

最大値原理と半群の生成

東大 理

吉田耕作

序 X を可分な局所コンパクトかつコンパクトでない Hausdorff 空間とし, X における compact support の実数値連続関数の空間を $C_0(X)$, maximum-norm による $C_0(X)$ の completion を B とする. G. A. Hunt [1] は, $C_0(X)$ から B への positive linear operator V がつぎの条件を満足するとき, V を potential オペレーターと名づけた:

(α) $f \in C_0(X)^+$, $g \in C_0(X)^+$ ならば, 不等式 $Vf \leq Vg$ は, 若しこの不等式が f の support で成立すれば, 成立す. — 以下 B の部分集合 M をとり, M^+ は M の非負な関数の全体と示す.

(β) 関数列 $\{h_n\} \subseteq C_0(X)^+$ が存在して, $n \rightarrow \infty$ なるとき 各 $x \in X$ で $(Vh_n)(x) \uparrow 1$.

(γ) V の range $R(V)$ は B で稠密である.

Hunt [1] では, (α) - (γ) の条件のもとに, B から B への positive linear operator を作る (C_0) 型の半群

$\{T_t; t \geq 0\}$ 2" $\|T_t\| \leq 1$ かつ

(1) $\forall f = \lambda\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt, \quad f \in C_0(X),$
を満足するものが unique に定まることを示す.

Hunt の論文は簡潔なかつとき々確率論的に書いてあつて、その証明は必ずしもわかりよくはない. 手柄が analysis の問題であるが、作用素論的な取扱ひをすることか生まないかを考へてみることは意義があると思ふ.

このように考へて短期共同研究をしたが、あつたが、その副産物として、Brelot-Choquet-Deny のポテンシアル論セミナーなどでは未だ得られぬ次の重要な結果も得られた.

結果. Hunt のポテンシアルオペレーター $\forall \in C_0(X)$ に制限したものは preclosed オペレーター 2", かつ最小の閉拡張 $\tilde{V}$ は T_t の infinitesimal generator A と

$$(2) \quad \tilde{V} = -A^{-1}$$

の関係にある. これは Poisson 方程式

$$A\tilde{V}f = -f, \quad f \in D(\tilde{V}) \quad (\tilde{V} \text{ の定義域})$$

の意義である.

§1. Hunt 理論の作用素論的 version.

次の4つの定理の形に述べられる.

定理 1. B から B への中への positive linear operator の系 $\{J_\lambda; \lambda > 0\}$ が pseudo-resolvent であるとする. または resolvent 方程式

$$(3) \quad J_\lambda - J_\mu = (\mu - \lambda) J_\lambda J_\mu$$

を満足するとする. このとき

$$(1)' \quad Vf = \lim_{\lambda \downarrow 0} J_\lambda f$$

で定義される V は $\lambda > 0$ として $V_\lambda = V + \lambda^{-1}I$ とおくとき, principle of majoration が成立する:

(2)' $f, g \in D(V)^+$ なるとき不等式 $(V_\lambda f)(x) \leq (V_\lambda g)(x)$ が $\text{supp}(f)$ 上成立すれば, すると $V_\lambda f \leq V_\lambda g$ が成立する.

注意. (1) にあたる $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt = (\lambda I - A)^{-1} f$ (A は T_t の infinitesimal generator) から, (2)' の代りに (2) を与えるのは自然なことに思われる.

定理 2. (3) にあたる J_λ が, $D(A)$ が dense in B であるならば A の resolvent $(\lambda I - A)^{-1}$ があるならば, $D(V)$ ((1)' にあたる V の定義域) が dense in B になると $R(V)$ dense in B になる.

注意. Hunt が (8) を假定してこの natural なことが定理 2 を示すことができる.

定理 3. $D(V) \subseteq B$ から B への中への positive linear

オペレータ V が

$$(4) \quad D(V) \supseteq C_0(X)$$

$$(5) \quad V \cdot C_0(X) \text{ dense in } B$$

と Hunt の条件 (B) を満足するから、 V は principle of positive maximum を満足する。すなわち

$$(6) \quad f \in C_0(X) \text{ と } L$$

$$P = \{x_0, (Vf)(x_0) = \sup_x (Vf)(x)\}$$

$$N = \{x_1, (Vf)(x_1) = \inf_x (Vf)(x)\}$$

とある時、 $P = \emptyset$ ならば $f(x) \geq 0$, $N = \emptyset$ ならば $f(x) \leq 0$.

