

On a higher level extension of Leclerc-Thibon product theorem in q -deformed Fock spaces

飯島 和人* (名古屋大学多元数理 PD ,Nagoya University)

概要

$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の高レベル q -Fock 空間表現は神保-Misra-美輪-尾角により導入された [4]. Uglov は高レベル q -Fock 空間上の標準的な bar-involution で不変な 2 組の基底 (標準基底) を定義した [7]. この標準基底に関して, Leclerc-Thibon はレベル 1 の場合にある積定理を示した [5]. この定理は Steinberg-Lusztig のテンソル積定理の形式的類似として得られたものである.

本稿では, multi charge のある条件の下, Leclerc-Thibon の積定理の高レベル化を紹介する [3].

1 Fock space representation of $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$

本稿を通じて, n は 2 以上の整数, ℓ は 1 以上の整数とする.

1.1 $A_{n-1}^{(1)}$ -型アフィン量子代数 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$

$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ を $\mathbb{Q}(q)$ 上の $A_{n-1}^{(1)}$ -型アフィン量子代数とする. つまり, $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ は $E_i, F_i, K_i^\pm, D^\pm$ ($0 \leq i \leq n-1$) を生成元にもつ $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数で, その基本関係式は,

- $K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad K_i K_j = K_j K_i,$
- $K_i E_j K_i^{-1} = q^{a_{ij}} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^{-a_{ij}} F_j,$
- $DD^{-1} = D^{-1}D = 1, \quad K_i D = DK_i,$

*e-mail: kazuto.iijima@math.nagoya-u.ac.jp

- $DE_0D^{-1} = q^{-1}E_0, \quad DF_0D^{-1} = qF_0, \quad DE_iD^{-1} = 0, \quad DF_0D^{-1} = 0, \quad (i \neq 0),$
- $E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}},$
- $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} E_i^{1-a_{ij}-k} E_j E_i^k = 0, \quad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} F_i^{1-a_{ij}-k} F_j F_i^k = 0, \quad (i \neq j),$

で与えられる. $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の部分代数で, F_i ($0 \leq i \leq n-1$) で生成されるものを $U_q^-(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ で表す.

1.2 高レベル q -Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$

まず, 線型空間として, 高レベル q -Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$ を定義する. Π でヤング図形全体のなす集合を表す. ℓ 個のヤング図形の組

$$\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(\ell)}) \in \Pi^\ell$$

を **multi partition** とよび, そのサイズを各々のヤング図形のサイズの和 $|\lambda| = |\lambda^{(1)}| + \dots + |\lambda^{(\ell)}|$ で定義する. 例えば, $\ell = 2, \lambda = ((3, 2), (4))$ なら, $|\lambda| = 9$ となる.

定義 1.1. $s = (s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ を ℓ 個の整数の組とする. **multi charge** s をもつ q -Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$ を, $\{|\lambda; s| \mid \lambda \in \Pi^\ell\}$ を基底とする $\mathbb{Q}(q)$ -線型空間として定義する. つまり,

$$\mathcal{F}[s] = \sum_{\lambda \in \Pi^\ell} \mathbb{Q}(q) |\lambda; s|.$$

次に, $\mathcal{F}[s]$ に $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ -加群の構造を以下のようにして定める. $\lambda \in \Pi^\ell, s \in \mathbb{Z}^\ell$ とする. ヤング図形 $\lambda^{(j)}$ ($1 \leq j \leq \ell$) の i 行 k 列にあるセル $\gamma = (i, k) \in \lambda^{(j)}$ に対し, その **content** と **n -residue** を

$$\text{cont}(\gamma) = s_j - i + k, \quad \text{res}(\gamma) \equiv s_j - i + k \pmod{n}.$$

で定める. また, γ が i -cell とは, $\text{res}(\gamma) = i$ となるときをいう.

例 1.2. $n = 2, \ell = 2, s = (12, 0), \lambda = ((3, 2, 2), (2))$ とする. このとき, この *multi partition* の *content* と *n-residue* は以下ようになる.

$$\text{content} : \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 12 & 13 & 14 \\ \hline 11 & 12 & 13 \\ \hline 10 & 11 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 15 \\ \\ 9 \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right), \quad \text{n-residue} : \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \\ 1 \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right).$$

$\lambda, \mu \in \Pi^\ell$ とし, μ は λ にある i -cell γ を加えて得られると仮定する. このようなセル γ を, μ の *removable i -cell*, または, λ の *addable i -cell* とよぶ. このような場合に, $\lambda \xrightarrow{i} \mu$ と書くことにする. 例えば, $n = 3, \ell = 1, s = 0$ のとき,

$$\emptyset \xrightarrow{0} \boxed{0} \xrightarrow{1} \boxed{01} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \end{array}$$

などである.

