

写像の A_n 構造について

九大理 岩瀬則夫 (Norio Iwase)

§ 0. J.D. Stasheff[1] の導入した A_n 空間、つまり A_n 構造を持つ空間あるいは、(同値であるが) A_n 形式を許す空間、に対して、そのような空間の間の写像: $X \rightarrow Y$ は、 Y が A_∞ 構造を持つときに、あるいは、 n が 3 以下のときに、各々 J.D. Stasheff[2], A. Zabrodsky[4] により、「 A_n 写像」という概念が定められ、[4]では、これを用いて有限 H 空間のホモトピー結合性が論じられ、又 $n \geq 4$ についても言及されているが、その場合の A_n 写像の明確な定義は与えられていない。($n=4$ に対しては、J.D. Stasheff[3] が、写像の A_4 形式を与える、パラメーターの複体を図示しているが、そのような複体の、統一的な定義は、見当たらない。) 又、 A_n 空間の間の写像としては、空間の A_n 構造に付随する A_n 形式と strictly commute する写像 (A_n 準同型と呼ばれる) という概念があるが、これは、ホモトピーに対して閉じた

概念ではない。ここでは、「 A_n 構造を保つ写像」という、ホモトピーに対して閉じた概念を、 A_n 準同型を含むものとして定め、これを A_n 写像と呼ぶことにする。このとき、 A_2 写像、 A_3 写像、 A_∞ 写像は、各々 H 写像、ホモトピー結合性を保つ写像、loop 写像と一致する。また、 A_n 写像は、次のような性質を持つことが、確かめられる。

- (1) その homotopy fibre は、 A_n 構造を持つ。
- (2) 二つの A_n 写像による Pull-Back は、 A_n 構造を持つ。

このとき、次の様な問題が、考えられる。

問題 1. X が A_n 空間のときに、

$$\mathcal{E}_k = \begin{cases} \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ は } A_k \text{ 写像}\}, & n \geq k \geq 2 \\ \{f: X \rightarrow X\}, & k = 1 \end{cases}$$

とおくとき、 $\mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2 \supset \dots \supset \mathcal{E}_{n-1} \supset \mathcal{E}_n$ となるが、等号を成立させない空間が、各段階に対して存在するか。

問題 2. X が有限 A_n 空間のとき、次のホモトピー同値は、 A_{n-1} 写像にとれるか。また、 A_n 写像にとれるか。

$$X_{(0)} \simeq \prod_{i=1}^l S_{(0)}^{2n_i-1}, \quad l \text{ は } X \text{ の rank.}$$

§ 1. A_n 空間

空間 X の A_n 構造を, J.D. Stasheff は, 次の様に定義した。

定義 1-1 X の A_n 構造とは, 次の準ファイバー空間の列 $\{E^i(X), p_i^X, XP^{i-1}\}, 1 \leq i \leq n\}$ である。

$$\begin{array}{ccccccc} X = E^1(X) & \subset & E^2(X) & \subset & \cdots & \subset & E^n(X) \\ \downarrow p_1^X & & \downarrow p_2^X & & & & \downarrow p_n^X \\ * = XP^0 & \subset & XP^1 & \subset & \cdots & \subset & XP^{n-1} \subset XP^n \end{array}$$

を可換な図式とし, さらに, $E^k(X)$ は $E^{k+1}(X)$ で可縮。又 XP^{k+1} は, p_{k+1}^X の mapping cone である。

X が A_n 構造を持つとき, J.D. Stasheff は, n 重積の多重ホモトピー (A_n 形式) の存在を示し, これを用いて, 上のような準ファイバー空間を標準的に構成した。それを次に述べる。まず, 次の様な相対同相 $\sigma_{k+1} : (D^k, E^k) \rightarrow (P^k, P^{k+1})$ が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} D^{k-1}(X) & \subset & E^k(X) & \subset & D^k(X) \\ \downarrow \sigma_k^X & & \downarrow p_k^X & & \downarrow \sigma_{k+1}^X & \text{ : 可換} \\ XP^{k-1} & = & XP^{k-1} & \subset & XP^k \end{array}$$

$$\text{ii) } (D^k, E^k) \simeq (C(E^k), E^k) : \text{ホモトピー同値}$$

次に, A_n 形式を定義するために, 次の, J.D. Stasheff の複体 $\{K_i\}$ を用意する。

$$(1) K_i \cong [0, 1]^{i-2}; \text{ 同相写像}$$

$$(2) \partial K_i = \bigcup_{1 \leq k \leq r, 2 \leq r, 2 \leq s, r+s=i+1} K_k(r, s)$$

