

Tsallis の relative entropy と relative operator entropy

柳 研二郎 (Kenjiro Yanagi)

山口大・工

(Department of Applied Science, Yamaguchi University)

古市 茂 (Shigeru Furuichi)

山口東京理科大

(Tokyo University of Science in Yamaguchi)

栗山 憲 (Ken Kuriyama)

山口大・工

(Department of Applied Science, Yamaguchi University)

1 Classical Tsallis relative entropy

Definition 1 次で定義される $S_q(X)$ を *Tsallis entropy* という.

$$S_q(X) = - \sum_x p(x)^q \ln_q p(x),$$

ただし $p(x) = P(X = x)$ は *random variable* X の *probability distribution* でありまた

$$\ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad x \geq 0, \quad q \geq 0$$

とする.

このとき

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q(X) = S(X) = - \sum_x p(x) \log p(x)$$

である. すなわち Shannon entropy に収束する.

Definition 2 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ を 2 つの *probability distribution* とする. ただし $a_j > 0, b_j > 0$ を仮定する. このとき次で定義される $D_q(A|B)$ を *Tsallis relative entropy* という.

$$D_q(A|B) = - \sum_{j=1}^n a_j \ln_q \frac{b_j}{a_j} = \frac{1 - \sum_{j=1}^n a_j^q b_j^{1-q}}{1 - q},$$

ただし $0 \ln_q \infty = 0$ と定義する.

このとき

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q(A|B) = D_1(A|B) = \sum_{j=1}^n a_j \log \frac{a_j}{b_j}$$

である. すなわち Kullback-Leibler information に収束する.

Proposition 1 *Tsallis relative entropy* の性質は次の通りである.

(1)(Nonnegativity): $D_q(A|B) \geq 0$.

(2)(Symmetry):

$$D_q(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)} | b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(n)}) = D_q(a_1, \dots, a_n | b_1, \dots, b_n).$$

(3)(Possibility of extension):

$$D_q(a_1, \dots, a_n, 0 | b_1, \dots, b_n, 0) = D_q(a_1, \dots, a_n | b_1, \dots, b_n).$$

(4)(Pseudoadditivity):

$$\begin{aligned} & D_q(A^{(1)} \times A^{(2)} | B^{(1)} \times B^{(2)}) \\ &= D_q(A^{(1)} | B^{(1)}) + D_q(A^{(2)} | B^{(2)}) + (q-1)D_q(A^{(1)} | B^{(1)})D_q(A^{(2)} | B^{(2)}), \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} A^{(1)} \times A^{(2)} &= \{a_j^{(1)} a_j^{(2)} | a_j^{(1)} \in A^{(1)}, a_j^{(2)} \in A^{(2)}\}, \\ B^{(1)} \times B^{(2)} &= \{b_j^{(1)} b_j^{(2)} | b_j^{(1)} \in B^{(1)}, b_j^{(2)} \in B^{(2)}\}. \end{aligned}$$

(5)(Joint convexity): $0 \leq \lambda \leq 1$, $q \geq 0$ とする. $A^{(i)} = \{a_j^{(i)}\}$, $B^{(i)} = \{b_j^{(i)}\}$, $(i = 1, 2)$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & D_q(\lambda A^{(1)} + (1-\lambda)A^{(2)} | \lambda B^{(1)} + (1-\lambda)B^{(2)}) \\ & \leq \lambda D_q(A^{(1)} | B^{(1)}) + (1-\lambda)D_q(A^{(2)} | B^{(2)}). \end{aligned}$$

(6)(Strong additivity):

$$\begin{aligned} & D_q(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i+1}, \dots, a_n | b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i+1}, \dots, b_n) \\ &= D_q(a_1, \dots, a_n | b_1, \dots, b_n) + b_i^{1-q} a_i^q D_q\left(\frac{a_{i_1}}{a_i}, \frac{a_{i_2}}{a_i} \middle| \frac{b_{i_1}}{b_i}, \frac{b_{i_2}}{b_i}\right), \end{aligned}$$

ただし $a_i = a_{i_1} + a_{i_2}$, $b_i = b_{i_1} + b_{i_2}$.

Proof.

(1): $-\ln_q(x)$ は convex function であるので次を得る.

$$D_q(A|B) \equiv - \sum_{j=1}^n a_j \ln_q \frac{b_j}{a_j} \geq - \ln_q \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{b_j}{a_j} \right) = 0.$$

(2), (3) 及び (4): 明らか.

