁽²⁰⁾、写像 τ がルベーグ測度に関して絶対連続な不変測度 M を持ち且つエルゴード的ならば、任意の可測集合 S に対し、上記の長時間平均は存在し、殆んど全ての初期値 x_0 に対し

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \chi_S(x_n) = M(S) \quad (3)$$

となる。但し、測度 M が不変であるとは、任意の可測集合 S に対し

$$M(S) = M(\tau^{-1}(S)) \quad (4)$$

が成立することであり、 M がルベーグ測度に対し絶対連続であるとは、積分可能な関数 f が存在し

$$M(S) = \int_S f(x) dx \quad (5)$$

と書けることである。又、不変測度を持つ写像 τ がエルゴード的であるとは、 $\tau^{-1}(S) = S$ を満たす集合が空集合 ϕ と I の

自明な場合に限るときをいう。以後、絶対連続な不変測度 (absolutely continuous invariant measure) を略して AC 測度 (あるいは単に不変測度) と呼ぶ。それに対応する (5) の関数 f を不変密度と呼ぶこととする。写像 T の不変密度 $f(x)$ が存在する時、(4) の集合 S として、 x の近傍をとれば、(4)、(5) より $f(x)$ は、Perron-Frobenius 方程式 (略して P-F 方程式)

$$P_C f(x) = f(x) \quad (6)$$

を満たすことがわかる (図 1 参照)。但し、 P_C は

$$P_C f(x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} f(y) / |T^{-1}(y)| \quad (7)$$

で定義される可積分関数の集合 L_1 から L_1 への演算子である。従って、不変密度 f は、(6) を満たす P_C の不動点、

$$f(x) = f_C^*(x) \quad (8)$$

と理解される。以上の議論から明らかなように、不変密度 f_C^* は解軌道 x_n の平均的振舞を表わしているので、それ自身重要な量であるが、(1) の不規則解の複雑さを示す指標としてのエントロピー⁽⁹⁾

$$h(T) = \int_E f_C^*(x) \cdot |T'(x)| dx \quad (9)$$

や解 x_n を時系列とみなしたときの相関関数

$$f_R = \int_E f_C^*(x) \cdot x \cdot T^R(x) dx \quad (10)$$

を求める際、 f_C^* は不可欠な基本量である。最近、Oono^{10,11)} は、(9) の $h(T) > 0$ なる不変密度が存在すれば、(1) の不規則解

は物理的に観測可能なカオスであり、従来、“カオス”と統
称されていた不規則解の可観測性の概念の必要性を説いてい
る。また、彼等は可観測カオスであれば、 $h(C) > 0$ なるAC
I測度が存在するであろうという予想を与えており、カオス
の数学的性質と物理的概念との関係が明らかになりつつある。
一方、(1)がACI測度を持ったための十分条件は幾つか得られ
ているが⁽⁸⁾⁻⁽¹¹⁾、中でも次のLasota & Yorkeの条件⁽⁸⁾は最も
基本的であり、以下の近似解の収束性の定理とも関連がある
ので掲げておく。

[Lasota & Yorkeの定理]⁽⁸⁾ 写像 T が区分的 C^2 関数で
 $\inf |T'| > 1$ であれば、不変密度 f^* が存在し、

$$f^*_T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P_T^i f_0(x) \quad (11)$$

と計算される。但し、 T が区分的 C^2 関数であるとは、部分区
間 J_m 上で定義される写像 $T|_{J_m}$ が C^2 関数であるような区間
 I の分割

$$I = \bigcup_{m=1}^M J_m, \quad J_m = [d_{m-1}, d_m], \quad 0 = d_0 < d_1 < \dots < d_M = 1 \quad (12)$$

が存在する場合をいう。なお、 f_0 は任意の可積分関数である。

不変密度を具体的に求めるには、(3)あるいは(11)を直接計算
することが考えられるが、これは丸め誤差の影響が大きく適
当でないとされている⁽¹³⁾⁻⁽¹⁷⁾。これに代わるものとして、幾つ
かの方法が提案されている⁽¹²⁾⁻⁽¹⁷⁾。中でも次に掲げるVlam

の方法⁽¹²⁾は簡単で、しかも得られる近似解の収束性も L_1 ⁽¹³⁾により保証されている。

[Ulam の近似解法]⁽¹²⁾ 区間 $I = [0, 1]$ を

$$I = \bigcup_{n=1}^N I_n, \quad I_n = [C_{n-1}, C_n], \quad 0 = C_0 < C_1 < \dots < C_N = 1 \quad (13)$$

と分割し、部分区間 I_j が T^{-1} によって I_i に写像される割合 P_{ij} を要素とする N 次の遷移行列 $\widehat{P}_T$

$$\widehat{P}_T = (P_{ij}) \quad , \quad P_{ij} = m(T^{-1}(I_i) \cap I_j) / m(I_j) \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (14)$$