定義 1.3. (1) セル γ を *multi partition* λ の第 j 成分 $\lambda^{(j)}$ にあるセルとし, δ を第 j' 成分 $\lambda^{(j')}$ にある別のセルとする. このとき, 2つのセル γ, δ の間の順序を

$$\delta > \gamma \iff \begin{cases} \text{cont}(\delta) > \text{cont}(\gamma) & \text{または,} \\ \text{cont}(\delta) = \text{cont}(\gamma) & \text{かつ } j < j'. \end{cases}$$

で定義する.

(2) $\lambda \xrightarrow{i} \mu$ とし, $\gamma = \mu \setminus \lambda$ とする. 整数 $A_i(\lambda, \mu), R_i(\lambda, \mu), N_i(\lambda, \mu)$ を

$$A_i(\lambda, \mu) = \#\{\delta \mid \delta \text{ は addable } i\text{-cell かつ } \delta > \gamma\},$$

$$R_i(\lambda, \mu) = \#\{\delta \mid \delta \text{ は removable } i\text{-cell かつ } \delta > \gamma\},$$

$$N_i(\lambda, \mu) = A_i(\lambda, \mu) - R_i(\lambda, \mu)$$

で定義する.

Remark 1.4. このセルの順序付けにはいくつかの流儀がある. ここでのセルの順序付けは [7] のものを採用した. [2] の順序とは逆になるので注意.

例 1.5. $n = 2, \ell = 2, s = (12, 0), \lambda = ((3, 2, 2), (2)), \mu = ((3, 2, 2, 1), (2))$ とする. このとき, γ は第 1 成分の $(4, 1)$ にあるセルで, その *n-residue* は $\text{res}(\gamma) = 1$.

また,

$$A_1(\lambda, \mu) = 2, \quad R_1(\lambda, \mu) = 1, \quad N_1(\lambda, \mu) = 2 - 1 = 1$$

となる.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \right) 1, \quad \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \right) 0$$

定義 1.6. アフィン量子群 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の生成元 F_i の q -Fock 空間上への作用を,

$$F_i |\lambda; s\rangle = \sum_{\lambda \xrightarrow{i} \mu} q^{N_i(\lambda, \mu)} |\mu; s\rangle$$

で定める.

例 1.7. $n = 2, \ell = 2, s = (12, 0), \lambda = ((3, 2, 2), (2))$ とすると,

$$F_1 |\lambda; s\rangle = ((4, 2, 2), (2)) + q((3, 3, 2), (2)) + q((3, 2, 2, 1), (2)) + q^2((3, 2, 2), (2, 1)).$$

本稿では F_i の作用のみしか定義しないが, 他の生成元 $E_i, K_i^\pm, D^\pm$ の q -Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$ も組合せ論的に定義できて, それらの作用は $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の基本関係式を満たす. (詳しい証明は [2] 参照) つまり,

定理 1.8 (林 '90, 神保-Misra-三輪-尾角 '91). q -Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$ はレベル ℓ の $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ -加群となる.

1.3 bar involution

Uglov は, q -Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$ 上に bar involution $\overline{}$ を定義した [7]. 本稿では詳しい定義は扱わないが, その bar involution は, 次の性質を満たすことが知られている.

$$\begin{aligned} \overline{|\emptyset; s\rangle} &= |\emptyset; s\rangle, \\ \overline{a(q)x + b(q)y} &= a(q^{-1})\overline{x} + b(q^{-1})\overline{y}, \\ \overline{F_i x} &= F_i \overline{x}. \end{aligned}$$

ここで, $\emptyset = (\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_\ell), 0 \leq i \leq n-1, a(q), b(q) \in \mathbb{Q}(q), x, y \in \mathcal{F}[s]$ である.

Remark 1.9. (1) この *bar involution* は *q-wedge products* とよばれるものを用いて定義される. この *q-wedge product* (とその *ordering rule*) が非常に煩雑なので, 本稿では省略した.

(2) この *bar involution* は, アフィン Hecke 代数 $H_q(\hat{\mathfrak{S}}_k)$ の *bar involution* とある意味で一致する.

(3) $\ell = 1$ のときは, この *bar involution* は, 上記3つの性質と Heisenberg 代数の作用で特徴付けられる. (§3 参照)

1.4 支配的順序

定義 1.10. $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $|\lambda; s\rangle \in \mathcal{F}[s]$ が *M-dominant* であるとは, すべての $i = 1, 2, \dots, \ell - 1$ に対して,

$$s_i - s_{i+1} \geq |\lambda| + M$$

となるときをいう.

q -Fock 空間の基底 $\{|\lambda; s\rangle \mid \lambda \in \Pi^\ell\}$ の間には *dominance order* とよばれるある半順序 $\triangleright$ が定義できる. 本稿では, 0-dominant の場合のみで定義しておく.

