

Grothendieck ring と a lifting ring map

愛媛大(理) 宮本雅彦

(Masahiko Miyamoto)

§0 序 環 A に対し, 各有限生成左 A -加群 M を生成元とし, A -加群の short exact sequence $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ により 加法 $[M] = [M'] + [M'']$ を定義してできる加法群を A の Grothendieck group と呼び $G_0(A)$ で表わす。以下 G を有限群, R を代数体 K の代数的整数全体の環とする。このとき 群環 RG , KG の Grothendieck group $G_0(RG)$, $G_0(KG)$ は自然な tensor product により環となることが Swan (1963) によって示されている。ここでの目的はこの Grothendieck ring $G_0(RG)$ の構造を求めることである。

容易に $G_0(KG)$ は G の K -character ring と同型であることがわかる。又 自然な全射が $\theta([M]) = K \otimes_R M$ により, $\theta: G_0(RG) \rightarrow G_0(KG)$ と与えられるので, 加法群として, $G_0(RG) \cong \text{Ker } \theta \oplus G_0(KG)$ と同型となる。 $G_0(RG)$ の加法群としての構造は 最初に Heller-Reiner (1964) により, 特徴付けが与えられてはいるが, 非常にわかりにくいものでした。

1 か1 最近, H. Lenstra (1981) が Abelian group G に対して 非常に簡単な表示を得ました。

$$(H. Senstra) \quad G_0(RG) \cong \bigoplus_{\chi \in Y} (\mathbb{Z} \oplus cl(R\langle \chi \rangle))$$

ここで, Y は G の character の K -共役類の代表系, $R\langle \chi \rangle$ は $R(\chi(g): g \in G, \frac{1}{|G/\ker \chi|})$, $cl(R\langle \chi \rangle)$ は $R\langle \chi \rangle$ の ideal class group を表わすものとする。

既約分解は KG -加群では自然に起こりますが, RG -加群では一般に起こりません。H. Senstra の結果は 適当な同型をとれば, $G_0(RG)$ は KG の分解に従うことを示しています。ここでのオーの結果として, この結果が, nilpotent group まで拡張できることを示しましょう。

定理 1. nilpotent group G に対して, 同型

$$G_0(RG) \cong \bigoplus_{\chi \in Y} G_0(RG\langle e(\chi) \rangle) \cong \bigoplus_{\chi \in Y} G_0(\Gamma e(\chi))$$

ここで, $e(\chi)$ は χ に対応する KG の central idempotent, $RG\langle e(\chi) \rangle$ は $RG e(\chi) (\frac{1}{|G/\ker \chi|})$, Γ は RG を含む KG のある maximal R -order を表わすものとする。

次に $G_0(RG)$ の積構造を考える。先に述べたように, 自然な全射 $\theta: G_0(RG) \rightarrow G_0(KG)$ が存在するので, 加群としての単射 $\omega: G_0(KG) \rightarrow G_0(RG)$ で $\omega \cdot \theta = 1_{G_0(KG)}$ となるものが存在する。それゆえ, 積を決定するためには, $G_0(RG) = \ker \theta \oplus \text{Im } \omega$ と分解してそれぞれの積表示を得ればよいわけである。

$G_0(RG)$ の積構造は これまで非常に簡単な群に対してしか求められていなかったが、その手段の重要な所は、 θ としてそれ自身 *ring homo.* となるものを見つけ出すことであった。

予想 任意の群 G に対し、 $\theta: G_0(RG) \rightarrow G_0(KG)$ は *ring homo.* として *split* する。

この予想は G が *nilpotent group* なら成り立つ。

定理 2. G を *nilpotent group* とすると、 $\theta: G_0(RG) \rightarrow G_0(KG)$ は *ring homo.* として *split* する。又 K が G の *splitting field* なら、任意の有限群に対して、 θ は *split* する。

S1. 定理 1 の証明の概略。

G を *nilpotent group* とし、 $G = \prod_p G_p$ を G の各 Sylow p -部分群 G_p の直積分解とする。 G の位数の素因子の適当な集合 S に対し、 $G_S = \prod_{p \in S} G_p$ と書く。このとき $G \rightarrow G_S \rightarrow G$ の *homomorphisms* によって導かれる *functor* を N_S と書く。即ち、 RG -加群 M に対して、 $N_S M$ は R -加群として M と一致し、 $p \in S$ に対して G_p は M と同じ作用をし、 $p \notin S$ なる G_p は M に *trivial* な作用をするものである。容易に、