に関する連立一次方程式

$$\widehat{P}_T M = M \quad (15)$$

の解

$$M = M_T^* \quad (16)$$

を (1) の A C I 測度の近似解とするものであり、対応する不変密度 f_T^* の近似解 $\widehat{f}_T^*$ は、

$$\widehat{f}_T^*(x) = \sum_{i=1}^N m^{-1}(I_i) M_{Ti}^* \chi_{I_i}(x) \quad (17)$$

で与えられる。但し、 $m(\cdot)$ はルベーグ測度であり

$$M = (M_1, M_2, \dots, M_N)', \quad M_T^* = (M_{T1}^*, M_{T2}^*, \dots, M_{TN}^*)' \quad (18)$$

であり、肩符 ' は転置を表わす。

[L_1 の収束定理]⁽¹³⁾ 上記の Lasota & Yorke の定理の条件下に於いて、不変密度 f_T^* が唯一で $\inf |T'| > 2$ であれば[†]、(17) は $N \rightarrow \infty$ に対し f_T^* に L_1 収束する。即ち、 $N \rightarrow \infty$ に対し近似解の L_1 誤差

$$\|f_c^* - \tilde{f}_c^*\|_{L_1} = \int_E |f_c^*(x) - \tilde{f}_c^*(x)| dx \quad (19)$$

が零に収束する。また、 $\inf |T'| > 1$ に対しては、 k を $(\inf |T'|)^k > 2$ なる整数とし[†]、 M_ϕ^* を写像 $\phi = T$ で k に対する (15) の $\tilde{P}_\phi$ の不動点とし、(17) に対応させて

$$\tilde{f}_\phi^*(x) = \sum_{i=1}^N m^{-1}(I_i) M_{\phi_i}^* \chi_{I_i}(x) \quad (20)$$

と置くと

$$\tilde{g}_\phi^*(x) = k^{-1} \sum_{n=0}^{k-1} P_{T^n} \tilde{f}_\phi^*(x) \quad (21)$$

は $f_c^*(x)$ に L_1 収束する。

本稿では、上記の Ulam の解法を Ulam-Li の方法と呼ぶことにするが、(13)~(15) から明らかなように、彼等の方法は、(1) を N 個の状態 (部分区間 I_n) 間のマルコフ過程とみなしたものである。この方法では、 N 変数の連立一次方程式を解くことになるが、実際の数値計算では変数の数 N をおやみに大きくとれない。また、4章で示すように幾つかの具体的写像に対し彼等の方法を適用した結果、得られる近似解の速さは遅く、 $N \simeq 100$ としても十分精度の良い近似解が得られたとはいえない。本稿では、これを改善する有効な近似解法を与えようとするものである。

[†] 筆者らの評価によれば、 $\inf |T'| > 2$ は $\inf |T'| > 4$ と改められるべきであろう。また、この時、 $(\inf |T'|)^k > 2$ も $(\inf |T'|)^k > 4$ と修正される。

3. P-F方程式のガレルキン近似解

本章では、P-F方程式(6)の解である不変密度を有限要素法的に近似する方法(区分的多項式を用いたガレルキン解法)を提案する。

区間 I を(13)のように N 個の部分区間 I_n ($n=1, \dots, N$) に分割し、 I_n 以外の領域で零となる K 個の独立な高々 $K-1$ 次の区分的多項式を $l_{nr}(x)$ ($r=1, \dots, K$) とし、 NK 個の多項式 $\{l_{nr}\}$ を基底と呼ぶ。すなわち、 $\{l_{nr}\}$ は

$$l_{nr}(x) = 0, \quad x \notin I_n \quad (1 \leq n \leq N, 1 \leq r \leq K) \quad (22)$$

を満たす。(6)の解 $f^*(x)$ を $\{l_{nr}\}$ の一次結合

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^K \gamma_{nr} l_{nr}(x) \quad (23)$$

でガレルキン法的に近似する。すなわち、(23)を(6)の $f(x)$ に代入した時の残差と全ての基底とが区間 I で直交するように、従って

$$\langle \tilde{f} - P_c \tilde{f}, l_{nr} \rangle = 0, \quad 1 \leq n \leq N, 1 \leq r \leq K \quad (24)$$

を満たすように(23)の結合係数 $\{\gamma_{nr}\}$ を定める。但し

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) dx. \quad (25)$$

(24)より、 NK 変数の連立一次方程式

$$A\gamma = B\gamma \quad (26)$$

を得る。但し

$$\gamma = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1K}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{NK})' \quad (27)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_N \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1N} \\ \vdots \\ B_{N1}, B_{N2}, \dots, B_{NN} \end{bmatrix} \quad (28)$$

であり、 A_n, B_{ni} は K 次の正方行列で、これらの子行列の要素は各々

$$A_n = \{ \langle l_{n\bar{j}}, l_{n\bar{k}} \rangle \}, \quad B_{ni} = \{ \langle l_{n\bar{j}}, P_i l_{i\bar{k}} \rangle \} \quad (29)$$

である。なお、 B_{ni} の要素は積分変数の変換により

$$\langle l_{n\bar{j}}, P_i l_{i\bar{k}} \rangle = \int_{\Omega_{ni}} l_{n\bar{j}}(\tau(x)) l_{i\bar{k}}(x) dx \quad (30)$$