定義 1.11. $|\lambda; s\rangle, |\mu; s\rangle \in \mathcal{F}[s]$ がともに 0-dominant であるとする. このとき, 順序 $|\lambda; s\rangle \triangleright |\mu; s\rangle$ を

$$|\lambda| = |\mu| \quad \text{かつ} \quad \sum_{a=1}^{j-1} |\lambda^{(a)}| + \sum_{b=1}^k \lambda_b^{(j)} \geq \sum_{a=1}^{j-1} |\mu^{(a)}| + \sum_{b=1}^k \mu_b^{(j)}$$

(for all $1 \leq j \leq \ell$ and $k \geq 1$) で定める.

例 1.12. $\ell = 2, s = (10, 0), \lambda = ((3, 2), (3)), \mu = ((2), (4, 2))$ とする. このとき, $|\lambda; s\rangle, |\mu; s\rangle$ はともに 0-dominant で, $|\lambda; s\rangle \triangleright |\mu; s\rangle$ となる.

1.5 標準基底

命題 1.13 (Leclerc-Thibon '96, Uglov '00). 行列 $A = (a_{\lambda\mu}(q))$ を,

$$\overline{|\lambda; s\rangle} = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}(q) |\mu; s\rangle.$$

で定義する. このとき, 行列 A は対角成分が1の下三角行列となる. つまり,

$$\begin{cases} a_{\lambda\lambda}(q) = 1, \\ a_{\lambda\mu}(q) \neq 0 \implies |\lambda; s\rangle \supseteq |\mu; s\rangle \end{cases}$$

が成り立つ.

この命題から, 標準基底の存在に関する次の定理が導かれる.

定理 1.14 (Leclerc-Thibon '96, Uglov '00). q -Fock空間 $\mathcal{F}[s]$ には, 次の性質を満たす2組の基底 $\{G^+(\lambda; s) \mid \lambda \in \Pi^\ell\}$, $\{G^-(\lambda; s) \mid \lambda \in \Pi^\ell\}$ が一意に存在する.

$$(1) \overline{G^+(\lambda; s)} = G^+(\lambda; s) \quad \text{かつ} \quad G^+(\lambda; s) \equiv |\lambda; s\rangle \pmod{q\mathcal{L}^+}.$$

$$(2) \overline{G^-(\lambda; s)} = G^-(\lambda; s) \quad \text{かつ} \quad G^-(\lambda; s) \equiv |\lambda; s\rangle \pmod{q^{-1}\mathcal{L}^-}.$$

ここで, $\mathcal{L}^+ = \bigoplus_{\lambda \in \Pi^\ell} \mathbb{Q}[q] |\lambda; s\rangle$, $\mathcal{L}^- = \bigoplus_{\lambda \in \Pi^\ell} \mathbb{Q}[q^{-1}] |\lambda; s\rangle$ である

この2組の基底 $\{G^+(\lambda; s) \mid \lambda \in \Pi^\ell\}$, $\{G^-(\lambda; s) \mid \lambda \in \Pi^\ell\}$ を標準基底とよぶ.

定義 1.15. 行列 $\Delta^+(q) = (\Delta_{\lambda,\mu}^+(q))_{\lambda,\mu}$, $\Delta^-(q) = (\Delta_{\lambda,\mu}^-(q))_{\lambda,\mu}$ を次の式で定める.

$$G^+(\lambda; s) = \sum_{\mu} \Delta_{\lambda,\mu}^+(q) |\mu; s\rangle, \quad G^-(\lambda; s) = \sum_{\mu} \Delta_{\lambda,\mu}^-(q) |\mu; s\rangle.$$

行列の成分 $\Delta_{\lambda,\mu}^+(q)$, $\Delta_{\lambda,\mu}^-(q)$ を q -分解係数とよぶ.

Remark 1.16. (1) 記号上には現れていないが, $\Delta^+(q)$ や $\Delta^-(q)$ は n, ℓ, s に依存する.

(2) 行列 $\Delta^+(q)$, $\Delta^-(q)$ もまた半順序 $\supseteq$ に関して対角成分が1の下三角行列となる.

(3) $p = -q^{-1}$ とおく. q -分解係数 $\Delta_{\lambda,\mu}^-(q)$ は, $\tilde{A}$ 型アフィン Hecke 代数の放物加群に関する Kazhdan-Lusztig 多項式として表されることが知られている [7]. 特に, $\Delta_{\lambda,\mu}^-(q) \in \mathbb{N}[p]$ となる.