(3) 辺作用素 $\partial_k(r, s): K_r \times K_s \rightarrow K_k(r, s)$; 同相写像, が存在する。

(4) 退化作用素 $\partial_j: K_i \rightarrow K_{i-1}$ が存在する。($1 \leq j \leq i$)

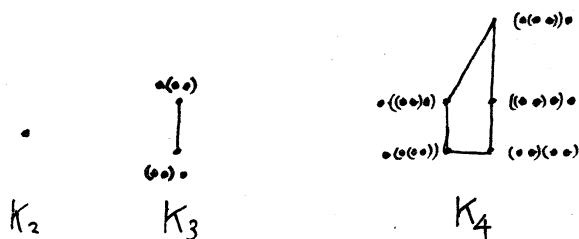
$$(5) \partial_k(r, s_1 + s_2 - 1)(1 \times \partial_j(s_1, s_2)) \\ = \partial_{k+j-1}(r + s_1 - 1, s_2)(\partial_k(r, s_1) \times 1), (1 \leq k \leq r, 1 \leq j \leq s_1)$$

$$(6) \partial_{k+r_2-1}(r_1 + r_2 - 1, s)(\partial_j(r_1, r_2) \times 1) \\ = \partial_j(r_1 + s - 1, r)(\partial_k(r_1, s) \times 1)(1 \times T), (1 \leq j < k \leq r,$$

但し, $T(p, \sigma) = (\sigma, p)$)

$$(7) \partial_j \partial_k(r, s) \\ = \begin{cases} \partial_{k-1}(r-1, s)(\partial_j \times 1), (1 \leq j < k \leq r, r > 2) \\ \partial_k(r, s-1)(1 \times \partial_{j-k+1}), (k \leq j < k+s, s > 2) \\ \partial_k(r-1, s)(\partial_{j-s+1} \times 1), (k+s \leq j \leq i, r > 2) \\ \pi_1, (r=2, k=2, j=1 \text{ または } r=2, k=1, j=i) \\ \pi_2, (s=2, k=j, \text{ または } s=2, j=k+1) \end{cases}$$

但し, π_t は, 第 t 成分への射影



これを用いて、空間 X の A_n 形式が、次の様に与えられた

定義 1-2 $\{ M_i^X : K_i \times X^i \rightarrow X \mid i \leq n \}$ が A_n 形式とは、次の三条件が成立する事である。

(1) M_2^X は、 X の積を与える。

$$(2) \quad M_i^X(\partial_k(r, s)(\rho, \sigma), x_1, \dots, x_i) \\ = M_r^X(\rho, x_1, \dots, x_{k-1}, M_s^X(\sigma, x_k, \dots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \dots, x_i)$$

$$(3) \quad M_i^X(\tau, x_1, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_i) \\ = M_{i-1}^X(\Delta_j(\tau), x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_i)$$

さらに、 $E^i(X)$, $D^i(X)$, XP^i は、次の条件を満たす様に帰納的に定まる。

$$(1) \quad E^1(X) = X, \alpha_i : (K_{i+1} \times X^i, K_{i+1} \times X \times X^{[i-1]} \cup \partial K_{i+1} \times X^i) \rightarrow (E^i(X), E^{i-1}(X)); \text{ 相対同相 } (i \geq 2)$$

$$(2) \quad XP^0 = *, \beta_i : (K_{i+1} \times X^{i-1}, K_{i+1} \times X^{[i-1]} \cup \partial K_{i+1} \times X^{i-1}) \rightarrow (XP^{i-1}, XP^{i-2}); \text{ 相対同相 } (i \geq 2)$$

$$(3) \quad \gamma_i : (K_{i+1} \times X^{i-1}, K_{i+1} \times X^{[i-1]} \cup \partial K_{i+1} \times X^{i-1}) \rightarrow (D^{i-1}(X), E^{i-1}(X)); \text{ 相対同相 } (i \geq 2)$$