と計算される。但し

$$\Omega_{ni} = \tau^{-1}(I_n) \cap I_i. \quad (31)$$

基底 $\{l_{n\bar{k}}\}$ は独立であるから、 A は正則となり

$$A^{-1}B\varphi = \varphi \quad (32)$$

を得る。(32) の非自明な解が存在することは付録 1 に示す。この非自明な解を

$$\varphi_c^* = (\varphi_{11}^*, \varphi_{12}^*, \dots, \varphi_{1K}^*, \varphi_{21}^*, \dots, \varphi_{NK}^*)' \quad (33)$$

とすると、P-F 方程式 (6) のガレルキン近似解

$$\tilde{f}_c^*(x) = \mathcal{L}'(x) \cdot \varphi_c^* \quad (34)$$

を得る。但し

$$\mathcal{L}(x) = (l_{11}(x), l_{12}(x), \dots, l_{1K}(x), l_{21}(x), \dots, l_{NK}(x))'. \quad (35)$$

まず、 $K=1$ のガレルキン近似解 (34) は、Ulam-Li の近似解 (17) であることを示す。 $K=1$ の時の基底 $\{l_{n1}\}$ は $\{\chi_{I_n}\}$ である

ので、(28), (29) より行列 A, B は

$$\left. \begin{aligned} A &= \{A_{i\bar{j}}\}, \quad A_{i\bar{j}} = \delta_{i\bar{j}} m(I_{\bar{j}}) \\ B &= \{B_{i\bar{j}}\}, \quad B_{i\bar{j}} = m(\tau^{-1}(I_i) \cap I_{\bar{j}}) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

となる。但し、 $\delta_{i\bar{j}}$ は δ 関数である。(32) の解 u^* に対し

$$M_{\tau}^* = A u_{\tau}^* \quad (37)$$

を定義すると、(32) は

$$B A^{-1} M_{\tau}^* = M_{\tau}^* \quad (38)$$

と書け、行列 $B A^{-1}$ は (15) の行列 $\widehat{P}_{\tau}$ に等しいので、 $K=1$ に対する (34) は (17) と等しい。

次に、区間分割数 $N \rightarrow \infty$ に対する ガレルキン 近似解 (34) の収束性について述べる。 $K=1$ の場合、すなわち Ulam-Li の近似解については、その収束性は前章で述べたように L_i により証明されている。次章の計算例で示すように、 K は高々 3 位で十分実用的であると考えられるので、ここでは $K=2, 3$ に対する ガレルキン 近似解の収束性の定理を L_i の定理と対応した形で与えるが、この定理の証明は別稿に譲ることとする。

〔ガレルキン 近似解の収束定理〕 前章の Lasota and Yorke の定理の条件下に於いて、 τ が唯一の有界な不変密度 $f_{\tau}^*(x)$ を持つとする。 $\inf |\tau'| > 4 + 2\sqrt{3}$ であれば、(34) の ガレルキン 近似解 $\widehat{f}_{\tau}^*(x)$ ($K=2, 3$) は $N \rightarrow \infty$ に対し $f_{\tau}^*(x)$ に L_1 収束する。また、 $\inf |\tau'| > 1$ である場合には、 $\widehat{f}_{\tau}^*$ を $(\inf |\tau'|)^K$

$> 4 + 2\sqrt{3}$ なる整数とし、 φ^* を写像 $\phi = T^k$ に対する (32) の解とし

$$\hat{f}_\phi^*(x) = \mathcal{L}'(x) \cdot \varphi^*, \quad \hat{g}_\phi^*(x) = k^{-1} \sum_{n=0}^{k-1} p_{T^n} \hat{f}_\phi^*(x) \quad (39)$$

と置いた時、 $\hat{g}_\phi^*(x)$ ($k=2, 3$) は $N \rightarrow \infty$ に対し $f_\phi^*(x)$ に L_1 収束する。但し、 φ^* を与える式 (32) 中の行列 B は写像 ϕ に対してとられる。

4. 不変密度の数値計算例

不変密度が既知の一次元写像は数少ない。その一部を表 1 に掲げる。例 1, 2 及び 8 は区分的線形な写像であるが、例 3 から例 7 のように区分的線形でない写像で、その不変密度がわかっているのは、区分的線形な写像 (表 1 では例 1 の $d=1/2$ の写像) に共型変換 (付録参照) を施したものに限定されているようである。表 1 の最右欄は共型変換関数 $g(x)$ を示したものである。例 1 から例 7 はエルゴード性よりも強い性質である混合性を満たす写像である。但し、写像 T が混合的であるとは、任意の部分集合 $X, Y \subset I$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(X \cap T^{-n}(Y)) = M(X)M(Y) \quad (40)$$

が成立することである。一方、例 8 は混合的ではないがエルゴード的な写像の例である。このような写像に対しては、その不変密度は幾つかの互いに素な台 (support) 上に現れ、“島 (islands)” と通称されている (図 7 参照)。例 8 の単峰性一次元写像は、Ito ら⁽²³⁾ により詳しく調べられている。なお、

