

非線型 Schrödinger 方程式の外部問題の

大域解について

東大 教養 堤 蒼志雄

§0. 序

次のような方程式を考えよう。

$$(0.1) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda |u|^p u \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

$$(0.2) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

$$(0.3) \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

ここで、 λ は実定数、 p は 2 以上の偶数である。領域 Ω は $\mathbb{R}^n$ におけるコンパクト集合の外部で、境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする。

$\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合は、色々な結果が報告されているが ([2], [3], [4] 参照)、 Ω が外部領域の場合は、Brezis & Gallouet [1] の結果以外はないようである。彼らは、 $n=2$ $p=2$ の時、問題 (0.1)–(0.3) が一意的な大域解を持つことを示した。ここでは、 $n=3$ 、 p が 2 以上の偶数の時でも、領

域 Ω がある条件を満たし初期値が十分小さいなら、やはり問題 (0.1)–(0.3) は一意的な大域解を持つことを示す。 $n \geq 4$ の場合については最後の注意で述べる。

領域 Ω については、“ Ω における波動方程式の基本解の特異性が十分時間がたてば無限遠方に飛んで行く” という条件を課す。この条件は、いわゆる “non-trapping condition” で、以後これを条件 [A] と呼ぶことにする。この条件の正確な数学的表現については、Taylor [6], Morawetz, Ralston & Strauss [7], Melrose [8] を参照せよ。具体的には Ω の補集合が convex や star-shaped な方が良い。

我々の主定理は次のようなものである。

定理 0.1. 空間次元 $n=3$ とし、 P を $P \geq 2$ なる偶数とする。さらに、領域 Ω が条件 [A] を満たしていると仮定する。その時、ある $\varepsilon > 0$ が存在して次の事が成立する。すなわち、もし初期値 $u_0(x)$ が不等式

$$(0.4) \sum_{|k| \leq 12} \|(\frac{\partial}{\partial x})^k u_0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{|k| \leq 11} \|(\frac{\partial}{\partial x})^k u_0\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$$

と適合条件を満たすなら、問題 (0.1)–(0.3) は次のような一意解 $u(t, x)$ を持つ。すなわち、

$$u(t, \cdot) \in \left\{ \bigcap_{k=0}^5 C^{1k}([0, \infty); \dot{H}^1(\Omega) \cap H^{2(6-k)}(\Omega)) \right\} \cap C^6([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

我々は、松村先生と西田先生が、圧縮性粘性流の方程式を解くにつかった方法 ([9] 参照) に従い、線型問題の Schrödinger 方程式に対する decay 評価と energy 評価をつかって大域解の存在することを示す。

ここで、記号の定義をしておく。微分 $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$, $(\frac{\partial}{\partial t})^\beta$ は ∂_x^α , ∂_t^β と略記する。 $\Omega \times (0, \infty)$ あるいは $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ 上で定義された関数 $f(t, x)$ と、 $1 \leq p \leq \infty$ 、 $k \geq 0$ 、非負整数 L に対し

$$[f; (p, k, L)](t) = \sup_{s \in [0, t]} \sum_{|k| + 2j \leq L} (1+s)^k \left\| \partial_x^\alpha \partial_s^\beta f(s, \cdot) \right\|_{L^p(\Omega)}$$

$$[f; (p, k, L)]'(t) = \sup_{s \in [0, t]} \sum_{|k| + 2j \leq L} (1+s)^k \left\| \partial_x^\alpha \partial_s^\beta f(s, \cdot) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

と定義する。 $R > 0$ を $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < R\}$ となるような正定数として 1 つ固定しておく。 $r > R$ に対して、 $\Omega_r = \{x \in \Omega; |x| < r\}$ とし、 $L_r^2(\Omega) = \{f(x) \in L^2(\Omega); f \equiv 0, |x| > r\}$ とする。また、以下の計算の途中に出てくる定数は単に C と書くことにする。

§1. 局所解の存在と一意性.

定理 1.1. Ω を $\mathbb{R}^3$ のコンパクト集合の外部領域とし、境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。その時、任意の整数 $N \geq 2$ に対して、初期値 $u_0(x) \in H^{2N}(\Omega)$ で適合条件を満たすなら、問題 (0.1)–(0.3) は次のような一意的な局所解を持つ。すなわち

$$u(t, x) \in \left\{ \bigcap_{k=0}^{N-1} C^k([0, T]; \dot{H}^1(\Omega) \cap H^{2(N-k)}(\Omega)) \right\} \cap C^N([0, T]; L^2(\Omega)).$$

但し、 T は初期値 $u_0(x)$ の $H^2(\Omega)$ ノルム μ の大きさのみによって決まる正定数である。

定理 1.1 は初め縮小写像の原理によって $C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; \dot{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ のクラスで局所解を求める。その後、その解の滑らかさを上げていき上のクラスの解を求める。

§2. decay 評価.