2 q -Fock 空間の圏化

$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の q -Fock 空間表現の理論では、標準基底や q -分解係数の性質を調べる事が非常に重要な研究課題である。今節では、 q -Fock 空間の標準基底、 q -分解係数と、岩堀-Hecke 代数、 ξ -Schur 代数、rational Cherednik 代数の圏などの表現論との関わりを簡潔に述べておく。

2.1 $\ell = 1$ のとき

$\ell = 1$ とする。このとき、全ての q -Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$ において、標準基底や q -分解係数は s に依存せずに等しくなる。このような事情から、 s は省略されることがある。

ξ を 1 の原始 n 乗根、 $\mathcal{S}_k(\xi)$ を ξ -Schur 代数、 $W(\lambda)$ を最高ウェイト λ をもつ $\mathcal{S}_k(\xi)$ の Weyl 加群、 $L(\lambda)$ を最高ウェイト λ をもつ $\mathcal{S}_k(\xi)$ の単純加群とする。

定理 2.1 (Varagnolo-Vasserot '99). $\ell = 1$ のとき、

$$[W(\lambda'): L(\mu')] = \Delta_{\mu, \lambda}^+(1).$$

ここで、 λ' はヤング図形 λ の転置である。

上の定理は、 q -Fock 空間表現の圏化という視点から見ると理解しやすい。 $\mathcal{S}_k(\xi)$ の有限次元右表現全体のなす圏のグロタンディーク群 $K_0 = K(\text{mod-}\mathcal{S}_k(\xi)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ から q -Fock 空間 $\mathcal{F}$ への写像 $\iota: K_0 \rightarrow \mathcal{F}$ を

$$\iota(W(\lambda)) = |\lambda\rangle$$

で定めると、上記定理は、次のように言い換えられる。

系 2.2 (Varagnolo-Vasserot '99).

$$\iota(L(\lambda)) = G_{\lambda}^-(1).$$

圏 $\mathcal{C} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{mod-}\mathcal{S}_k(\xi)$ を考える。このとき、" $\mathcal{C}$ を q -Fock 空間 $\mathcal{F}$ の $q = 1$ における圏化" とみなすと、上の結果は、"単純加群と標準基底 G^- が対応して

いる”とみることができる。他にも、 F_q への量子代数 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の生成元 e_i, f_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) の作用は、 ι を通じて $\mathcal{C}$ 上では、ある種の制限、誘導に対応していることが知られている。これらの状況を簡単にまとめたものが次の表である。

$\mathcal{C}$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{F}$
$W(\lambda)$	$\longleftrightarrow$	$ \lambda\rangle$
$L(\lambda)$	$\longleftrightarrow$	G_λ^-
$T(\lambda)$	$\longleftrightarrow$	G_λ^+
i -Induction	$\longleftrightarrow$	量子代数の生成元 F_i の作用
i -Restriction	$\longleftrightarrow$	量子代数の生成元 E_i の作用
Khovanov-Lauda-Rouquier 代数の次数	$\longleftrightarrow$	q

ここで、 $T(\lambda)$ 最高ウェイト λ の indecomposable tilting 加群である。

2.2 $\ell \geq 2$ の場合

以上の枠組みは、一般のレベル ℓ においても成り立つことが期待されている。考える q -Fock 空間、レベル、multi charge s の条件などで、対応する代数（とその表現の圏）が異なるのであるが、それらを以下にまとめておく。

レベル ℓ	q -Fock 空間	s に関する条件		代数（または圏）
$\ell = 1$	$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n) \emptyset\rangle$	—	$\Leftrightarrow$	岩堀-Hecke 代数
$\ell = 1$	$\mathcal{F}$	—	$\Leftrightarrow$	ξ -Schur 代数 $\mathcal{S}_k(\xi)$
$\ell \geq 2$	$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n) \emptyset; s\rangle$	—	$\Leftrightarrow$	有木-小池代数
$\ell \geq 2$	$\mathcal{F}[s]$	0-dominant	$\Leftrightarrow$	cyclotomic ξ -Schur 代数
$\ell \geq 2$	$\mathcal{F}[s]$	—	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{O}_s(\ell, 1, m)$

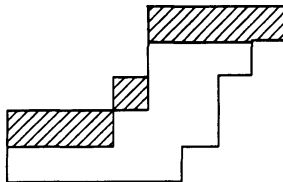
ここで、 $\mathcal{O}_s(\ell, 1, m)$ は multi charge s に付随する $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_m$ の rational Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}$ である。

3 Heisenberg 代数の作用と Leclerc-Thibon の定理

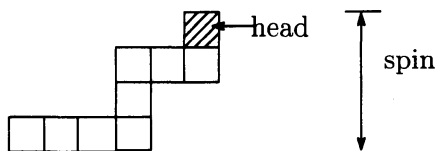
今節では、レベルは $\ell = 1$ に固定する。

3.1 ribbon 盤

$\lambda, \mu \in \Pi$ とし, $\lambda \subset \mu$ と仮定する. このとき, $\mu \setminus \lambda$ で歪ヤング図形を表す. 歪ヤング図形 $\mu \setminus \lambda$ に対し, 水平帯とは, $\mu \setminus \lambda$ の一番上のセルからなる集合である.