島が生じるパラメータ (a, b) は表 1 に掲げた領域以外でも存在する。これら 8 個の写像を例題として取り上げ、本解法の有効性を数値実験により検討する。なお、不変密度の厳密解 f^* とガレルキン近似解 $\tilde{f}^*$ との誤差は、(19) の L_1 ノルムで評価するが、この場合解くべき連立一次方程式 (32) の変数の数 NK を一定にして評価を行うこととする。なお、 N は区間分割数であり、 $k-1$ は区分的項式の次数である。また、本解法を適用する際には必要な区間 I の分割方法 (13) について述べる。(12) の d_m ($0 \leq m \leq M$) 及び (13) の C_n ($0 \leq n \leq N$) を各々区分点、区間分割点、と呼ぶことにする。表 1 の例はいずれも、(12) の J_m を

$$J_1 = [0, x_p], \quad J_2 = [x_p, 1] \quad (M=2) \quad (4)$$

とすれば、 $\tau|_{J_1}, \tau|_{J_2}$ は C^2 関数となる。但し、 x_p は $\tau(x_p)=1$ を満たす点であり、 $0, 1, x_p$ が区分点となる。例 1 から例 7 の混合的写像の場合は、 J_1, J_2 をそれぞれ $N/2$ 等分分割して (13) の I_n を定める。例 8 の非混合的写像に対しては、各々の白の端点、黒の端点、が区間分割点に含まれるようにするため、 $0, 1, x_p$ 及び $\tau^{\ell}(0)$ ($1 \leq \ell \leq 30$) を区間分割点として採用した。以下、例 1 から例 8 の順序で結果を述べる。

まず、例 1, 例 2 についてであるが、これらの f^* は表 1 のように定数関数であるから、 $NK=12$ で $K=1, 2, 3$ のいずれの $\tilde{f}^*$ も f^* と殆んど一致し、これらの誤差 (19) は丸め誤差程度

10^{-4} である。次に、例3から例5についてであるが、 NK を
 パラメータとして $K=1, 2, 3$ に対する $\hat{f}_\varepsilon^*$ の誤差(19)を図2に示
 す。図から明らかなように、 $NK = \text{一定}$ の下では、 $K=2, 3$
 の $\hat{f}_\varepsilon^*$ は、 $K=1$ の $\hat{f}_\varepsilon^*$ ($= \text{Ulam-Li}$ の近似解) よりもかな
 り良い精度を持ち、収束の速さは図に示したように N^{-K} に
 比例している。図3は、例3の写像で $\hat{f}_\varepsilon^*$ と $NK=12$ に対
 する $\hat{f}_\varepsilon^*$ ($K=1, 3$) を示したものである。図から明らかなよ
 うに $K=3$ の $\hat{f}_\varepsilon^*$ は $\hat{f}_\varepsilon^*$ と重なって見える。図4は、例3の
 場合について、各々の近似解 $\hat{f}_\varepsilon^*$ を得るに要した計算実行時
 間(CPU時間)を示したものである。変数の数 NK を大きく
 すると、計算時間は区分的項式の次数 $K-1$ に余りよらず、連
 立一次方程式(22)を解くに要する時間(変数の数のほゞ3乗に
 比例)の方が支配的であることが図から明らかである。こ
 の傾向は、例3に限らず表1の例題に共通して言える。従っ
 て、図2、図4から明らかなように、同程度の精度を有する
 近似解を得るに要する計算時間は、 $K=3$ の方が短い。次に、
 例6についてであるが、図5に共型変換関数 χ^p (表1参照)
 の次数 p を増加させた時の近似解の誤差を示す。但し、 NK
 $= 96$ である。この例では、不変密度が $f_\varepsilon^* = p \chi^{p-1}$ であるので、
 p が増えると共に、各々のガレルキン近似解の精度は全般的
 に悪くなっているが、 $K=3$ の方が $K=1$ よりもかなり良い。例

7は、非有界な不変密度を有する写像であり、この様な写像に対しては、いずれの近似解も他の例に比べて良くななく(図6参照)、新たな近似解法や検討が必要であろう。最後に、例8であるが、図7は写像でと不変密度のガレルキン近似解 $\hat{f}_\tau^*$ ($N=32, K=3$)を示したものである。Itôら⁽²³⁾による不変密度の解析解は、級数展開の形で与えられており、そのままでは誤差評価式(19)の解析解として採用するのは不都合であるので、例8に対しては、(19)の代りにP-F方程式の近似解による残差
$$\|\hat{f}_\tau^* - P_\tau \hat{f}_\tau^*\|_4 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_\tau^*(x) - P_\tau \hat{f}_\tau^*(x)| dx \quad (42)$$
で誤差評価を行なった。その結果、図7の $\hat{f}_\tau^*$ の誤差(42)の数値は約 10^{-3} 程度であった。この数値は、例1から例6の混合的写像の場合に比べて大きい。その主な原因としては、図7から明らかのように不変密度がスパイク状であること及び(42)の計算誤差が考えられる。しかしながら、例8のように島状の不変密度を有する非混合的な写像に対しては、区間分割点 $\{c_n\}$ (13)を前述の様に適切に選んでいるので区分的項式を用いた有限要素法的解法の利点を良く発揮していると考えられる。すなわち、Shibataら⁽⁴⁾による全区間上で定義される直交関数(例えば三角関数)を基底 $\{b_i\}$ ($N=1$)と選ぶ解法を例8のような写像に適用すると、本解法の場合と異なり大きな誤差が生じることが容易に想像される。彼等の方法との