§2, §3 では次のような線型方程式を考える。

$$(2.1) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \quad \text{in } \Omega \times [0, \infty)$$

$$(2.2) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

$$(2.3) \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

f は以下で述べられる補題の中に現われる f についての ρ ルムが有界となるような滑らかな関数とする。

命題 2.1. 空間次元 $n=3$ とし、領域 Ω は条件 (A) を満たすとする。その時、任意の非負整数 L に対して、問題 (2.1)–(2.3) の解 $u(t, x)$ は次の評価を満たす。

$$(2.4) \quad [u; (\infty, \frac{3}{2}, 2L)](t)$$

$$\leq C \left[\sum_{|k| \leq 2L+5} \|\partial_x^k u_0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{|k| \leq 2L+7} \|\partial_x^k u_0\|_{L^2(\Omega)} \right.$$

$$\left. + [f; (1, \frac{3}{2}, 2L+5)](t) + [f; (2, \frac{3}{2}, 2L+7)](t) \right], \quad \forall t \geq 0$$

ここで、 C は L, Ω だけに依存する正定数である。

命題 2.1 を証明するためには、以下のような補題が必要である。

補題 2.2. (i) $u(t, x)$ を次のような Cauchy 問題の滑らかな解とする。

$$(2.5) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$$

$$(2.6) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

その時、すべての非負整数 L に対して

$$(2.7) \quad [u; (\infty, \frac{3}{2}, L)]'(t)$$

$$\leq C \left[\sum_{|M| \leq L} \|\partial_M^x u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \sum_{|M| \leq L+2} \|\partial_M^x u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right], \quad \forall t \geq 0$$

ここで、 C は L だけに依存する正定数である。

(ii) $u(t, x)$ を次のような Cauchy 問題の滑らかな解とする。

$$(2.8) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$$

$$(2.9) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

その時、任意の非負整数 L に対して、

$$(2.10) \quad [u; (\infty, \frac{3}{2}, L)]'(t)$$

$$\leq C \left[\sum_{|M| \leq L} \|\partial_M^x u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \sum_{|M| \leq L+2} \|\partial_M^x u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right.$$

$$\left. + [f; (1, \frac{3}{2}, L)]'(t) + [f; (2, \frac{3}{2}, L+2)]'(t) \right], \quad \forall t \geq 0$$

ここで、 C は L だけに依存する正定数である。

補題 2.3. 空間次元 $n=3$ とする。領域 Ω に対して条件 [A] が満たされていると仮定する。 $U(t)$ によって、初期境界値問題

$$(2.11) \quad \partial_t \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times [0, \infty)$$

$$(2.12) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

$$(2.13) \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

に対応する発展作用素を表わす。 a と b を $a, b > K$ なる正定数とする。 任意の $u_0(x) \in L^2_a(\Omega)$ に対して、

$$(2.14) \quad \|\Gamma(t)u_0\|_{L^2(\Omega_b)} \leq C t^{-\frac{3}{2}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \geq 0$$

ここで、 C は a, b, Ω だけに依存する正定数である。

問題 (2.1)–(2.3) の解を、境界 $\partial\Omega$ の付近では補題 2.3 によって評価し、境界から離れた所では補題 2.2 によって評価することにより、命題 2.1 を得る。

§3. energy 評価

命題 3.1. 領域 Ω を $\mathbb{R}^3$ におけるコンパクト集合の外部とし、境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。 その時、任意の非負整数 L に対して、問題 (2.1)–(2.3) の解 $u(t, x)$ は次の評価を満たす。

$$(3.1) \quad [u]_{(2, 0, 2L)}(t) \leq C \left[\sum_{|\alpha| \leq 2L} \|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2(\Omega)} \right]$$

$$+ [\phi; (2, \frac{3}{2}, 2L)](t) \quad , \quad \forall t \geq 0$$

ここで、 C は L, Ω だけに依存する正定数である。

問題 (2.1)–(2.3) の解 $u(t)$ は

$$(3.2) \quad u(t) = U(t)u_0 - i \int_0^t U(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

と表現できるので、これを評価すれば命題 3.1 が得られる。

§4. 定理 0.1 の証明.

定理 1.1 より局所解の存在することはすでにわかっているので、後は *a priori* 評価を求めればよい。そのために、Matsumura & Nishida's method をつかう。

定理 1.1 で与えられる局所解 $u(t, x)$ に対して次のように置く。

$$(4.1) \quad X(t) = [\phi; (2, 0, 12)](t)$$

$$(4.2) \quad Y(t) = [\phi; (\infty, \frac{3}{2}, 4)](t)$$

まず、命題 3.1 より

$$(4.3) \quad X(t) \leq C [E_1 + Y(t)^{p-1} [\phi; (\infty, 0, 6)](t) \cdot X(t)]$$

ここで、 E_1 は初期値のみに依存する正定数である。これは命題2.1を適用すると、

$$(4.4) \quad (1+t)^{\frac{r}{2}} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u \right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u \right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u \right) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

のような項が出てくる。但し、

$$(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{p+1}|) + 2(\bar{\alpha}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_{p+1}) \leq 12$$