歪ヤング図形 $\mu \setminus \lambda$ が n -ribbon であるとは, それが n 個のセルから成り, 更に 2×2 の正方形を含まないときをいう. n -ribbon の最も右上にあるセルを **head** といい, n -ribbon の **spin** を「高さ -1 」で定める. 例えば, 以下の例では, $\text{spin} = 3$ である.



定義 3.1. 歪ヤング図形 $\mu \setminus \lambda$ がウエイト r の n -ribbon 盤 であるとは, 次の 2 条件を満たすときをいう.

- $\mu \setminus \lambda$ は r 個の n -ribbons の *disjoint union* である.
- 全ての n -ribbon の **head** が $\mu \setminus \lambda$ の水平帯に属している.

$\mu \setminus \lambda$ がウエイト r の n -ribbon 盤 であるとき, $\lambda \overset{r,n}{\rightsquigarrow} \mu$ と表す.

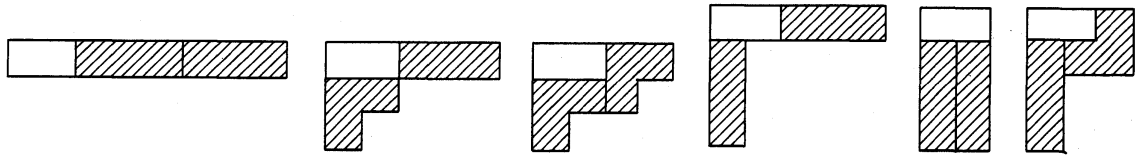
Remark 3.2. n -ribbon によるこのような貼り合せは, 存在すれば一意である.

定義 3.3. $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda \in \Pi$ とする. $V_r: \mathcal{F}[s] \rightarrow \mathcal{F}[s]$ を次のように定義する.

$$V_r|\lambda; s\rangle = \sum_{\lambda \overset{r,n}{\rightsquigarrow} \mu} (-q^{-1})^{\text{spin}(\mu \setminus \lambda)} |\mu; s\rangle.$$

例 3.4. $n = 3, \ell = 1, m = 2, \lambda = (2)$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} V_2 |(2); s\rangle = & |(8); s\rangle - q^{-1} |(5, 2, 1); s\rangle + q^{-2} |(4, 3, 2); s\rangle \\ & + q^{-2} |(5, 1^3); s\rangle + q^{-4} |(2^4); s\rangle - q^{-3} |(3^2, 1^2); s\rangle. \end{aligned}$$



3.2 Heisenberg 代数の作用

r を正の整数, λ をヤング図形とする. p_r, h_r をそれぞれ次数 r のベキ和対称関数, 完全対称関数とし, s_λ を Schur 関数とする. これらの対称関数の間には, よく知られた次の関係式がある.

$$h_m = \sum_{|\lambda|=m} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda, \quad s_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda, \mu}^{(-1)} h_\mu.$$

ここで, $K_{\lambda, \mu}^{(-1)}$ は逆 Kostka 係数で, z_μ は $\mu = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots)$ に対し, $z_\mu = \prod_{i \geq 1} i^{\alpha_i} \alpha_i!$ で定まる有理数である. これらの関係式を利用して, $\mathcal{F}$ 上に, B_{-r} と S_λ の作用を次のように定義する.

定義 3.5. $r \in \mathbb{Z}_{>0}, \lambda \in \Pi$ とする. $\mathcal{F}$ 上の作用素 B_{-r}, S_λ を,

$$V_r = \sum_{|\lambda|=r} \frac{1}{z_\lambda} B_{-\lambda_1} B_{-\lambda_2} \cdots, \quad S_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda, \mu}^{(-1)} V_{\mu_1} V_{\mu_2} \cdots.$$

で定義する.

対称関数と $\mathcal{F}$ 上の作用素 B_{-r}, V_r, S_λ の対応は次のようになる.

対称関数		Heisenberg 代数の作用
p_r	$\leftrightarrow$	B_{-r}
h_r	$\leftrightarrow$	V_r
s_λ	$\leftrightarrow$	S_λ

Remark 3.6. q -Fock 空間 $\mathcal{F}$ 上に定義されたこれら 3 つの作用素には, それぞれ長所がある.

- (1) B_{-r} は q -wedge product 上のボゾン作用であり, アフィンヘッケ代数 $H_q(\hat{\mathfrak{S}}_k)$ の中心に属する元と対応している.
- (2) V_r は ribbon 盤を用いた組合せ論的記述を持つ (§3.1 参照).
- (3) S_λ は標準基底と密接な関係を持つ (Leclerc-Thibon の定理) .