N_S は exact functor であり, $G_0(RG) \rightarrow G_0(RG_S) \rightarrow G_0(RG)$ を導く。
 一方 G の任意の既約 character χ に対し, G_S は 正規部分群
 なので χ_{G_S} の成分を $G \rightarrow G_S$ により, G の既約 character と
 見て χ_S を定義できる。Grothendieck groups の元を区別す
 るために, それぞれ, $G_0(RG)$ の元は $[M, G]$, $G_0(RGe(\chi))$ の元は
 $[M, \chi]$, そして $G_0(RGe(\chi))$ の元は $[M, \langle \chi \rangle]$ で表わすとする。

次の準同型を考えよう。 M はある RG -加群でかつ
 $RGe(\chi)$ -加群とする。 $\pi(\chi)$ を $|G/\ker \chi|$ を割る素数の集合とする。

$$\psi(M) = \sum_{S \subseteq \pi(\chi)} [N_S M, \langle \chi_S \rangle] \in \bigoplus_{\chi \in \Gamma} G_0(RG\langle e(\chi) \rangle)$$

と定義すると, N_S は exact functor なので 自然に拡張して,

$$\psi: G_0(RG) \rightarrow \bigoplus_{\chi \in \Gamma} G_0(RG\langle e(\chi) \rangle)$$

を得る。 一方 $\phi: G_0(RG\langle e(\chi) \rangle) \rightarrow G_0(RG)$ を

$$\phi([M, \langle \chi \rangle]) = \sum_{S \subseteq \pi(\chi)} (-1)^{|\pi(\chi) - S|} [N_S M, G]$$

と定義すれば, 容易に ψ の逆写像 ϕ を得る。

$$\phi: \bigoplus_{\chi \in \Gamma} G_0(RG\langle e(\chi) \rangle) \rightarrow G_0(RG)$$

これにより 同型 $G_0(RG) \cong \bigoplus_{\chi \in \Gamma} G_0(RG\langle e(\chi) \rangle)$ を得る。

§2. 定理2の証明の概略.

G は nilpotent group とする。もし G が faithful primitive
 irreducible K -加群 W をもつとすると, G は高々 index 2 の
 normal cyclic group $\langle a \rangle$ of order n を持た, $W \cong K(\zeta_n)$

となる。ここで ζ_n は 1 の原始 n -乗根で、 α は $K(\zeta_n)$ の上に ζ_n の積と作用する。しかも $R(\zeta_n)$ は G の作用に不変となる。このことを使うと、 G の各既約 K -加群 V に対して、 G のある部分群 H と 高々指数が 2 の部分群 $\langle \alpha, K \rtimes W \rangle$ と primitive irreducible KH -加群 $W \cong K(\zeta_n)$ とがあり、 $W^G \cong V$ となる。ここで、 $\theta: G_0(RG) \rightarrow G_0(KG)$ を split する ring homo. (a lifting ring map) を次のように定義する。

$$\begin{array}{ccc} \pi_G: G_0(KG) & \longrightarrow & G_0(RG) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [V] & \longrightarrow & [R(\zeta_n)^G] \end{array}$$

このとき、これが lifting ring map であるように、 π が定義可能であることを示さなければならない。そのために 次のことをそれぞれ示す。

(I) 各 V に対して H と $W = K(\zeta_n)$ の取り方によらず $\pi([V])$ が定義できることを示す。

(II) G の部分群 $N_1 \geq N_2$ と N_1 -加群 V_1 , N_2 -加群 V_2 に対しても、 $\pi_{N_1}(V_1)$, $\pi_{N_2}(V_2)$ が定義されるが、次が成り立つ、即ち、 $\{\pi_N\}$ は G -functor としての morphisms となる。

$$(i) \quad \pi_{N_1^g}(V_1^g) = \{\pi_{N_1}(V_1)\}^g \in G_0(RN_1^g) \quad \text{for } V_g \in G.$$

$$(ii) \quad \pi_{N_2}(V_1^{N_2}) = \{\pi_{N_1}(V_1)\}_{N_2} \in G_0(RN_2)$$

$$(iii) \quad \pi_{N_1}(V_2^{N_1}) = \{\pi_{N_2}(V_2)\}^{N_1} \in G_0(RN_1)$$

$$(III) \quad \pi_G(V \otimes W) = \pi_G(V) \cdot \pi_G(W) \quad \text{for } \lambda G\text{-modules } V, W.$$

これらの結果をそれぞれ証明すれば、容易に定理2を導くことができる。

参考文献

- [1] H. Lenstra, Grothendieck groups of Abelian group rings, *J. Pure Appl. Algebra* 20 (1981), 173-193.
- [2] I. Reiner and K.W. Roggenkamp, Integral representations, (Springer Lecture Notes 744, Springer, Berlin, 1979).