$$(4) \quad \alpha_i(\tau, x_1, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_i) \\ = \alpha_{i-1}(\Delta_j(\tau), x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_i), (2 \leq j \leq i)$$

$$(5) \quad \alpha_i(\partial_k(r, s)(\rho, \sigma), x_1, \dots, x_i)$$

$$= \begin{cases} \alpha_{r-1}(\rho, x_1, \dots, x_{k-1}, M_S^X(\sigma, x_k, \dots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \\ \dots, x_i), (k < r) \\ \alpha_{r-1}(\rho, x_1, \dots, x_{r-1}), (k = r) \end{cases}$$

$$(6) \quad \beta_i(\tau, x_2, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_i) \\ = \beta_{i-1}(\mathcal{A}_j(\tau), x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_i), (2 \leq j \leq i)$$

$$(7) \quad \beta_i(\partial_k(r, s)(\rho, \sigma), x_2, \dots, x_i) \\ = \begin{cases} \beta_{r-1}(\rho, x_2, \dots, x_{k-1}, M_S^X(\sigma, x_k, \dots, x_{k+s-1}), \dots \\ \dots, x_i), (1 < k < r) \\ \beta_{r-1}(\rho, x_{s+1}, \dots, x_i), (k = 1) \\ \beta_{r-1}(\rho, x_2, \dots, x_{r-1}), (k = r) \end{cases}$$

$$(8) \quad \gamma_i(\tau, x_2, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_i) \\ = \alpha_{i-1}(\mathcal{A}_j(\tau), *, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_i), \\ (2 \leq j \leq i)$$

$$(9) \quad \gamma_i(\partial_k(r, s)(\rho, \sigma), x_2, \dots, x_i) \\ = \begin{cases} \alpha_{r-1}(\rho, *, x_2, \dots, x_{k-1}, M_S^X(\sigma, x_k, \dots, x_{k+s-1}) \\ , \dots, x_i), (1 < k < r) \\ \alpha_{r-1}(\rho, M_{S-1}^X(\mathcal{A}_1(\sigma), x_2, \dots, x_s), x_{s+1}, \dots, \\ x_i), (k = 1) \\ \alpha_{r-1}(\rho, x_2, \dots, x_{r-1}), (k = r) \end{cases}$$

これらを用いて、次節において写像の A_n 構造及び、写像の A_n 形式を与える。

§2 A_n 写像

先ず、写像の A_n 構造を与える。 X, Y を A_n 空間とし、写像 $f: X \rightarrow Y$ をとる。

定義 2-1 f の A_n 構造とは、次を満たす写像の列 $\{f_k^D\}$, $\{f_k^P\}$ ($1 \leq k \leq n$) である。

$$\begin{array}{ccc} (D^k(X), E^k(X)) & \xrightarrow{f_k^D} & (D^k(Y), E^k(Y)) \\ \downarrow \sigma_{k+1}^X & & \downarrow \sigma_{k+1}^Y \quad : \text{可換} \\ (Xp^k, Xp^{k-1}) & \xrightarrow{f_k^P} & (Yp^k, Yp^{k-1}) \end{array}$$

$$\text{ii) } f_k^D = f_n^D|_{D^k(X)}, \quad f_k^P = f_n^P|_{Xp^k}, \quad f = f_1^D|_X$$

次に、写像の A_n 形式を定めるために、パラメーターの複体を与える。この複体 $\{\Gamma_i\}$ は、 $\{K_i\}$ と同様に、次の様な性質を持つ様に、帰納的に定義される。

(1) $\Gamma_i \cong [0, 1]^{i-1}$, $\varepsilon_i: [0, 1] \times K_i \rightarrow \Gamma_i$; 同相写像, が存在する。

$$(2) \quad \partial \Gamma_i = \left(\bigcup_{1 \leq k \leq r, 2 \leq s, r+s=i+1} \Gamma_k(r, s) \right) \cup \left(\bigcup_{2 \leq t, 1 \leq r_1, \dots, 1 \leq r_t, r_1 + \dots + r_t = i} \Gamma(t, r_1, \dots, r_t) \right)$$