命題 3.7. q -Fock 空間 $\mathcal{F}$ 上に定義されたこれら 3 つの作用素は, *bar involution* と可換である. つまり, $x \in \mathcal{F}[s]$ に対し,

$$\overline{B_{-r}x} = B_{-r}\bar{x} \quad , \quad \overline{V_r x} = V_r \bar{x} \quad , \quad \overline{S_\lambda x} = S_\lambda \bar{x}$$

が成り立つ.

3.3 Leclerc-Thibon の定理

定義 3.8. (1) ヤング図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ が n -restricted であるとは,

$$0 \leq \lambda_i - \lambda_{i+1} < n \quad \text{for all } i = 1, 2, \dots$$

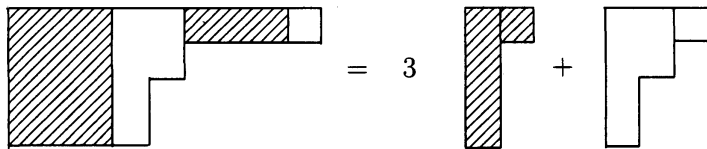
となるときをいう.

(2) ヤング図形 $\lambda \in \Pi$ に対し, $\tilde{\lambda}, \check{\lambda} \in \Pi$ を

$$\tilde{\lambda} \text{ が } n\text{-restricted} \quad \text{かつ} \quad \lambda = \tilde{\lambda} + n\check{\lambda}$$

で定義する.

例 3.9. $n = 3$, $\lambda = (9, 5, 4, 4)$ とする. このとき, $(9, 5, 4, 4) = 3 \cdot (2, 1, 1, 1) + (3, 2, 1, 1)$ かつ $(3, 2, 1, 1)$ は 3-restricted である. 従って, $\tilde{\lambda} = (3, 2, 1, 1), \check{\lambda} = (2, 1, 1, 1)$.



ここで, Leclerc-Thibon の定理を紹介する.

定理 3.10 (Leclerc-Thibon '96). $\ell = 1$ とし, λ をヤング図形とする. このとき,

$$G^-(\lambda) = S_{\tilde{\lambda}} G^-(\tilde{\lambda}).$$

例 3.11. (i) $n = 2$, $\lambda = (4)$ とする. このとき, $\lambda = \emptyset + n(2)$ となるので,

$$G^-((4)) = S_{(2)} G^-(\emptyset) = V_{(2)} \emptyset = (4) - q^{-1}(3, 1) + q^{-2}(2, 2).$$

(ii) $n = 2$, $\lambda = (2, 2)$ とする. このとき, $\lambda = \emptyset + n(1, 1)$ となるので,

$$G^-((2, 2)) = S_{(1,1)} G^-(\emptyset) = (V_1 V_1 - V_2) \emptyset = (2, 2) - q^{-1}(2, 1, 1) + q^{-2}(1^4).$$

3.4 Steinberg-Lusztig のテンソル積定理

Leclerc-Thibon の定理は, Steinberg-Lusztig のテンソル積定理の形式的類似として得られた. 今節の最後にそれを簡潔に紹介しておく.

ζ を $\xi = \zeta^2$ が 1 の原始 n 乗根となるような複素数とする. Frobenius 写像 $\text{Fr}: U_{\zeta}(\mathfrak{gl}_r) \longrightarrow U(\mathfrak{gl}_r)$ を

$$\text{Fr}(K_j) = 1, \quad \text{Fr}(E_i^{(k)}) = \begin{cases} E_i^{(k/n)} & \text{if } n \text{ divides } k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \text{Fr}(F_i^{(k)}) = \begin{cases} F_i^{(k/n)} & \text{if } n \text{ divides } k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. ここで, $E_i^{(k)} = \frac{E_i^k}{[k]!}$, $F_i^{(k)} = \frac{F_i^k}{[k]!}$ である.

M をある $U(\mathfrak{gl}_r)$ -加群とすると, M^{Fr} で $U(\mathfrak{gl}_r)$ の作用と Fr を合成することにより得られる $U_{\zeta}(\mathfrak{gl}_r)$ -加群を表す. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 3.12 (Steinberg-Lusztig '89).

$$L(\lambda) \simeq L(\tilde{\lambda}) \otimes W(\check{\lambda})^{\text{Fr}},$$

ここで, $L(\lambda)$ は $U_{\zeta}(\mathfrak{gl}_r)$ の単純加群, $W(\check{\lambda})$ は $U(\mathfrak{gl}_r)$ の (古典的) Weyl 加群である.

Leclerc-Thibon の定理は, この Steinberg-Lusztig のテンソル積定理の形式的類似となっている.