(5): [3] の generalized log-sum inequality より任意の $\alpha_i, \beta_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, $q \geq 0$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \ln_q \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \ln_q \left(\frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \right). \quad (1)$$

これを用いればよい.

(6): $q \geq 0$ に対して function L_q を次のように定義する.

$$L_q(x, y) \equiv -x \ln_q \frac{y}{x}.$$

また次の記号を導入する.

$$a_{i_1} = a_i(1-s), \quad a_{i_2} = a_i s, \quad b_{i_1} = b_i(1-t), \quad b_{i_2} = b_i t.$$

このとき

$$L_q(x_1 x_2, y_1 y_2) = x_2 L_q(x_1, y_1) + x_1 L_q(x_2, y_2) + (q-1) L_q(x_1, y_1) L_q(x_2, y_2).$$

これを用いればよい.

q.e.d.

Remark 1 次が成り立つ.

(1) Proposition 1 の (1) より $S_q(A) \leq \ln_q n$.

(2) Proposition 1 の (4) より

$$S_q(A^{(1)} \times A^{(2)}) = S_q(A^{(1)}) + S_q(A^{(2)}) + (1-q) S_q(A^{(1)}) S_q(A^{(2)}).$$

(3) Proposition 1 の (5) より

$$S_q(\lambda A^{(1)} + (1-\lambda) A^{(2)}) \geq \lambda S_q(A^{(1)}) + (1-\lambda) S_q(A^{(2)}).$$

(4) Proposition 1 の (6) より

$$\begin{aligned} & S_q(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= S_q(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) + a_i^q S_q\left(\frac{a_{i_1}}{a_i}, \frac{a_{i_2}}{a_i}\right). \end{aligned}$$

A, B を 2 つの finite alphabet sets とする. $W = \{W_{ji}\}$, $(i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m)$ を A から B への transition probability matrix とする. すなわち $\sum_{j=1}^m W_{ji} = 1, i = 1, 2, \dots, n$ である. また $A = \{a_i^{(in)}\}, B = \{b_j^{(out)}\}$ を A における 2 つの異なる probability distribution とする. このとき B における probability distribution $WA = \{a_j^{(out)}\}, WB = \{b_j^{(out)}\}$ は次のように定義される.

$$a_j^{(out)} = \sum_{i=1}^n a_i^{(in)} W_{ji}, \quad b_j^{(out)} = \sum_{i=1}^n b_i^{(in)} W_{ji}.$$

Proposition 2 任意の $q \geq 0$ に対して次が成り立つ.

$$D_q(WA|WB) \leq D_q(A|B).$$

Proof. generalized log-sum inequality (1) を適用して次を得る.

$$\begin{aligned} D_q(WA|WB) &= - \sum_{j=1}^m a_j^{(out)} \ln_q \frac{b_j^{(out)}}{a_j^{(out)}} \\ &= - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_j^{(in)} W_{ji} \ln_q \frac{\sum_{i=1}^n b_i^{(in)} W_{ji}}{\sum_{i=1}^n a_i^{(in)} W_{ji}} \\ &\leq - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i^{(in)} W_{ji} \ln_q \frac{b_i^{(in)} W_{ji}}{a_i^{(in)} W_{ji}} \\ &= - \sum_{i=1}^n a_i^{(in)} \ln_q \frac{b_i^{(in)}}{a_i^{(in)}} \\ &= D_q(A|B). \end{aligned}$$

q.e.d.

2 Quantum Tsallis relative entropy

Definition 3 ρ, σ を2つの density operators とする. $0 \leq q < 1$ に対して 次で定義される $D_q(\rho|\sigma)$ を quantum Tsallis relative entropy という.

$$D_q(\rho|\sigma) = \frac{1 - \text{Tr}[\rho^q \sigma^{1-q}]}{1 - q}.$$

また Umegaki [14] によって quantum relative entropy が次のように定義されていることに注意する.

$$U(\rho|\sigma) = \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)].$$

$D_q(\rho|\sigma)$ を $0 \leq q \leq 2$ に拡張して定義すると都合がよい. 即ち $0 \leq q < 1$ に対しては $D_{2-q}(\rho|\sigma)$, $1 < q \leq 2$ に対しては $D_q(\rho|\sigma)$ が定義されるとする.