(3) 辺作用素 $\delta_k(r, s): \Gamma_r \times K_s \rightarrow \Gamma_k(r, s)$; 同相写像, が存在する。

(4) 辺作用素 $\delta(t, r_1, \dots, r_t): K_t \times \Gamma_{r_1} \times \dots \times \Gamma_{r_t} \rightarrow \Gamma(t, r_1, \dots, r_t)$; 同相写像, が存在する。

(5) 退化作用素 $d_j: \Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i-1}$ が存在する。 ($1 \leq j$)

$\cong i)$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \delta_{k+s_1-1}(r+s_1-1, s_2)(\delta_j(r, s_1) \times 1) \\
 &= \delta_j(r+s_2-1, s_1)(\delta_k(r, s_2) \times 1)(1 \times T), \quad (1 \leq j < k \\
 &\leq r, \quad T(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_2, \sigma_1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \delta_k(r, s_1+s_2-1)(1 \times \partial_j(s_1, s_2)) \\
 &= \delta_{k+j-1}(r+s_1-1, s_2)(\delta_k(r, s_1) \times 1), \quad (1 \leq j \leq s_1, 1 \leq k \leq r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \delta_{r_1+\dots+r_{j-1}+k}(r, s)(\delta(t, r_1, \dots, r_t) \times 1) \\
 &= \delta(t, r_1, \dots, r_{j-1}, r_j+s-1, r_{j+1}, \dots, r_t)(1 \times 1 \times \dots \\
 &\quad \times 1 \times \delta_k(r_j, s) \times 1 \times \dots \times 1) T', \quad (1 \leq j \leq t, 1 \leq k \leq r_j, \\
 &\quad T'(\tau, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t, \sigma) = (\tau, \rho_1, \dots, \rho_j, \sigma, \rho_{j+1}, \dots, \rho_t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \delta(t+s-1, r_1, \dots, r_{t+s-1})(\partial_k(t, s) \times 1 \times \dots \times 1) \\
 &= \delta(t, r_1, \dots, r_{k-1}, r_k+\dots+r_{k+s-1}, r_{k+s}, \dots, r_{t+s-1})(1 \times 1 \\
 &\quad \times \dots \times 1 \times \delta(s, r_k, \dots, r_{k+s-1}) \times 1 \times \dots \times 1) T'', \quad (1 \leq \\
 &\quad k \leq t, \quad T''(\tau, \sigma, \dots, \rho_{t+s-1}) = (\tau, \rho_1, \dots, \rho_{k-1}, \sigma, \\
 &\quad \rho_k, \dots, \rho_{t+s-1}))
 \end{aligned}$$

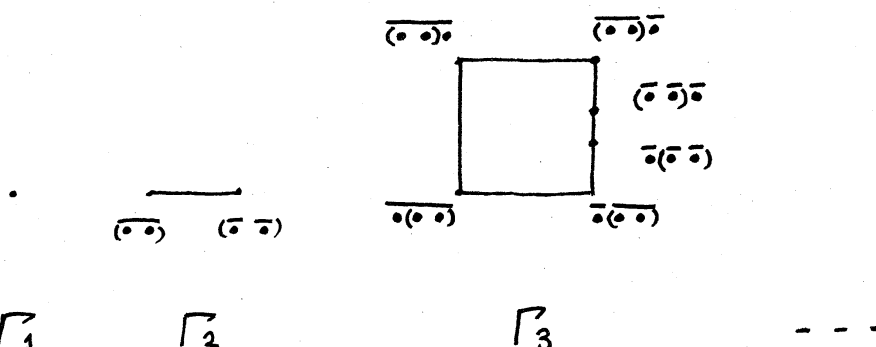
$$\begin{aligned}
 (10) \quad & d_j \delta_k(r, s) \\
 &= \begin{cases} \delta_{k-1}(r-1, s)(d_j \times 1), & (j < k) \\ \delta_k(r, s-1)(1 \times d_{j-k+1}), & (k \leq j < k+s, s > 2) \\ \delta_k(r-1, s)(d_{j-s+1} \times 1), & (k+s \leq j) \\ \pi_1, & (k=j, s=2 \text{ または } k+1=j, s=2, \pi_1(\rho, \sigma) \\ &= \rho) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (II) \quad & d_{r_1+\dots+r_{k-1}+j} \delta(t, r_1, \dots, r_t) (\tau, \rho_1, \dots, \rho_t) \\
 = & \begin{cases} \delta(t-1, r_1, \dots, r_{k-1}, r_{k+1}, \dots, r_t) (d_j(\tau), \rho_1, \\ \dots, \rho_{k-1}, \rho_{k+1}, \dots, \rho_t), & (1=j=r_k, t>2) \\ \delta(t, r_1, \dots, r_{k-1}, r_k-1, r_{k+1}, \dots, r_t) (\tau, \rho_1, \\ \dots, \rho_{k-1}, d_j(\rho_k), \rho_{k+1}, \dots, \rho_t), & (1 \leq j \leq r_k \\ & r_k > 1) \\ \rho_1, & (j=r_1=1, k=1, t=2) \\ \rho_2, & (j=\bar{1}, r_2=1, k=2, t=2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