詳しい比較検討は別稿で譲るが、島状の不変密度を有する混合的でない写像に対しては、本稿で提案した有限要素法的手法がかなり有効であるといえる。また、流体力学、熱伝導等の問題に対する近似解法に於いて、全区間 I 上の直交関数よりは区分的 (直交) 多項式を基底として選んだ方がしばしば良い精度を与えることは有限要素法の世界では良く知られていることである。更に、区分的 (直交) 多項式を基底に選ぶことは、直交関数の場合と異なり、(32) の行列 B が疎な行列となることから、計算時間の点でも有利となる。有限要素法が工学の種々の分野で有力な解析手法として幅広く用いられているのは、上述の近似解の精度の良及び計算の容易さにあるといっても過言ではない。

以上の結果を整理すると、不変密度が唯一でかつ有界な写像に対しては、混合性の有無に拘らず、区分的多項式の次数を $2 (K=3)$ として有限要素法的ガレルキン近似解法は、連立一次方程式 (32) の変数の数 NK が約 100 位で十分精度の良い近似解を与え、Ulam-Li の方法 ($K=1$ のガレルキン近似解) を著しく改善したと言えるであろう。なお、混合的でない写像等の場合には、上述の適切な区間分割が必要であることを付け加えておく。

5. おすび

一次元非線型差分方程式の不変密度の有限要素法的近似解法(区分的項式を用いたガレルキン解法)を与え、得られる近似解が収束するための十分条件を与えた。また、従来良く知られているUlam-Liの近似解は、本解法の一様単純な場合の解、即ち区分的定数関数を用いたガレルキン解に他ならないことを明らかにした。更に幾つかの具体的な写像(差分方程式)に対して、本解法を適用した結果、不変密度が有界であれば、写像の混合性の有無に拘らず本解法はかなり良い精度の不変密度の近似解を与え、しかも近似解の収束の速さはUlam-Liの近似解よりもかなり優れていることが明らかになった。一次元非線型差分方程式の不規則解の振舞を知る上で重要な他の量、例えばコルモゴロフエントロピーや相関関数も、本解法で得られた不変密度の近似解を用いて精度良く求めることができるが、これについては別稿で詳しく述べることにする。

参 考 文 献

- [1] May, R.M.: Nature 261, p 459-467 (1976)
- [2] Lorenz, E.N.: J. Atmos. Sci., 20, p. 130-141 (1963)
- [3] 山口昌哉: 非線型の現象と解析, 日本評論社(1979)
- [4] 高橋陽一郎: 日物誌, 35, p 149-161 (1980)
- [5] Kalman, R.E.: Proc. Symp. Nonlinear Circuit Anal., VI,

pp. 273-313 (1956)

- [6] Baillieul, J., Brockett, R.W. and Washburn, R.B.: IEEE Trans. CAS-27, p 990-997 (1980)
- [7] Ueda, Y.: IEE Japan Trans. 98-A, p 167-173 (1978)
- [8] Lasota, A. and Yorke, J.A.: Trans. Am. Math. Soc., 186, p. 481-488 (1973)
- [9] Ruelle, D.: Commun. Math. Phys. 55, p. 47 (1977)
- [10] Li, T.Y. and Yorke, J.A.: Trans. Am. Math. Soc., 235, 183-192 (1978)
- [11] Pianigiani, G.: Israel J. Math. 35, p. 32-39 (1980)
- [12] Ulam, S.: Problems in Modern Mathematics (IntSci. 1960)
- [13] Li, T.Y.: J. Approx. Th., 17, p. 177-186 (1976)
- [14] Shibata, A., Mayuyama, T., Mizutani, M. and Saito, N.: Preprint
- [15] Kai, T. and Tomita, K.: Progr. Theor. Phys., 64, p. 1532-50 (1980)
- [16] Oono, Y.: Preprint
- [17] Grossmann, S. and Thomae, S.: Z. Naturforsch. 23-A, p. 1353-1363 (1977)
- [18] Boyarsky, A. and Scarowsky, M.: Trans. Am. Math. Soc. 255, p. 243 (1979)
- [19] Oono, Y., Khoda, T. and Yamazaki, H.: J. Phys. Soc. Jpn. 48, p. 738 (1980)
- [20] ビリングスレイ (十時、渡辺訳): 確率論とエントロピー (吉岡書店)
- [21] Oono, Y. and Osikawa, M.: Progr. Theor. Phys., 64, p. 54-67 (1980)

[2] Oono, Y. and Takahashi, Y: Prog. Theor. Phys. 63, p1804 (1980)