Proposition 3 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $D_q(\rho|\sigma) \leq U(\rho|\sigma) \leq D_{2-q}(\rho|\sigma)$ for $0 \leq q < 1$.

(2) $D_{2-q}(\rho|\sigma) \leq U(\rho|\sigma) \leq D_q(\rho|\sigma)$ for $1 < q \leq 2$.

Proof. 任意の $x > 0, t > 0$ に対して

$$\frac{1 - x^{-t}}{t} \leq \log x \leq \frac{x^t - 1}{t}$$

が成り立つので任意の $a, b, t > 0$ に対して次の不等式を得る.

$$a\left(\frac{1 - a^{-t}b^t}{t}\right) \leq a \log \frac{a}{b} \leq a\left(\frac{a^t b^{-t} - 1}{t}\right). \quad (2)$$

$\rho = \sum_i \lambda_i P_i$, $\sigma = \sum_j \mu_j Q_j$ をスペクトル分解とすると $\sum_i P_i = \sum_j Q_j = I$ だから次の不等式を得る.

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\left[\frac{\rho^{1+t}\sigma^{-t} - \rho}{t} - \rho(\log \rho - \log \sigma)\right] \\ &= \sum_{i,j} \text{Tr}[P_i \left\{ \frac{\rho^{1+t}\sigma^{-t} - \rho}{t} - \rho(\log \rho - \log \sigma) \right\} Q_j] \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{1}{t} \lambda_i^{1+t} \mu_j^{-t} - \frac{1}{t} \lambda_i - \lambda_i \log \lambda_i + \lambda_i \log \mu_j \right) \text{Tr}[P_i Q_j] \geq 0. \end{aligned}$$

最後の不等式は (2) の右側の不等式から得られる. したがって

$$\text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)] \leq \frac{1}{t} \text{Tr}[\rho^{1+t}\sigma^{-t} - \rho].$$

左側の不等式も同様にして得られる. したがって $1 - q = t (> 0)$ とおけば Proposition 5 の (1) を得る. また $q - 1 = t (> 0)$ とおけば Proposition 5 の (2) を得る. q.e.d.

ρ, σ : strictly positive operators に対して relative operator entropy $S(\rho|\sigma)$ が Fujii-Kamei [4] によって次のように定義された.

$$S(\rho|\sigma) = \rho^{1/2} \log(\rho^{-1/2} \sigma \rho^{-1/2}) \rho^{1/2}.$$

ここで ρ, σ が commutative のとき

$$U(\rho|\sigma) = -\text{Tr}[S(\rho|\sigma)]$$

であることは明らかである。一方 Hiai-Petz [8] によって次の関係が成り立つことが示された。

$$U(\rho|\sigma) \leq -\text{Tr}[S(\rho|\sigma)].$$

また Yanagi-Furuichi-Kuriyama [15] によって $0 \leq q < 1$ に対して Tsallis relative operator entropy $T_q(\rho|\sigma)$ が次のように定義された。

$$T_q(\rho|\sigma) = \frac{\rho^{1/2}(\rho^{-1/2}\sigma\rho^{-1/2})^{1-q}\rho^{1/2} - \rho}{1-q}.$$

このとき次が成り立つ。

$$\lim_{q \rightarrow 1} T_q(\rho|\sigma) = S(\rho|\sigma).$$

また ρ, σ が commutative のとき次が成り立つことは明らかである。

$$D_q(\rho|\sigma) = -\text{Tr}[T_q(\rho|\sigma)].$$

さらに次が成り立つ。

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q(\rho|\sigma) = U(\rho|\sigma).$$

Theorem 1 ρ, σ を *strictly positive density operators* とする。このとき $0 \leq q < 1$ に対して次が成り立つ。

$$D_q(\rho|\sigma) \leq -\text{Tr}[T_q(\rho|\sigma)].$$

Proof. α -power mean $\sharp_\alpha$ は次のように定義される。

$$A\sharp_\alpha B \equiv A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\alpha A^{1/2}.$$

[8] の Theorem 3.4 より任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$\text{Tr}[e^{A\sharp_\alpha B}] \leq \text{Tr}[e^{(1-\alpha)A+\alpha B}].$$

$A = \log \rho, B = \log \sigma$ とおくと次を得る。

$$\text{Tr}[\rho\sharp_\alpha \sigma] \leq \text{Tr}[e^{\log \rho^{1-\alpha} + \log \sigma^\alpha}].$$

