

2-local cores of finite groups

北大 大学院 林 誠

§ 1 序

“有限群 G が次の 3 つの条件; (i) G は *balanced group*
(ii) $\text{SCN}_3(G)_2 \neq \emptyset$ (iii) $O(G) = 1$ を満たしているとき、 G の
2-local core は 1 である。”これは、D. Goldschmidt
D. Gorenstein 等に依り得られた 2-signalizer functor
に関する有名な結果ですが、ここでは *balanced group* で
ある為の 1 つの条件について考えてみたいと思います。

以下、記号は一般的なものを用います。(例えば、D. Gorenstein 著 “Finite Groups” を参照して下さい。)

尚、 $(G)_p$ に依り G の或る Sylow p -subgroup を表わすことに
します。

§2 命題とその証明の概略

有限群の族 $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{X}$ を次の様に定義します。

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{l} L_2(q) \quad q \text{ は奇数でフェルマ素数でもメルセヌ素数でも } q \\ \quad \quad \quad \text{でもない。} \\ U_3(q) \quad q \text{ はフェルマ素数亦は } q \\ A_7 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{M} = \left\{ M / M / (Z(M))_2 \cong L \times L \times \cdots \times L \quad L \in \mathcal{L} \right\}$$

$$\mathcal{X} = \left\{ X / \begin{array}{l} H/O(H) \ntrianglelefteq M \quad \text{for any 2-local subgroup} \\ H \text{ of } X \end{array} \right\}$$

命題: $\mathcal{X} \ni X$ ならば X は *balanced group*

証明の概略: (1) X の任意の 2-local subgroup は $\mathcal{X}$ に入る。

もし $\mathcal{X} \ni H = N_X(T)$ とすると、 $\mathcal{X}$ の定義より H の 2-local subgroup $H_0 = N_H(T_0)$ で $H_0/O(H_0) \triangleright \overline{M}_0$, $\overline{M}_0 \in \mathcal{M}$ となるものが存在する。 $\overline{M}_0$ の $H_0 \cap$ の逆写像を $\overline{M}_0$ とおく。 $\overline{M}_0$ の任意の奇数位数の部分群 K は TT_0 に作用して、

$$[TT_0, K] = [TT_0, K, K] \leq [O_2(M_0), K] \leq O_2(M_0) \cap O(H) = 1$$

$$\text{となり} \quad K \leq C_X(TT_0)$$

$$K \text{ の任意性より} \quad O^2(M_0) \leq C_{M_0}(TT_1)$$

$$C = C_X(TT_0) \leq H \text{ と } O^2(M_0) \text{ char } M_0 \triangleleft H \text{ より } O^2(M_0) \triangleleft C$$

依って $O(M_1) \subseteq O(C)$ より $\overline{M_1} \triangleleft \overline{C}$

とて、 $\overline{C} = C/O(C)$, $\overline{M_1}$ は $O^2(M_0)$ の $\overline{C}$ への準同型像

このとき $O^2(M_0) \in \mathcal{M}$ 且つ $C \triangleleft N_X(TT_1) = N$ であるから

$\mathcal{M}$ の定義より、 $\mathcal{M}$ の元 $\overline{M_2}$ が存在して $\overline{M_2} = N/O(N)$ となり、これは $\mathcal{R} \ni X$ に矛盾する。依って (1) が成立。

(2) $Z(X) \geq Z$ とすると X/Z は $\mathcal{R}$ に入る。

もし $\mathcal{R} \not\ni X = X/Z$ とすると、 X の 2-local subgroup $\tilde{H} = N_X(\tilde{T}_0)$ が存在して、 $\tilde{H} = \tilde{H}/O(\tilde{H}) \triangleleft \tilde{M}$ とて $\tilde{M} \in \mathcal{M}$

このとき $\tilde{T}_0$ の X への逆写像を T_0 , $H = N_X(T_0)$ $\tilde{M}$ を $\tilde{H}$ の $\tilde{H}$ への逆写像、 M を $\tilde{M}$ の X への逆写像とすると、 $H \triangleleft M$

且つ $M/O(M) \in \mathcal{R}$ 。 $O(M) \subseteq O(X)$ より $H/O(H) \triangleleft M/O(H) \in \mathcal{R}$ となり、これは $\mathcal{R} \ni X$ に矛盾。

(3) X を命題の極小反例群とすれば $O(X) = O_2(X) = 1$

$O(X) = 1$ は明らか。もし $O_2(X) \neq 1$ とすると $X_0 = C_X(O_2(X)) \in \mathcal{R}$ であり、 X の 2-local core が X_0 に入ること及び

$Z(O_2(X)) \subseteq Z(X_0)$ に依り $X/Z(O_2(X))$ に帰納法を適用して命題が成立。依って $O_2(X) = 1$ 。

最後に X の各 2-local subgroup が $\mathcal{R}$ に入ることより、各 2-local subgroup に帰納法を適用して balance condition の成立を容易に確かめることができる。