これを用いて、写像 f の A_n 形式が、ここで次の様に与えられる。

定義 2-2 $\{F_i: \Gamma_i \times X^i \rightarrow Y\}$ が A_n 形式とは、次の四条件が成立することである。

- (1) $F_1 = f,$
- (2) $F_i(\delta_k(r, s)(\rho, \sigma), x_1, \dots, x_i)$
 $= F_r(\rho, x_1, \dots, x_{k-1}, M_s^X(\sigma, x_k, \dots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \dots, x_i)$
- (3) $F_i(\delta(t, r_1, \dots, r_t)(\tau, \rho_1, \dots, \rho_t), x_1, \dots, x_i)$
 $= M_t^Y(\tau, F_{r_1}(\rho_1, x_1, \dots, x_{r_1}), \dots, F_{r_t}(\rho_t, x_{r_1+\dots+r_{t-1}+1}, \dots, x_{r_1+\dots+r_t}))$
- (4) $F_i(\gamma, x_1, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_i)$
 $= F_{i-1}(d_j(\gamma), x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_i)$



このとき、次の定理を得る。

定理 2-3 A_n 空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し、次の条件は、同値である。

- i) f は、 A_n 構造を持つ。
- ii) f は A_n 形式を許す。

§ 3 定理の証明

同相写像 $\varepsilon_i: I \times K_i \rightarrow \Gamma_i$ により、 $\{1\} \times K_i$ の部分は、 $\cup \Gamma(t, r_1, \dots, r_t)$ の上に写される。この部分から K_i への射影 $\omega_i: \varepsilon_i(\{1\} \times K_i) \rightarrow K_i$ を、次の様に定める。

$$\omega_i(\varepsilon_i(1, \tau)) = \tau$$

このとき、定義から、 ω_i は次の様な可換性を持つ。

補題 3-1

- i) $d_j \omega_i(\gamma) = \omega_{i-1} d_j(\gamma)$
- ii) $\partial_k(r, s)(\omega_r \times 1) = \omega_i d_k(r, s)$

定理 2-3 の ii) $\Rightarrow$ i) を示す。 K_{i+1} の元 $\sigma = \omega_{i+1}(\gamma)$, $\gamma = \delta(t, r_1, \dots, r_t)(\tau, \rho_1, \dots, \rho_t)$ に対して、次の様に、

写像 $\{ f_{i-1}^E : E^{i-1}(X) \rightarrow E^{i-1}(Y) \}$, $\{ f_{i-1}^P : X P^{i-1} \rightarrow Y P^{i-1} \}$,
 $\{ f_{i-1}^D : D^{i-1}(X) \rightarrow D^{i-1}(Y) \}$ を定める。