[3] Ito, S., Tanaka, S. and Nakada, H: Tokyo J. Math. 2, p241 (1979)

付 録

付録1 式(32)の非自明な解の存在証明

基底 $\{l_{nk}\}$ として独立な区分多項式を選んだ時、(32) すなわち

$$B\psi = A\psi \quad (A-1)$$

の非自明な解が存在することを示す。まず多項式を Lagrange の多項式とす。この時

$$\sum_{k=1}^N l_{nk}(x) = 1, \quad x \in I_n \quad (A-2)$$

が成立す。行列 A, B の第 $(i-1)K+k$ 列の要素和を各々、

$S_A(i, k), S_B(i, k)$ とすると、(28), (29) より、(A-2) を用いて

$$S_A(i, k) = \sum_n \sum_k \langle l_{nk}, l_{ik} \rangle = \int_{I_i} l_{ik}(x) dx$$

$$S_B(i, k) = \sum_n \sum_k \langle l_{nk}, p_k l_{ik} \rangle = \sum_n \int_{\Omega_n} l_{ik}(y) dy = \int_{I_i} l_{ik}(y) dy$$

を得る。故に、行列 $B-A$ は特異となり、(A-1) すなわち (32) の非自明な解が存在す。次に、 $\{l_{nk}\}$ が Lagrange の多項式でない場合、例えば Legendre 多項式の場合、これらの基底間の変換行列が非特異であることより、(32) の非自明解は存在す。

付録2. 写像間の共型変換⁽¹⁷⁾

不変密度 $f, \bar{f}$ を持つ写像を各々 $\tau: I \rightarrow I, \bar{\tau}: \bar{I} \rightarrow \bar{I}$ とす。

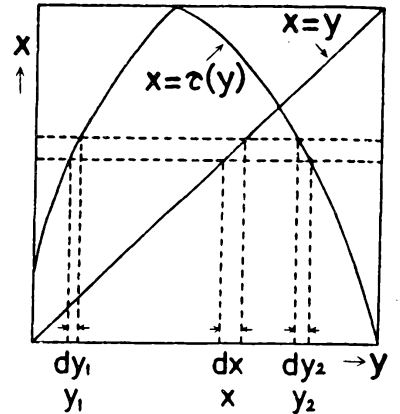
$$\tau = g^{-1} \circ \bar{\tau} \circ g, \quad f(x) = |dg(x)/dx| \bar{f}(g(x)) \quad (A-3)$$

となる。対し写像 $g: I \rightarrow \bar{I}$ が存在すれば、 τ と $\bar{\tau}$ は共型で

あるという。

図1. 式(6)の説明図

(本図では、 $\tau^{-1}(x)=y_1, y_2$ である。 $f(x)dx = \sum f(y_i)dy_i$ に $dy_i = dx/|\tau'(y_i)|$ ($i=1,2$) を代入すると $f(x) = \sum f(y_i)/|\tau'(y_i)|$ を得る。



Examp- les	dynamical law $y=\tau(x)$	A.C.I. measure $\mu = f dx$	conjugating function $g(x)$ to dynamical law ($\alpha=1/2$) in Ex.1
Ex.1	$\tau(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha}, & 0 \leq x \leq \alpha \\ \frac{1-x}{1-\alpha}, & \alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$ $0 < \alpha < 1$	$f(x)=1$	
Ex.2	$\tau(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{3}{2}(\frac{1}{2} - x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$	
Ex.3	$\tau(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-x^2}, & 0 \leq x \leq \sqrt{2}-1 \\ \frac{1-x^2}{2x}, & \sqrt{2}-1 \leq x \leq 1 \end{cases}$	$f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$	$g(x) = \frac{4}{\pi} \tan^{-1} x$
Ex.4	$\tau(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-x}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1-x}{2x}, & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$	$f(x) = \frac{2}{(1+x)^2}$	$g(x) = \frac{2x}{1+x}$
Ex.5	$\tau(x) = (\frac{1}{8} - 2 x - \frac{1}{2} ^3)^{1/3} + \frac{1}{2}$	$f(x) = 12(x - \frac{1}{2})^2$	$g(x) = \frac{1}{2} + 4(x - \frac{1}{2})^3$
Ex.6	$\tau(x) = \begin{cases} \frac{x}{(\frac{1}{2})^{1/p}}, & 0 \leq x \leq (\frac{1}{2})^{1/p} \\ \frac{(1-x)^{1/p}}{(\frac{1}{2})^{1/p}}, & (\frac{1}{2})^{1/p} \leq x \leq 1 \end{cases}$	$f(x) = px^{p-1}$	$g(x) = x^p$
Ex.7	$\tau(x) = 4x(1-x)$	$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$	$g(x) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{x}$
Ex.8	$\tau(x) = \begin{cases} \frac{ax + a \cdot b - ab}{b}, & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{b} \\ -b(x-1), & 1 - \frac{1}{b} \leq x \leq 1 \end{cases}$ $b > \frac{1}{a^2}, \quad b > 1 + \frac{1}{a}$ $a^2 b^2 \leq a \cdot b$	*	