で、 $\bar{u}$ は u の複素共役を表わす。一般性を失わずに、 $|\alpha_1| + 2\bar{\alpha}_1$ が最大で、 $|\alpha_2| + 2\bar{\alpha}_2$ が2番目に大きいと仮定して良い。その時、 $|\alpha_2| + 2\bar{\alpha}_2$ は6を越えることはなく、 $|\alpha_l| + 2\bar{\alpha}_l$ ($l=3, 4, \cdots, p+1$)は4を越えることはないということを注意しておく。

(4.4)で $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u$ の項は $L^2(\Omega)$ のままで残しておき、その他の項は $L^\infty(\Omega)$ の項をとる。すると、(4.3)が得られる。

Sobolevの埋蔵定理により、(4.3)は

$$(4.5) \quad X(t) \leq c [E_1 + Y(t)^{p-1} X(t)^2], \quad \forall t \geq 0$$

となる。

次に命題2.1より、

$$(4.6) \quad Y(t) \leq c [E_2 + Y(t)^{p-1} X(t)^2 + Y(t)^{p-1} [u; (\infty, 0, 6)](t) \cdot X(t)]$$

ここで、 E_2 は初期値のみによって決まる正定数である。こ

これは、命題 2.1 を適用すると、

$$(4.7) \quad (1+t)^{\frac{3}{2}} \left\| \left(\partial_x^{\alpha_1} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_1} u \right) \left(\partial_x^{\alpha_2} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_2} u \right) \cdots \left(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+1}{2}}} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_{\frac{p+1}{2}}} u \right) \left(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+1}{2}}} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_{\frac{p+1}{2}}} u \right) \cdots \left(\partial_x^{\alpha_{p+1}} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_{p+1}} u \right) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$(4.8) \quad (1+t)^{\frac{3}{2}} \left\| \left(\partial_x^{\alpha_1} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_1} u \right) \left(\partial_x^{\alpha_2} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_2} u \right) \cdots \left(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+1}{2}}} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_{\frac{p+1}{2}}} u \right) \left(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+1}{2}}} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_{\frac{p+1}{2}}} u \right) \cdots \left(\partial_x^{\alpha_{p+1}} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_{p+1}} u \right) \right\|_{L^1(\Omega)}$$

のよう な項が現われる。但し、(4.7) では

$$(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{p+1}|) + 2(\bar{\alpha}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_{p+1}) \leq 11$$

で、(4.8) では

$$(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{p+1}|) + 2(\bar{\alpha}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_{p+1}) \leq 9$$

である。前と同じように、一般性を失わずに、 $|\alpha_1| + 2\bar{\alpha}_1$ が最大で $|\alpha_2| + 2\bar{\alpha}_2$ が 2 番目に大きいとする。その時、 $|\alpha_l| + 2\bar{\alpha}_l$ ($l=3, 4, \dots, p+1$) は (4.7)、(4.8) とともに 4 を越えることはないということを注意しておく。(4.7) では、 $\partial_x^{\alpha_1} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_1} u$ を $L^2(\Omega)$ ノルムのまま残しておき、他の項は $L^\infty(\Omega)$ ノルムをとる。(4.8) では、 $\partial_x^{\alpha_1} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_1} u$ と $\partial_x^{\alpha_2} \bar{\partial}_t^{\bar{\alpha}_2} u$ に対して、Schwarz の不等式で $L^2(\Omega)$ とし、他の項は $L^\infty(\Omega)$ ノルムをとる。すると、(4.6) を得る。Sobolev の埋蔵定理により、(4.6) は

$$(4.9) \quad Y(t) \leq C [E_2 + Y(t)^{p-1} X(t)^2], \quad \forall t \geq 0$$

となる。 E_1 と E_2 は、初期値を十分小さくすることにより、

いくらでも小さくできる。故に、(4.5) と (4.9) は、初期値が十分小さくなると、 $X(t)$ はすべての時間 $t \geq 0$ に対して有界でなければならぬことを示している。従って、大域解の存在が示せた。

注意 上では、 $n=3$ の場合を示したが、ほとんどの定理と補題は $n \geq 4$ の場合にも成立する。 $n \geq 4$ の場合の最終的な結果は現在研究中である。

[参考文献]

- [1] H. Brezis and T. Gallouet, Nonlinear Analysis, 4 (4), 677-681 (1980)
- [2] J. B. Baillon, T. Cazenave and M. Figueira, C.R. Acad. Sci., Paris, 284, 869-872 (1977).
- [3] J. Ginibre and G. Velo, J. Functional Analysis, 32, 1-32, 33-71 (1979).

- [4] R.T. Glassey, J. math. Phys., 18,
1794-1797 (1977).
- [5] B.R. Vainberg, Russian Math. Surveys,
30:2, 1-58 (1975).
- [6] M.E. Taylor, Comm. Pure Appl. Math.,
29, 1-38 (1976).
- [7] C.S. Morawetz, J.V. Ralston, and
W.A. Strauss, Comm. Pure Appl.
Math., 30, 447-508 (1977).
- [8] R.B. Melrose, Duke Math. Journal,
46 (1), 43-59 (1979).
- [9] A. Matsumura and T. Nishida, Proc.
Japan Acad., 55, Ser. A, 337-342 (1979).