

Cauchy の折れ線法について

神大 理 菊 池 紀夫

福原[F. E. 14 (1961)] は Cauchy の折れ線法を用いて、二階放物型偏微分方程式の初期、境界値問題の解を構成した。

この方法は楕円型方程式の解(があるとして)からなる空間の compact 性に注目し、Cauchy の折れ線の分点における値とこの空間の中に構成し、正規族の考えを用いて解を求めるといものである。空間変数1次元の場合が解説されているが、ここでは3次元の場合でも同じように出来ることを注意したい。

Ω は R^3 の有界な領域とし

$$\Omega_{-\delta} = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$$

とするとき

$$\Omega = \{x; \text{dist}(x, \Omega_{-\delta}) < \delta\}$$

が十分小さな任意の正数 δ に対してなりたつものとする。

さらに、その境界 $\partial\Omega$ は C^2 に属するものとする。 $\bar{\Omega}$ で

連続な実数値関数の集合を $C(\bar{\Omega})$ とし, $C(\bar{\Omega}) \ni u(x)$ に対し, $\|u\|$ は

$$\|u\| = \max \{ |u(x)|; x \in \bar{\Omega} \}$$

とあらわすものとする。

$$\Delta f(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad f(x)|_{\partial\Omega} = 0$$

のとき, 放物型方程式

$$\partial u(t, x) / \partial t = \Delta u(t, x) + f(x)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad u(t, x)|_{\partial\Omega} = 0$$

を $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ の範囲でみたす $u(t, x)$ を求める初期, 境界値問題を考える。 $[0, T]$ を N 等分して

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad h = T/N$$

とする。 $u_0 = 0 \in C(\bar{\Omega})$ とし, $u_{n-1} \in C(\bar{\Omega})$ が求まったとき, u_n は

$$h \Delta u_n = u_n - u_{n-1} - h f$$

$$u_n|_{\partial\Omega} = 0$$

によって求める。 $(t_n, u_n), n=0, 1, \dots, N$, と結んでできる折れ線と $\varphi_N(t)$ とする。 すなわち,

$$\varphi_N(t) = \frac{t - t_{n-1}}{h} u_n + \frac{t_n - t}{h} u_{n-1}, \quad t \in [t_{n-1}, t_n]$$

とおく。 $\{u_n\}$ の作り方から

$$\|\Delta u_n\| \leq n h B \leq T B, \quad B = \|\Delta f\|$$

がなりたつ。他方, $\partial\Omega \in C^2$ のときには, Δ の Green 関数 $G(x, y)$ について, つぎの評価

$$|G(x, y) - G(x', y)| \leq C|x - x'| / \min(|x - y|, |x' - y|),$$

$$|\partial G(x, y) / \partial x| \leq C / |x - y|^2$$

のなりたつことが知られている。等式

$$u_n(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u_n(y) dy$$

と, 上の評価を用いると

$$|u_n(x_1) - u_n(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$$

となり, $\{u_n\}$ は $C(\bar{\Omega})$ の compact 集合に属することがわかる。他方,

$$D_t^+ \varphi_N(t) = \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \Delta u_n + b, \quad t \in [t_{n-1}, t_n)$$

であり,

$$\|D_t^+ \varphi_N(t)\| \leq TB + \|b\|$$

となる。すなわち, $\{\varphi_N(t)\}$ は t に関して同程度連続となるから, $N \rightarrow \infty$ のとき, $\{\varphi_N(t)\}$ はある $\varphi(t) \in C(\bar{\Omega})$ に $C(\bar{\Omega})$ で一様収束していると仮定できる。

また, e を R^3 の任意の単位ベクトルとし, 十分小さな正数 δ に対し

$$\delta u(x) = u(x + \delta e) - u(x)$$

とおく。このとき,

$$h\|\delta\Delta u_n\| \leq \max\{h\|\delta(\Delta u_{n-1} + h\Delta b)\|, h\|\delta b\| + \sup_{x \in \Omega_{-\delta}} |u_n(x+\delta e) - u_{n-1}(x+\delta e) - u_n(x) + u_{n-1}(x)|\}$$

つまり、

$$\begin{aligned} & |u_n(x+\delta e) - u_{n-1}(x+\delta e) - u_n(x) + u_{n-1}(x)| \\ &= \left| \int_{\Omega} (G(x+\delta e, y) - G(x, y)) (\Delta u_n(y) - \Delta u_{n-1}(y)) dy \right| \\ &\leq Ch\delta \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \|\delta\Delta u_n\| &\leq \|\delta\Delta u_{n-1}\| + h\|\delta\Delta b\| + C\delta + \|\delta b\| \\ &\leq T\|\delta\Delta b\| + C\delta + \|\delta b\| \end{aligned}$$

つまり、 $\delta \rightarrow 0$ のとき、 x と n に独立に

$$\delta\Delta u_n \rightarrow 0$$

となる。したがって、

$$D_t^+ \varphi_N(t) (= \Delta u_n + b, \quad t \in [t_{n-1}, t_n])$$

は $C(\bar{\Omega})$ の compact 集合に属す。他方、

$$t \in [t_{n-1}, t_n), \quad t+\delta \in [t_{m-1}, t_m)$$

のとき、

$$\begin{aligned} \|D_t^+ \varphi_N(t+\delta) - D_t^+ \varphi_N(t)\| &= \|\Delta u_m - \Delta u_n\| \\ &\leq (m-n)hB \leq (\delta+2h)B \end{aligned}$$

つまり、 $\{D_t^+ \varphi_N(t)\}$ は t に関して同程度連続となる。

したがって、 $N \rightarrow \infty$ のとき、 $C(\bar{\Omega})$ で一様に

$$D_t^+ \varphi_N(t) \rightarrow D_t \varphi(t)$$

と仮定することができよう。

作りかから、 $t \in [t_{n-1}, t_n)$ においては

$$\|D_t^+ \varphi_N(t) - (\Delta u_{n-1} + b)\| = \|\Delta u_n - \Delta u_{n-1}\| \leq hB$$

であり、 Δ が $C(\bar{D})$ で閉作用素であることに注意すれば、

$N \rightarrow \infty$ のとき

$$D_t \varphi(t) = \Delta \varphi(t) + b$$

$$\varphi(0) = 0$$

となる。作りかから、 $\varphi(t)$ は ∂D で 0 となる x の連続関数である。