定理 4. $C_0(X)$ から B への中へ、positive linear オペレータ V が (5) のように (6) を満足するならば、closed operator A with dense domain $D(A)$ がある 3 条件を満足するよ； $\Rightarrow$ unique $\Rightarrow$ 定まる。

$$(7) \quad A \text{ の resolvent } J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} \text{ は positive かつ } \|\lambda J_\lambda\| \leq 1 \quad \text{for } \lambda > 0.$$

$$(8) \quad Vf = s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} J_\lambda f \quad (f \in C_0(X))$$

$$(9) \quad AVf = -f \quad (f \in C_0(X)).$$

しかも

$$(10) \quad V \text{ は pre-closed であり } V \text{ の 最小の closed extension } \widetilde{V} = -A^{-1} \text{ によって } A \subset \widetilde{A} \text{ かつ } T_t \text{ は } V \text{ に } \lambda \downarrow 0 \text{ で unique}$$

定理4が、Hunt理論を含む半群理論から明らかである。
また定理4の"しかも"以下の陳述と、示す結果
は Hunt の理論への重要な comment と思われる。

§2. 定理1の証明。これは YOSIDA (1) に与えられ
てゐる。

先づ (3) から容易に分かるように

$$(11) \quad J_\lambda J_\mu = J_\mu J_\lambda$$

より (3) と (1)' とから

$$(12) \quad \nabla f = \lambda J_\lambda \nabla f + J_\lambda f = \nabla \lambda J_\lambda f + J_\lambda f \quad (f \in D(\nabla))$$

ゆへに ∇ の positivity と J_λ の positivity とから

$$(13) \quad f \in D(\nabla)^+, \lambda > 0 \text{ ならば } \lambda J_\lambda \nabla f \leq \nabla f$$

すなはち ∇f は "superharmonic" である。

ゆへに

$$(14) \quad f \in B^+ \text{ から } 0 < \mu \leq \lambda \text{ なる } \lambda \text{ に対する } \mu \text{ に対して}$$

$\mu J_\mu f \leq f$ を満足するならば、各点 x において

$$\lim_{\mu \downarrow 0} (J_\mu (\lambda I - \lambda^2 J_\lambda) f)(x) \text{ が存在して}$$

$$= (\lambda J_\lambda f)(x) - \lim_{\mu \downarrow 0} (\mu J_\mu f)(x)$$

証明は次の通り。(3) によつて

$$J_\mu (\lambda f - \lambda^2 J_\lambda f) = \frac{-\lambda}{\lambda - \mu} \mu J_\mu f + \frac{\lambda^2}{\lambda - \mu} J_\lambda f$$

また (3) と同等な

$$(I + (\mu - \lambda) J_\lambda) (I - \mu J_\mu) f = (I - \lambda J_\lambda) f$$

$\lambda \geq \mu > 0$, J_λ positive $\Leftrightarrow \text{true}$, (14) の假定を用い
 $0 \leq \mu_1 J_{\mu_1} f \leq \mu_2 J_{\mu_2} f$ ($0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda$), $\therefore$ $\lambda \geq \mu$
 各 $x \in X$ $\lim_{\mu \downarrow 0} (\mu J_\mu f)(x)$ が存在し (14) の結論を得る.
 $\therefore (x)'$ を証明する為

$$v(x) = \min((\nabla_\lambda f)(x), (\nabla g)(x))$$

と置く. $\therefore$ $\lambda \geq \mu$

$$(15) \quad 0 < \mu \leq \lambda \text{ ならば } \mu J_\mu v \leq v$$

$\therefore$ ある. $\therefore$ (12) と J_μ positive $\Leftrightarrow \text{true}$ より $\mu J_\mu \nabla g \leq \nabla g \leq$
 $\therefore$ $\mu J_\mu \nabla_\lambda f \leq \nabla_\lambda f$ $\therefore$ $\mu \wedge \lambda \geq \mu$ $\therefore$ $\lambda \geq \mu$ $\therefore$ $\lambda \geq \mu$
 12

$$\begin{aligned}
 \mu J_\mu \nabla_\lambda f &= \mu J_\mu \nabla f + \frac{\mu}{\lambda} J_\mu f = \mu J_\mu \nabla f + J_\mu f + \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) J_\mu f \\
 &= \nabla f + \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) J_\mu f \leq \nabla f \leq \nabla_\lambda f
 \end{aligned}$$