ここで Golden-Thompson inequality より任意の Hermitian operators A, B に対して $\text{Tr}[e^{A+B}] \leq \text{Tr}[e^A e^B]$ が成り立つので次が得られる。

$$\text{Tr}[e^{\log \rho^{1-\alpha} + \log \sigma^\alpha}] \leq \text{Tr}[e^{\log \rho^{1-\alpha}} e^{\log \sigma^\alpha}] = \text{Tr}[\rho^{1-\alpha} \sigma^\alpha].$$

したがって

$$\text{tr}[\rho^{1/2}(\rho^{-1/2}\sigma\rho^{-1/2})^\alpha\rho^{1/2}] \leq \text{Tr}[\rho^{1-\alpha}\sigma^\alpha].$$

ここで $\alpha = 1 - q$ とおけばよい。

q.e.d.

Corollary 1 (Hiai-Petz [8]) ρ, σ を *strictly positive density operators* とするとき次が成り立つ。

$$\text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)] \leq \text{Tr}[\rho \log(\rho^{1/2}\sigma^{-1}\rho^{1/2})].$$

Proposition 4 ρ, σ を *density operators* とする. $0 \leq q < 1$ に対して次の (1) ~ (4) が成り立つ.

(1)(Nonnegativity): $D_q(\rho|\sigma) \geq 0$.

(2)(Pseudoadditivity):

$$D_q(\rho_1 \otimes \rho_2 | \sigma_1 \otimes \sigma_2) = D_q(\rho_1 | \sigma_1) + D_q(\rho_2 | \sigma_2) + (q-1)D_q(\rho_1 | \sigma_1)D_q(\rho_2 | \sigma_2).$$

(3)(Joint convexity):

$$D_q\left(\sum_j \lambda_j \rho_j \middle| \sum_j \lambda_j \sigma_j\right) \leq \sum_j \lambda_j D_q(\rho_j | \sigma_j).$$

(4)(Invariance): unitary transformation U に対して

$$D_q(U\rho U^* | U\sigma U^*) = D_q(\rho | \sigma).$$

Proof. 任意の $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq q < 1$ に対して

$$f(q, x, y) \equiv \frac{x - x^q y^{1-q}}{1-q} - (x - y) \geq 0$$

が成り立つので次を得る.

$$D_q(\rho | \sigma) \geq \text{Tr}[\rho - \sigma].$$

ρ, σ が *density operators* であるので (1) が得られる.

(2): 直接の計算で得られる.

(3): Lieb's theorem より任意の operator Z と任意の $0 \leq t \leq 1$ に対して functional $f(A, B) \equiv \text{Tr}[Z^* A^t Z B^{1-t}]$ は positive operators A, B について jointly concave である.

(4): Stone-Weierstrass approximation theorem を用いると明らかである. q.e.d.

Theorem 2 任意の *trace-preserving completely positive linear map* Φ と任意の *density operators* ρ, σ と $0 \leq q < 1$ に対して次が成り立つ.

$$D_q(\Phi(\rho) | \Phi(\sigma)) \leq D_q(\rho | \sigma).$$

Proof. [9] と同様にすればよい.

まず composite system AB において partial trace Tr_B に対して $D_q(\rho | \sigma)$ の monotonicity を証明する. ρ^{AB}, σ^{AB} を composite system AB における *density operators* とする. [10] より次のような unitary operators U_j と probability p_j が存在する.

$$\rho^A \otimes \frac{1}{n} = \sum_j p_j (I \otimes U_j) \rho^{AB} (I \otimes U_j)^*,$$

ただし n は system B の次元, I は system B の identity operator, $\rho^A = \text{Tr}_B[\rho^{AB}]$, $\sigma^A = \text{Tr}_B[\sigma^{AB}]$ である. Tsallis relative entropy の joint convexity と unitary invariance より次の関係式を得る.

$$\begin{aligned} & D_q\left(\rho^A \otimes \frac{1}{n}\right) \\ & \leq \sum_j p_j D_q((I \otimes U_j) \rho^{AB} (I \otimes U_j)^* | (I \otimes U_j) \sigma^{AB} (I \otimes U_j)^*) \\ & = \sum_j p_j D_q(\rho^{AB} | \sigma^{AB}) \\ & = D_q(\rho^{AB} | \sigma^{AB}). \end{aligned}$$