$\mathcal{C}$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{F}$
Steinberg-Lusztig のテンソル積定理		Leclerc-Thibon の積定理

4 Leclerc-Thibon の定理の高レベル化について

今節では、レベル $\ell \geq 1$ の場合の Leclerc-Thibon の定理について述べる。

4.1 Heisenberg の作用の細分化

定義 4.1. $r \geq 1, 1 \leq j \leq \ell$ とする. $\mathcal{F}[\mathbf{s}]$ 上の線型作用素 $B'_{-r}[j]$ を第 j 成分への B_{-r} のレベル 1 作用として定義する. 即ち,

$$B'_{-r}[j] |(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(j)}, \dots, \lambda^{(\ell)}); \mathbf{s}\rangle = |(\lambda^{(1)}, \dots, B_{-r}\lambda^{(j)}, \dots, \lambda^{(\ell)}); \mathbf{s}\rangle,$$

ここで、右辺の $B_{-r}\lambda^{(j)}$ は $\ell = 1$ のときの B_{-r} の作用を表す。

この $B'_{-r}[j]$ は一般に bar involution と可換にならない. そこで、次の $B_{-r}[j]$ を考える.

定義 4.2. $B_{-r}[j]$ を

$$B_{-r}[\ell] = B'_{-r}[\ell] \quad , \quad B_{-r}[j] = B'_{-r}[j] - q^{-r} B'_{-r}[j+1], \quad (1 \leq j \leq \ell-1).$$

で定義する.

命題 4.3 ([3]). $r \in \mathbb{Z}_{>0}, 1 \leq j \leq \ell$ とする. $u = |\lambda; \mathbf{s}\rangle$ が nr -dominant のとき、以下が成り立つ.

$$\overline{B_{-r}[j] u} = B_{-r}[j] \bar{u}.$$

上で定義した $B'_{-r}[j], B_{-r}[j]$ に対し, $V'_r[j], V_r[j], S'_\lambda[j], S_\lambda[j]$ をレベル $\ell = 1$ のときと同様に定義する.

定義 4.4.

$$\begin{aligned} V'_r[j] &= \sum_{|\lambda|=r} \frac{1}{z_\lambda} B'_{-\lambda}[j] \quad , \quad V_r[j] = \sum_{|\lambda|=r} \frac{1}{z_\lambda} B_{-\lambda}[j] \quad , \\ S'_\lambda[j] &= \sum_{\mu} K_{\lambda\mu}^{(-1)} V'_\mu[j] \quad , \quad S_\lambda[j] = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu}^{(-1)} V_\mu[j] \quad . \end{aligned}$$

定義から, $V'_r[j]$ (resp. $S'_\mu[j]$) は第 j 成分に $\ell = 1$ のときの V_r (resp. S_μ) を作用させるものになる. 例えば, $V'_r[1](\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = (V_r \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $S'_\mu[2](\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = (\lambda^{(1)}, S_\mu \lambda^{(2)})$ などとなる. 特に, $V'_r[j]$ は ribbon 盤による組合せ論的表示をもつ.

本稿の主定理は $S_\lambda[j]$ を用いて述べられる. 具体的に標準基底を計算するためには, $S_\lambda[j]$ を $V'_r[j]$ で表しておく必要がある. 以下の補題がその明示式を与える. ($S'_\lambda[j]$ は逆 Kostka 係数を用いて $V'_r[j]$ の一次結合として表すことができる.)

補題 4.5 ([3]).

$$S_\lambda[j] = \sum_{\mu, \nu} (-q^{-1})^{|\nu|} \text{LR}_{\mu\nu}^\lambda S'_\mu[j] S'_\nu[j+1] \quad .$$

ここで, $\text{LR}_{\mu\nu}^\lambda$ は Littlewood-Richardson 係数で, ν' はヤング図形 ν の転置を表す.

この補題により, u が $n|\lambda|$ -dominant であれば, レベル $\ell = 1$ のときの計算を利用して, $S_\lambda[j]u$ を計算することができる.

4.2 Leclerc-Thibon の定理の高レベル化

ここで, 本稿の主結果を述べる. これは, Leclerc-Thibon の定理の高レベル化となっている.

定理 4.6 ([3]). $1 \leq j \leq \ell$, $\lambda \in \Pi$ とする. もし, $|\mu; s\rangle$ が 0-dominant なら,

$$G^-((\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(j)}, \dots, \lambda^{(\ell)}); s) = S_{\lambda^{(j)}}[j] G^-((\lambda^{(1)}, \dots, \widetilde{\lambda^{(j)}}, \dots, \lambda^{(\ell)}); s)$$

が成り立つ.