から明らかな $\therefore$ ある.

$$\therefore \therefore W = \lambda(I - J_\lambda)v \geq 0 \quad \therefore, (14) \text{ を用い}$$

$$(16) \quad \text{各 } x \in X \quad \therefore$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\mu \downarrow 0} (J_\mu W)(x) &\leq (\lambda J_\lambda v)(x) = v(x) - \lambda^{-1} W(x) \\
 &\leq (\lambda J_\lambda \nabla_\lambda f)(x) = (\nabla f)(x) \\
 &= (\nabla_\lambda f)(x) - \lambda^{-1} f(x)
 \end{aligned}$$

$\therefore$ $\therefore$ 假定により $\sup f(x) \leq v(x)$ $\therefore$ $(\nabla_\lambda f)(x) = v(x)$
 $\therefore$ $\therefore$ (14) により $\sup f(x) \leq v(x)$ $\therefore$ $f(x) \leq w(x)$ $\therefore$ $\therefore$
 $\therefore$ $f \geq 0$, $w \geq 0$ $\therefore$ $\therefore$ $\therefore$ $f \leq w$. $\therefore$

(16) J_λ positive かつ

$$(V_\lambda f)(x) \leq \lim_{n \downarrow 0} (J_n w)(x) + \lambda^{-1} w(x) \leq v(x) \leq (Vg)(x) \quad (17)$$

§3. 定理2の証明.

$D(V)$ が稠密だから, V の双対 (共役) オペレーター V^* と対応する λ に関する J_λ が有界オペレーターであるから (cf. K. Yosida [2], p. 195)

$(VJ_\lambda)^*$ は $J_\lambda^* V^*$ の拡張である.

ゆえに (12) により

$$V^* v^* = \lambda J_\lambda^* V^* v^* + J_\lambda^* v^* \quad (v^* \in D(V^*))$$

よって $V^* v^* = 0$ かつ $J_\lambda^* v^* = 0$ となるから, Phillips の定理 (cf. K. Yosida [2], p. 223) により $J_\lambda^* = (\lambda I - A^*)^{-1}$ となるから, $v^* = 0$ となる v^* は V^* の null space $N(V^*) = \{0\}$ かつ, Hahn-Banach 拡張定理により $R(V)$ は dense in B となる.

§4. 定理3の証明. $Vf \in B$ かつ, $(Vf)(x)$ は point at ∞ ではない. かつ $\sup_x (Vf)(x) \geq 0$.

最初 $\sup_x (Vf)(x) > 0$ の場合を考える. この場合は当然 $f \leq 0$ ではない. $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ は 0 ではない. $a = \max_{f(x) > 0} (Vf)(x)$, $a^+ = \max(a, 0)$ と

α は " $\nabla f^+ \leq a^+ + \nabla f^-$ ($-f^- = f - f^+$)" が " $\text{supp}(f^+)$ 上成立". $b > a^+$ とし, $\varepsilon > 0$ と $b > a^+ + \varepsilon \cdot \sup f^+(x)$ とする. $\varepsilon < b$ とし, $\{h_n\}$ は Hunt の条件 (B) の x 数列とし, $\nabla(f^- + b h_n)$ と $\frac{1}{2}$ 以上 ε Dini の定理によつて十分大 n に対して

$$\nabla(f^- + b h_n) \geq \nabla f^+ + \varepsilon f^+ \quad (\text{supp}(f^+) \text{ 上})$$

が成立し, $\leq$ が " α " の " α "' により

$$\nabla f^+ + \varepsilon f^+ \leq \nabla f^- + b \nabla h_n$$

よつて

$$\nabla f + \varepsilon f^+ \leq b \nabla h_n \leq b$$

よつて " $b \downarrow a^+$, $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $\nabla f \leq a^+$ ". よつて

$$a^+ = a > 0 \text{ とする } \sup_x (\nabla f)(x) = \sup_{f(x) > 0} (\nabla f)(x).$$