表1. 不変測度を
持つ写像の例

(例3 ~ 例7は例1
の写像($\alpha=1/2$)に共
型変換 $g(x)$ を施し
て得られる。

* 不変測度の解析
解については、Ito
ら⁽²⁾を参照されたい。

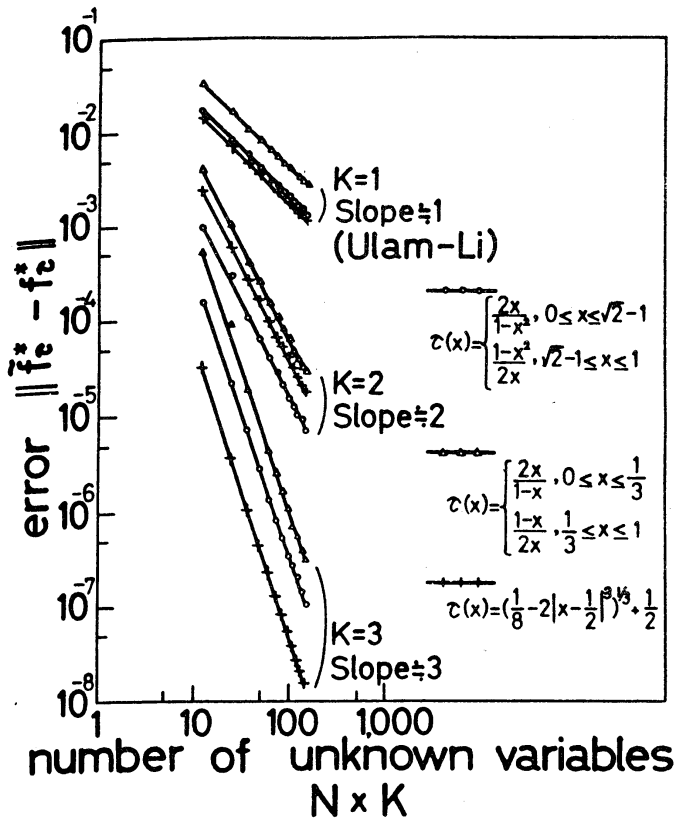


図2 例3～例5の
写像の不変密度 f_c^*
に対するガレルキン近
似解 $\tilde{f}_c^*$ ($K=1, 2, 3$) の
誤差 $\| \tilde{f}_c^* - f_c^* \|_{L_1}$

変数の数 NK は12の
倍数であり、 N は
区間分割数、 $K-1$ は
区分的項式の次数で
ある。

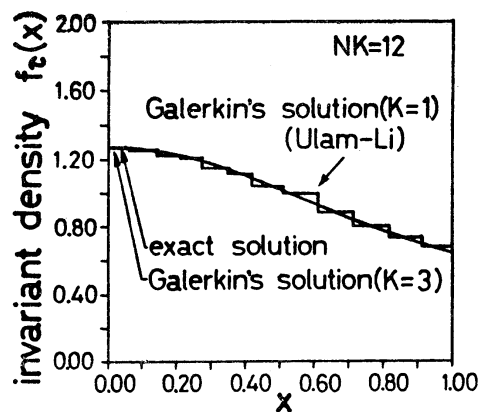
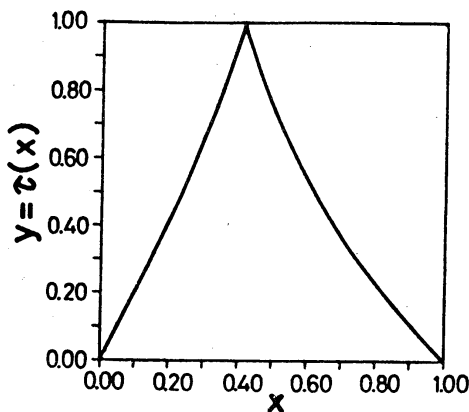


図3 例3の写像及びその不変密度 $f_c^*(x)$ とガレルキン
近似解 $\tilde{f}_c^*(x)$ ($K=1, 3$) .