ここで

$$D_q(\rho^A \otimes \frac{1}{n} |\sigma^A \otimes \frac{1}{n}) = D_q(\rho^A | \sigma^A),$$

より次を得る.

$$D_q(\text{Tr}_B[\rho^{AB}] | \text{Tr}_B[\sigma^{AB}]) \leq D_q(\rho^{AB} | \sigma^{AB}). \quad (3)$$

[11] より任意の trace presearving completely positive linear map Φ は total system AB 上の unitary operator U^{AB} と subsystem B 上の projection(pure state) P^B でつぎのように表現される.

$$\Phi(\rho^A) = \text{Tr}_B[U^{AB}(\rho^A \otimes P^B)(U^{AB})^*].$$

したがって (3) と $D_q(\rho | \sigma)$ の unitary invariance を再度用いると次を得る.

$$\begin{aligned} & D_q(\Phi(\rho^A) | \Phi(\sigma^A)) \\ & \leq D_q(U^{AB}(\rho^A \otimes P^B)(U^{AB})^* | U^{AB}(\sigma^A \otimes P^B)(U^{AB})^*) \\ & = D_q(\rho^A \otimes P^B | \sigma^A \otimes P^B) \\ & = D_q(\rho^A | \sigma^A). \end{aligned}$$

q.e.d.

Corollary 2 任意の trace-presearving completely positive linear map Φ と 任意の density operator ρ と $0 \leq q < 1$ に対して次が成り立つ.

$$H_q(\Phi(\rho)) \geq H_q(\rho),$$

ただし

$$H_q(X) = \frac{\text{Tr}[X^q] - 1}{1 - q}$$

は quantum Tsallis entropy である.

3 Generalized Tsallis relative entropy

Definition 4 任意の positive operators A, B と 任意の実数 $q \in [0, 1)$ に対して $D_q(A || B)$ を次のように定義する.

$$D_q(A || B) = \frac{\text{Tr}[A] - \text{Tr}[A^q B^{1-q}]}{1 - q}.$$

Lieb's concavity theorem より次が成り立つ.

$$D_q(\sum_j \lambda_j A_j || \sum_j \lambda_j B_j) \leq \sum_j \lambda_j D_q(A_j || B_j), \quad (4)$$

ただし $\lambda_j > 0 (\sum_j \lambda_j = 1)$ である.

Theorem 3 任意の positive operators A_1, A_2, B_1, B_2 と 任意の $0 \leq q < 1$ に対して次の subadditivity が成り立つ.

$$D_q(A_1 + A_2 || B_1 + B_2) \leq D_q(A_1 || B_1) + D_q(A_2 || B_2). \quad (5)$$

Proof. 任意の実数 α, β , 任意の positive operators A, B に対して次が成り立つことに注意する.

$$D_q(\alpha A || \beta B) = \alpha D_q(A || B) - \alpha \ln_q \frac{\beta}{\alpha} \text{Tr}[A^q B^{1-q}].$$

(4) より任意の positive operators X_1, X_2, Y_1, Y_2 と任意の $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2 = 1)$ に対して次を得る.

$$D_q(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 || \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) \leq \lambda_1 D_q(X_1 || Y_1) + \lambda_2 D_q(X_2 || Y_2).$$

ここで $A_i = \lambda_i X_i, B_i = \lambda_i Y_i$ ($i = 1, 2$) とおくと

$$D_q(A_1 + A_2 || B_1 + B_2) \leq \lambda_1 D_q\left(\frac{A_1}{\lambda_1} || \frac{B_1}{\lambda_1}\right) + \lambda_2 D_q\left(\frac{A_2}{\lambda_2} || \frac{B_2}{\lambda_2}\right).$$

したがって (5) より結論が得られる.

q.e.d.

Theorem 4 任意の positive operators A, B と任意の $0 \leq q < 1$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$D_q(A || B) \geq \frac{\text{Tr}[A] - (\text{Tr}[A])^q (\text{Tr}[B])^{1-q}}{1 - q}.$$

Proof. Holder' inequality より $\text{Tr}[|X|^s] < \infty, \text{Tr}[|Y|^t] < \infty$ を満たす任意の bounded linear operators X, Y と $1/s + 1/t = 1$ を満たす任意の $1 < s < \infty, 1 < t < \infty$ に対して次が成り立つ.

$$|\text{Tr}[XY]| \leq \text{Tr}[|X|^s]^{1/s} \text{Tr}[|Y|^t]^{1/t}.$$

ここで $X = A^q, Y = B^{1-q}, s = 1/q, t = 1/(1-q)$ とおくと

$$\text{Tr}[A^q B^{1-q}] \leq (\text{Tr}[A])^q (\text{Tr}[B])^{1-q}$$

が得られ結論に至る.

q.e.d.