つまり一般の場合

$$\sup_x (\nabla f)(x) = (\nabla f)(x_0) \geq 0$$

と $\frac{1}{2}$ 以上 M と x_0 のコンパクトな近傍とし, (5) によつて

$$(\nabla g)(x_0) > \sup_{x \in X-M} (\nabla g)(x) \text{ とする } g \in C_0(X)$$

と $g \geq 0$. 右辺は勿論 ≥ 0 であるから, $\varepsilon > 0$ とすれば

$$\sup_x (\nabla(f + \varepsilon g))(x) > 0$$

かつ $\sup$ は M 上 attain され $X-M$ 上は attain されない. 今之を最初を示さねば $\varepsilon > 0$ とし, 或る $y \in M$ 上

$$f(y) + \varepsilon g(y) \geq 0$$

$\therefore \exists \varepsilon > 0$ かつ $M \in X_0$ に對して $f(x_0) \geq 0$.

§5. 定理4の証明

証明のときの面倒な点

(17) 定理4の假定のもとで、 $\lambda > 0$ なるとき

$\nabla_\lambda \cdot C_0(X)$ が B 上で dense

$\lambda > 0$ なる λ に対して (17) が成り立つことを証明するため
のことに議論を絞る。

$f \in C_0(X)$, $\lambda > 0$ なる λ に対して (6) により

$$(18) \quad \inf_x (\lambda \nabla f + f)(x) \leq \lambda \nabla f(x) \leq \sup_x (\lambda \nabla f + f)(x)$$

に於ける写像

$$(19) \quad \hat{J}_\lambda : (\lambda \nabla f + f) \rightarrow \nabla f \quad (f \in C_0(X))$$

が一意的に定義される positive linear オペレーター
であることを示す。

$$(20) \quad \|\lambda \hat{J}_\lambda g\| \leq \|g\| \quad (g = \lambda \nabla f + f, f \in C_0(X))$$

$\lambda > 0$ なる λ に対して (17) が成り立つとき、連続性により $\hat{J}_\lambda$ は
 B 全体で定義される positive continuous linear
オペレーターに拡張される。

$$(21) \quad \|\lambda \hat{J}_\lambda\| \leq 1 \quad (\lambda > 0)$$

つまり $\hat{J}_\lambda$ が resolvent であることを示す。(19)
により

$$J_\lambda(\lambda \nabla f + f) - J_\mu(\lambda \nabla f + f) = \nabla f - J_\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}(\mu \nabla f + f) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)f\right)$$

$$= \nabla f - \frac{\lambda}{\mu} \nabla f - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) J_\mu f = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)(\nabla f + J_\mu f)$$

結局

$$(\mu - \lambda) J_\mu J_\lambda (\lambda \nabla f + f) = (\mu - \lambda) J_\mu \nabla f = (\mu - \lambda) J_\mu \cdot (\nabla f + \frac{1}{\mu} f - \frac{1}{\mu} f)$$

$$= (\mu - \lambda) \frac{1}{\mu} \nabla f - (\mu - \lambda) \frac{1}{\mu} J_\mu f = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)(\nabla f - J_\mu f)$$

もし $f \in C_0(X)$ が $\lambda \neq 0$ 成立. すると $(J_\lambda - J_\mu)$ と $(\mu - \lambda) J_\mu J_\lambda$ は B の dense な $\nabla \cdot C_0(X)$ が $\lambda \neq 0$ 成立. すると

$$\begin{cases} J_\lambda - J_\mu = (\mu - \lambda) J_\mu J_\lambda \end{cases} \text{ ならば } J_\lambda \text{ は pseudo-resolvent である.}$$

また $\lambda \neq 0$ ならば $\| \lambda J_\lambda \| \leq 1$ である. "Abelian ergodic theorems" (Cf. K. Yosida [2], p. 1) により成立. すると

$$(22) \quad R(J_\lambda) \text{ の closure} = \{f \in B; \lim_{n \rightarrow \infty} \mu J_\mu f = f\}$$

$$(23) \quad R(I - \lambda J_\lambda) \text{ の closure} = \{f \in B; \lim_{n \rightarrow \infty} \mu J_\mu f = 0\}.$$

またの場合 (19) と 仮定 (5) により $R(J_\lambda)$ の closure = B , したがって μ に依存しない $\mu \neq 0$ が容易に証明される. $N(J_\mu)$ は 0 のみから成るからである.