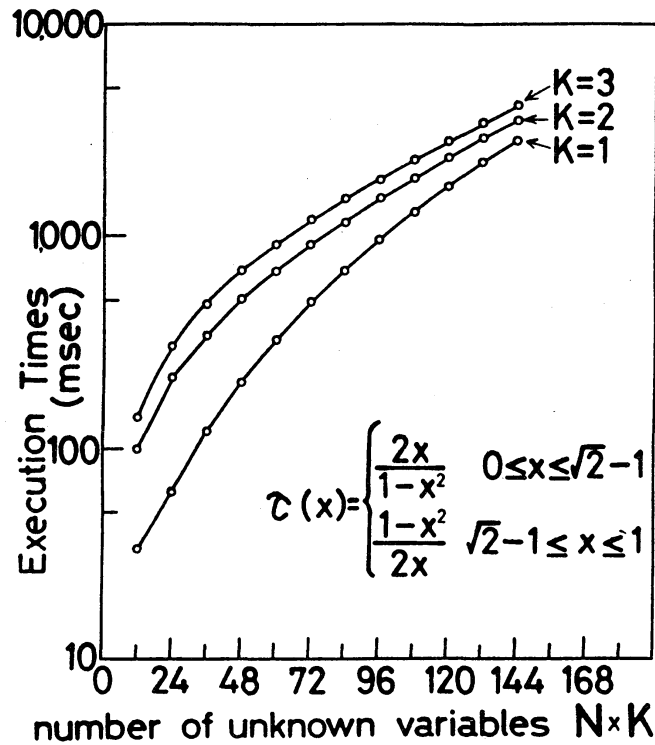


図4 例3の写像の不変密度に対するガレキン近似解を得るに要した計算時間

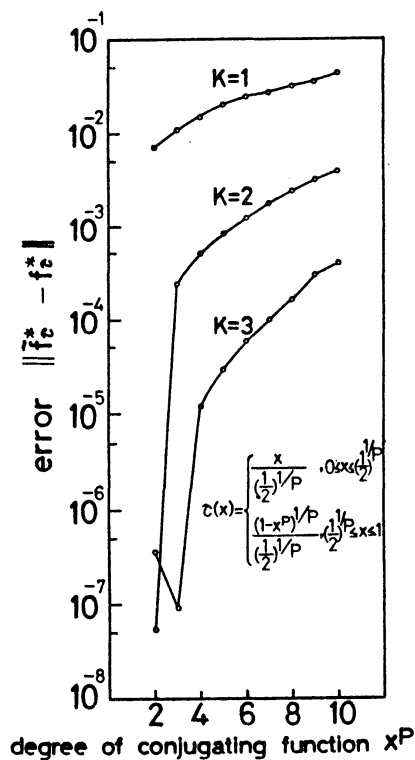


図5. 例6の写像における共型変換関数 x^P (表1参照) の次数 P を増加した時の不変密度 f_c^* に対するガレキン近似解 $\hat{f}_c^*$ の誤差 $\|\hat{f}_c^* - f_c^*\|_{L_1}$ ($NK=96$)

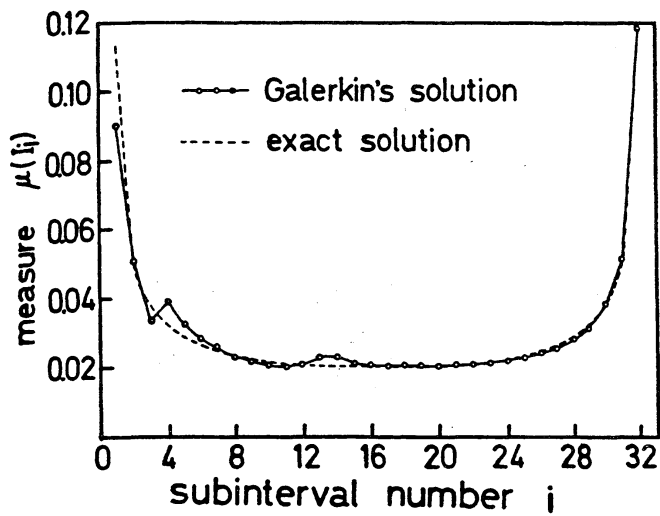


図6 例7の写像
の不変測度 μ がそのガ
レルキン近似解 ($K=3$)
横軸は、部分区間
(I_i の区間番号 i で、
 $m(I_i) = 1/32$ ($1 \leq i \leq 32$)
である。

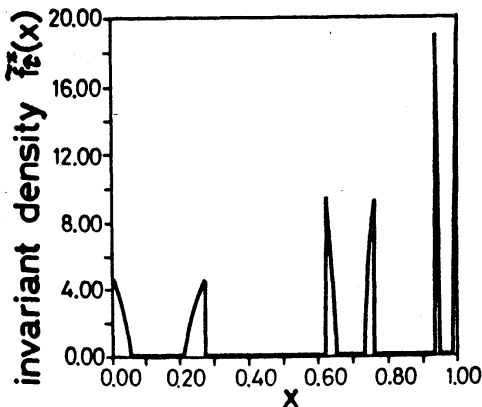
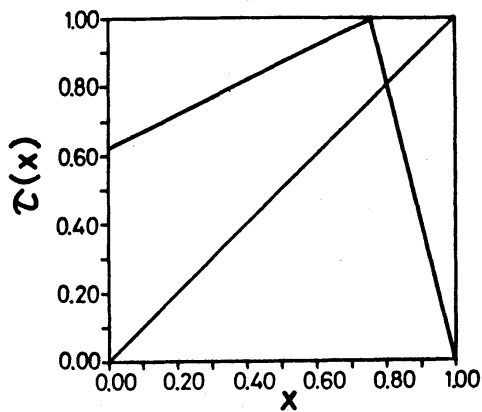


図7. 例8の非混合的写
像 $T(x)$ ($a=0.5$, $b=4.1$)と
その不変密度に対するガレル
キン近似解 $f^*(x)$