4 Tsallis relative operator entropy

Hilbert space H 上の bounded linear operator T は 任意の $x \in H$ に対して $(Tx, x) \geq 0$ を満たすとき positive といい $T \geq 0$ と表わす. また T が invertible かつ positive であるとき strictly positive といい $T > 0$ と表わす. Tsallis relative operator entropy は次のように定義される.

Definition 5 ([5]) $A > 0, B > 0$ と $0 < \lambda \leq 1$ に対して

$$T_\lambda(A|B) = \frac{A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\lambda A^{1/2} - A}{\lambda}$$

を A と B の間の Tsallis relative operator entropy と定義する.

$T_\lambda(A|B)$ の基本的性質は [5] で与えられている. ここでは Tsallis relative operator entropy を用いて Shannon type の operator inequality とその逆の inequality を与える.

Theorem 5 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ を Hilbert space H 上の strictly positive operator からなる 2 つの列で $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$ を満たすとする. このとき次が成り立つ.

$$0 \leq \sum_{j=1}^n T_\lambda(A_j|B_j) \geq \frac{(\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j)^{-\lambda} - I}{\lambda}.$$

証明にあたり次の Lemma を必要とする.

Lemma 1 $t > 0$ を固定すると次の λ ($0 < \lambda \leq 1$) に関する inequality が成り立つ.

$$\frac{t^\lambda - 1}{\lambda} \leq t - 1.$$

Proof. $t = 1$ のときは明らか. $t \neq 1$ とする. $F(\lambda) = \lambda(t-1) - t^\lambda + 1$ とおく. このとき $F'(\lambda) = t-1 - t^\lambda \log t$ かつ $F''(\lambda) = -t^\lambda (\log t)^2 < 0$. したがって $F(\lambda)$ は concave function である. $F(0) = F(1) = 0$ だから結論を得る. q.e.d.

Proof of Theorem 5. Lemma 1 より

$$\begin{aligned} \frac{A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\lambda A^{1/2} - A}{\lambda} &= A^{1/2} \frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\lambda - I}{\lambda} A^{1/2} \\ &\leq A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2} - I)A^{1/2} \\ &= B - A, \end{aligned}$$

ただし $A > 0, B > 0$ かつ $0 < \lambda \leq 1$. したがって

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n T_\lambda(A_j|B_j) &= \sum_{j=1}^n \frac{A_j^{1/2}(A_j^{-1/2}B_jA_j^{-1/2})^\lambda A_j^{1/2} - A_j}{\lambda} \\ &\leq \sum_{j=1}^n (B_j - A_j) = 0. \end{aligned}$$

別の inequality も証明する. $f(x) = -x^{-\lambda}$, $C_j = A_j^{1/2}$ かつ $X_j = A_j^{1/2}B_j^{-1}A_j^{1/2}$ とおくことにより Furuta [6] の Proposition 3.1 を適用すると次を得る.

$$-\left(\sum_{j=1}^n A_j^{1/2}(A_j^{1/2}B_j^{-1}A_j^{1/2})A_j^{1/2}\right)^{-\lambda} \geq -\sum_{j=1}^n A_j^{1/2}(A_j^{1/2}B_j^{-1}A_j^{1/2})^{-\lambda}A_j^{1/2}.$$

したがって

$$\left(\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j\right)^{-\lambda} \leq \sum_{j=1}^n A_j^{1/2} (A_j^{-1/2} B_j A_j^{-1/2})^\lambda A_j^{1/2}.$$

ゆえに証明を完了する. q.e.d.

Theorem 5 の corollary として Furuta [6] によって得られた Shannon inequality とその逆の inequality の operator 版に相当するものが得られる.

Corollary 3 (Furuta [6]) $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ を Hilbert space H 上の strictly positive operator からなる 2 つの列で $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$ を満たすとする. このとき次が成り立つ.

$$0 \geq \sum_{j=1}^n A_j^{1/2} (\log A_j^{-1/2} B_j A_j^{-1/2}) A_j^{1/2} \geq -\log \left[\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j \right].$$

Corollary 3 は [6] の Corollary 2.4 の 1 部分である. 次の section では一般化された Tsallis relative operator entropy を新しく定義し, その性質を調べる.