定義 3-2

$$(1) \quad f_{i-1}^E (\alpha_{i-1}^X (\sigma, x_1, \dots, x_{i-1})) \\ = \alpha_{t-1}^Y (\tau, F_{r_1} (\rho_1, x_1, \dots, x_{r_1}), \dots, F_{r_{t-1}} (\rho_{t-1}, x_{r_1+\dots+r_{t-2}+1}, \dots, x_{r_1+\dots+r_{t-1}}))$$

$$(2) \quad f_{i-1}^P (\beta_i^X (\sigma, x_2, \dots, x_i)) \\ = \beta_{t-1}^Y (\tau, F_{r_2} (\rho_2, x_{r_1+1}, \dots, x_{r_1+r_2}), \dots, F_{r_{t-1}} (\rho_{t-1}, x_{r_1+\dots+r_{t-2}+1}, \dots, x_{r_1+\dots+r_{t-1}}))$$

$$(3) \quad f_{i-1}^D (\gamma_i^X (\sigma, x_2, \dots, x_i)) \\ = \begin{cases} \alpha_{t-1}^Y (\tau, F_{r_1-1} (\alpha_1 (\rho_1), x_2, \dots, x_{r_1}), \dots, F_{r_{t-1}} (\rho_{t-1}, x_{r_1+\dots+r_{t-2}+1}, \dots, x_{r_1+\dots+r_{t-1}})), & (r_1 > 1) \\ \gamma_{t-1}^Y (\tau, F_{r_2} (\rho_2, x_2, \dots, x_{r_2+1}), \dots, F_{r_{t-1}} (\rho_{t-1}, x_{r_2+\dots+r_{t-2}+2}, \dots, x_{r_2+\dots+r_{t-1}+1})), & (r_1 = 1) \end{cases}$$

このとき、 $f_{i-1}^E = f_{i-1}^D | E^{i-1}(X)$ であり、 $\{ \{ f_i^D \}, \{ f_i^P \} \}$ が、 f の A_n 構造を与える。

また、定理 2-3 の ii) $\Rightarrow$ iii) の証明は、次の関係式を用いて、Stasheff [1] における、空間の A_n 形式の存在証明と同様に得られる。

$$F_i (\gamma, x_1, \dots, x_i) = f_i^D (\gamma_{i+1}^X (\partial_1(i+1, 2) (\tau, *), x_1, \dots, x_i)) \\ (\tau = \omega_{i+1} (\gamma'), \gamma' = \delta (2, i, 1) (* , \gamma , *))$$

§4 A_n 準同型

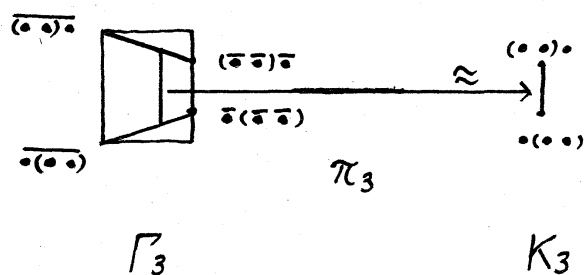
最後に、 A_n 準同型が、 A_n 形式を許すことをみる。複体 Γ_i は、 $[0, 1] \times K_i$ を多面体分割して作られるが、次の条件をみたす様に、射影 $\pi_i: \Gamma_i \rightarrow K_i$ を定める。

$$(1) \quad \partial_j \pi_i = \pi_{i-1} \partial_j$$

$$(2) \quad \pi_i \partial_k(r, s) = \partial_k(r, s)(\pi_r \times 1)$$

$$(3) \quad \pi_i \delta(i, 1, \dots, 1)(\tau, *, \dots, *) = \tau$$

例えば、 π_3 は次の様に定める。



そこで、 f を A_n 準同型とする。つまり、各 $i \leq n$ に対し、 $f M_i^X(\tau, x_1, \dots, x_i) = M_i^Y(\tau, f(x_1), \dots, f(x_i))$ が成立する。このとき、 $\{F_i: \Gamma_i \times X^i \rightarrow Y\}$ を、

$$F_i(\gamma, x_1, \dots, x_i) = f M_i^X(\pi_i(\gamma), x_1, \dots, x_i)$$

とおくと、この $\{F_i\}$ が、射影 π_i の性質から、 f の A_n 形式を与える。

文献

- [1] J.D. Stasheff: Homotopy associativity of H-spaces, I, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 275-292.

- [2] J.D. Stasheff: Homotopy associativity of H-spaces, II,
Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 293-312.
- [3] J.D. Stasheff: H-spaces from a Homotopy Point of view,
Lecture Notes in Math. 161 Springer-Verlag (1970).
- [4] A. Zabrodsky: Homotopy associativity and finite CW-
complexes, Topology, 9 (1970) 121-128.