定義 4.7. $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(\ell)}) \in \Pi^\ell$ を multi partition とする. $\widetilde{\lambda}$, $\check{\lambda}$, $S_{\check{\lambda}}$ を次のように定める.

$$\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda^{(1)}}, \widetilde{\lambda^{(2)}}, \dots, \widetilde{\lambda^{(\ell)}}), \quad \check{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(\ell)}),$$

$$S_{\check{\lambda}} = \prod_{i=1}^{\ell} S_{\lambda^{(i)}}[i] = S_{\lambda^{(1)}}[1] S_{\lambda^{(2)}}[2] \cdots S_{\lambda^{(\ell)}}[\ell].$$

先の定理を ℓ 回適用することにより, 次を得る.

定理 4.8 ([3]). $|\lambda; s\rangle$ が 0-dominant であれば,

$$G^-(\lambda; s) = S_{\tilde{\lambda}} G^-(\tilde{\lambda}; s).$$

具体例をひとつ計算しておく. 以下の例では $|\lambda; s\rangle$ を単に λ と書く. また, 分割の 1 次結合の部分は, $(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}, \lambda^{(2)}) = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) + (\mu^{(1)}, \lambda^{(2)})$ などのように展開する.

例 4.9. $n, l = 2$, $\lambda = ((2, 2), \emptyset)$, $s = (2, -2)$ とする. このとき, $|\lambda; s\rangle$ は 0-dominant で, $(2, 2) = \emptyset + n(1, 1)$ となる.

$$\begin{aligned} G^-((2, 2), \emptyset) &= S_{((1, 1), \emptyset)}(\emptyset, \emptyset) = S_{(1, 1)}[1](\emptyset, \emptyset) \\ &= (S'_{(1, 1)}[1] - q^{-1}S'_{(1)}[1]S'_{(1)}[2] + q^{-2}S'_{(2)}[2])(\emptyset, \emptyset) \quad (\text{補題 4.5}) \\ &= (S_{(1, 1)}\emptyset, \emptyset) - q^{-1}(S_{(1)}\emptyset, S_{(1)}\emptyset) + q^{-2}(\emptyset, S_{(2)}\emptyset) \\ &= \left((2, 2) - q^{-1}(2, 1, 1) + q^{-2}(1^4), \emptyset \right) - q^{-1}\left((2) - q^{-1}(1, 1), (2) - q^{-1}(1, 1) \right) \\ &\quad + q^{-2}\left(\emptyset, (4) - q^{-1}(3, 1) + q^{-2}(2, 2) \right) \\ &= \left((2, 2), \emptyset \right) - q^{-1}\left((2, 1, 1), \emptyset \right) + q^{-2}\left((1^4), \emptyset \right) - q^{-1}\left((2), (2) \right) + q^{-2}\left((2), (1, 1) \right) \\ &\quad + q^{-2}\left((1, 1), (2) \right) - q^{-3}\left((1, 1), (1, 1) \right) + q^{-2}\left(\emptyset, (4) \right) - q^{-3}\left(\emptyset, (3, 1) \right) + q^{-4}\left(\emptyset, (2, 2) \right). \end{aligned}$$

4.3 テンソル積定理について

前節でみたように, Leclerc-Thibon の定理は, Steinberg-Lusztig のテンソル積定理と対応している. 従って, 次のような問題が自然に考えられる.

問題 4.10. *cyclotomic v -Schur* 代数 (より一般に, *rational Cherednik* 代数) について, テンソル積定理の一般化は何か.

参考文献

- [1] S.Ariki, *Graded q -Schur algebras*, mathArXiv 0903.3453 .
- [2] 有木進, $A_{n-1}^{(1)}$ 型量子群の表現論と組み合わせ論, 上智大学数学講究録, No.43, 2000.
- [3] K.Iijima, *On a higher level extension of Leclerc-Thibon product theorem in q -deformed Fock spaces*, J. Algebra, **371**, 2012, 105–131

- [4] M. Jimbo, Misra, Miwa and Okado, *Combinatorics of representations of $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}(n))$ at $q = 0.$* , Comm. Math. Phys. , **136**, 1991 ,543–566.
- [5] B.Leclerc and J.Y.Thibon, *Littlewood-Lichardson coefficients and Kazhdan-Lusztig polynomials.*
- [6] P. Shan, *Crystals of Fock spaces and cyclotomic rational double affine Hecke algebras*, arXiv: 0811.4549.
- [7] D.Uglov, *Canonical bases of higher-level q -deformed Fock spaces and Kazhdan-Lusztig polynomials*, Physical combinatorics,Progr. Math. , **191**, 2000 ,249–299.
- [8] M.Varagnolo and E.Vasserot, *On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra*, Duke Math. J.,**100**, 1999, no.2, 267–297.
- [9] X.Yvonne, *A conjecture for q -decomposition matrices of cyclotomic v -Schur algebras*, J. Algebra, **304**, 2006,no.1, 419–456.
- [10] K. Wada, *Induction and Restriction Functors for Cyclotomic q -Schur Algebras*, mathArXiv 1112.6068.