5 Generalized Tsallis relative operator entropy

relative operator entropy と related operator entropy を思い出そう.

Definition 6 $A > 0, B > 0$ に対して

$$S(A|B) = A^{1/2}(\log A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

は A と B の間の *relative operator entropy* と定義される. これは Fujii and Kamei [4] によって定義された. また $A > 0, B > 0$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, *generalized relative operator entropy* が Furuta [6] によって次のように定義された.

$$S_\lambda(A|B) = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\lambda(\log A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2},$$

$$A_{\pm\lambda}B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\lambda A^{1/2}.$$

特に $S(A|B) = S_0(A|B)$, $A_{\pm 0}B = A$, $A_{\pm 1}B = B$ となることに注意する.

Tsallis relative operator entropy を次のように一般化する.

Definition 7 $A > 0, B > 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\tilde{T}_{\mu,k,\lambda}(A|B) = \frac{A_{\pm\mu+k\lambda}B - A_{\pm\mu+(k-1)\lambda}B}{\lambda}$$

を *generalized Tsallis relative operator entropy* と定義する. 特に $\lambda \neq 0$ に対して

$$\tilde{T}_{0,1,\lambda}(A|B) = \frac{A_{\pm\lambda}B - A_{\pm 0}B}{\lambda} = \frac{A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\lambda A^{1/2} - A}{\lambda} = T_\lambda(A|B).$$

$S_{\mu \pm k\lambda}(A|B)$, $S_{\mu \pm (k+1)\lambda}(A|B)$ と $\tilde{T}_{\mu,k+1,\pm\lambda}(A|B)$ の間の関係について調べる.

Proposition 5 $\lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots$ のとき次が成り立つ.

$$(1) S_{\mu-(k+1)\lambda}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,k+1,-\lambda}(A|B) \leq S_{\mu-k\lambda}(A|B).$$

$$(2) S_{\mu+k\lambda}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,k+1,\lambda}(A|B) \leq S_{\mu+(k+1)\lambda}(A|B).$$

Proof. $\lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots$ のとき 任意の $t > 0$ に対して次の inequalities を得る.

$$t^{\mu-(k+1)\lambda} \log t \leq \frac{t^{\mu-(k+1)\lambda} - t^{\mu-k\lambda}}{-\lambda} \leq t^{\mu-k\lambda} \log t,$$

$$t^{\mu+k\lambda} \log t \leq \frac{t^{\mu+(k+1)\lambda} - t^{\mu+k\lambda}}{\lambda} \leq t^{\mu+(k+1)\lambda} \log t.$$

したがって t を $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ で置き換え両辺に $A^{1/2}$ をかけることにより目標の式を得る. q.e.d.

$k = 0$ 又は 1 のとき次のようになる.

Corollary 4 $A > 0, B > 0, \mu \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ のとき

$$\begin{aligned} S_{\mu-2\lambda}(A|B) &\leq \tilde{T}_{\mu,2,-\lambda}(A|B) \leq S_{\mu-\lambda}(A|B) \\ &\leq \tilde{T}_{\mu,1,-\lambda}(A|B) \leq S_\mu(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,1,\lambda}(A|B) \\ &\leq S_{\mu+\lambda}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,2,\lambda}(A|B) \leq S_{\mu+2\lambda}(A|B). \end{aligned}$$

特に $\mu = 0, \lambda = 1$ とおくと次を得る.

Corollary 5 $A > 0, B > 0$ に対して

$$\begin{aligned} S_{-2}(A|B) &\leq \tilde{T}_{0,2,-1}(A|B) \leq S_{-1}(A|B) \\ &\leq \tilde{T}_{0,1,-1}(A|B) \leq S_0(A|B) \leq \tilde{T}_{0,1,1}(A|B) \\ &\leq S_1(A|B) \leq \tilde{T}_{0,2,1}(A|B) \leq S_2(A|B). \end{aligned}$$

書き直すと

$$\begin{aligned} S_{-2}(A|B) &\leq AB^{-1}A - AB^{-1}AB^{-1}A \leq S_{-1}(A|B) \\ &\leq A - AB^{-1}A \leq S(A|B) \leq B - A \\ &\leq S_1(A|B) \leq BA^{-1}B - B \leq S_2(A|B). \end{aligned}$$

同様に $\sum_{j=1}^n S_{\mu \pm k\lambda}(A_j|B_j)$, $\sum_{j=1}^n S_{\mu \pm (k+1)\lambda}(A_j|B_j)$ と $\sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu, k+1, \pm\lambda}(A_j|B_j)$ の間の関係を求める. ただし $A_j > 0, B_j > 0$ は $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$ を満たすと仮定する. $\lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots$ のとき次を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_{\mu - (k+1)\lambda}(A_j|B_j) &\leq \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu, k+1, -\lambda}(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n S_{\mu - k\lambda}(A_j|B_j), \\ \sum_{j=1}^n S_{\mu + k\lambda}(A_j|B_j) &\leq \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu, k+1, \lambda}(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n S_{\mu + (k+1)\lambda}(A_j|B_j). \end{aligned}$$

$k = 0$ 又は 1 とおくと次を得る.

Corollary 6 $A > 0, B > 0, \mu \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_{\mu - 2\lambda}(A_j|B_j) &\leq \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu, 2, -\lambda}(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n S_{\mu - \lambda}(A_j|B_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu, 1, -\lambda}(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n S_{\mu}(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu, 1, \lambda}(A_j|B_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^n S_{\mu + \lambda}(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu, 2, \lambda}(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n S_{\mu + 2\lambda}(A_j|B_j). \end{aligned}$$

特に $\mu = 0, \lambda = 1$ とおくと [6] の Corollary とは違った結果を得る.

Corollary 7 $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$ を満たす $A_j > 0, B_j > 0$ に対して次を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_{-2}(A_j|B_j) &\leq \sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j - \sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j B_j^{-1} A_j \\ &\leq \sum_{j=1}^n S_{-1}(A_j|B_j) \leq I - \sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j \leq \sum_{j=1}^n S(A_j|B_j) \leq 0 \\ &\leq \sum_{j=1}^n S_1(A_j|B_j) \leq \sum_{j=1}^n B_j A_j^{-1} B_j - I \leq \sum_{j=1}^n S_2(A_j|B_j). \end{aligned}$$

References

- [1] S Abe, Monotonic decrease of the quantum nonadditive divergence by projective measurements, *Physics Letters A*, vol.312, pp.336-338, 2003.
- [2] N.Bebiano, J.da Providencia Jr. and R.Lemos, Matrix inequalities in statistical mechanics, *Linear Algebra and its Applications*, vol.376, pp.265-273, 2004.
- [3] L.Borland, A.R.Plastino and C.Tsallis, Information gain within nonextensive thermodynamics, *J. Math. Phys.*, vol.39, pp.6490-6501, 1998, and its Erratum, vol.40, pp.2196, 1999.
- [4] J.I.Fujii and E.Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, *Math. Japonica*, vol.34, pp.341-348, 1989.
- [5] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, Fundamental properties of Tsallis relative entropy, *J. Math. Phys.* vol.45, pp.4868-4877, 2004.
- [6] T.Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, *Linear Algebra and its Applications*, vol.381, pp.219-235, 2004.
- [7] F.Hansen and G.K.Pedersen, Jensen's operator inequality, *Bull. London Math. Soc.*, vol.35, pp.553-564, 2004.
- [8] F.Hiai and D.Petz, The Golden-Thompson trace inequality is complemented, *Linear Algebra and its Applications*, vol.181, pp.153-185, 1993.
- [9] G.Lindblad, Completely positive maps and entropy inequalities, *Comm. Math. Phys.*, vol.40, pp.147-151, 1975.
- [10] M.A.Nielsen and I.Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge Press, 2000.
- [11] B.Schmacher, Sending entanglement through noisy quantum channel, *Phys. Review A*, vol.54, pp.2614-2628, 1996.
- [12] C.Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *J.Stat.Phys.*, vol.52, pp.479-487, 1988.
- [13] C.Tsallis et al., *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications*, edited by S. Abe and Y. Okamoto (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001); see also the comprehensive list of references at <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>.
- [14] H.Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, IV (entropy and information), *Kodai Math. Sem. Rep.*, vol.14, pp.59-85, 1962.
- [15] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, *Linear Algebra and its Applications*, vol.394, pp.109-118, 2005.