よって J_λ は A の resolvent:

$$J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}, \quad A = \lambda I - J_\lambda^{-1}$$

$$a_n(x) = \min(nb(x), 1)$$

とみよは"

$$(27) \quad a_n(x) > 0 \text{ かつ } n \uparrow \infty \text{ のとき } a_n(x) \uparrow 1.$$

よして写像

$$(28) \quad f \rightarrow \nabla a_n f \quad (f \in C_0(X))$$

は, B 全体の B の中への連続な linear オペレーター $\nabla_n :=$
連続性によって拡張できることが容易に分かる.

よして $\lambda > 0$ を十分小さくとり $\|\lambda \nabla_n\| < 1$ とすると,

$$(\lambda \nabla_n + I)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda \nabla_n)^k$$

が存在するから

$$(29) \quad J_{\lambda}^{(n)} = \nabla_n (\lambda \nabla_n + I)^{-1}$$

は B から B への continuous linear オペレーターになる.

$$(30) \quad J_{\lambda}^{(n)} \text{ かつ positive かつ } \|\lambda J_{\lambda}^{(n)}\| \leq 1$$

を示す. これは Principle of positive maximum
を ∇_n に apply して $f \in C_0(X)$ なるとき

$$\inf_x (\lambda \nabla_n f + f)(x) \leq \lambda \nabla_n f(x) \leq \max_x (\lambda \nabla_n f + f)(x)$$

と求む ∇_n かつ continuous linear オペレーターなることを

$$J_{\lambda}^{(n)} (\lambda \nabla_n f + f) = \nabla_n f \quad (f \in B)$$

に注意すればよい.

さて $\|\lambda \nabla_n\| < 1$ なる $\lambda > 0$ に対して $\mu > 0$ を

$$\|(\mu - \lambda) J_{\lambda}^{(n)}\| \leq |\mu - \lambda| \|\lambda^{-1}\| < 1$$

る 3 如く と け ば, B 全 体 で 定 義 せ ら れ る continuous linear な $\lambda \rightarrow (I + (\mu - \lambda)J_\lambda^{(n)})^{-1}$ が 存 在 し, こ れ が

$$\begin{aligned} (\mu V_n + I) &= (I + (\mu - \lambda) V_n (\lambda V_n + I)^{-1}) (\lambda V_n + I) \\ &= (I + (\mu - \lambda) J_\lambda^{(n)}) (\lambda V_n + I) \end{aligned}$$

は B 全 体 で 定 義 せ ら れ る continuous な $\lambda \rightarrow$ を も つ.

よ っ て $J_\mu^{(n)} = V_n (\mu V_n + I)^{-1}$ と お く と, $J_\lambda^{(n)}$ と 同 い よう に し

$$(30)' \quad J_\mu^{(n)} \text{ が positive かつ } \| \mu J_\mu^{(n)} \| \leq 1$$

なる こと が わ かる.

こ れ を 繰 返 し て ち づ づ け $\mu > 0$ に 対 し $J_\mu^{(n)} = V_n (\mu V_n + I)^{-1}$ が 定 義 せ ら れ $(30)'$ の 成 立 する こと が 示 へ る.

以 上 を 準 備 と し て (17) を 証 明 す る. 任 意 の $g \in C_0(X)^+$ に 対 し $J_\mu^{(n)}$ の 定 義 か ら

$$f_n = J_\mu^{(n)} g = V_n g - \mu J_\mu^{(n)} V_n g \geq 0.$$

$$f_n = (\mu V_n + I)^{-1} V_n g \text{ なる こと が, } V_n g = \mu V_n f_n + f_n$$

$$\text{より } 0 < a_n(x) \leq 1 \text{ により}$$

$$\begin{aligned} (31) \quad 0 &\leq V_n g - (\mu V_n f_n + a_n f_n) = (1 - a_n) f_n \\ &\leq (1 - a_n) V_n g \end{aligned}$$

と なる こと が g の support が compact なる こと を, 十分 大 き な n に 対 し $\text{Dini の 定 理 を 用 い } V_n g = V g$ より

$(1-a_n) \forall n$ は $n \rightarrow \infty$ なるとき 0 に強収束 (一様収束) する. かつ n を適当にと T_n は連続オペレーター $T_n \in C_0(X)$ が " B に dense なる" 結局任意の $h \in B$ と任意の $\varepsilon > 0$ とに對して $f \in C_0(X)$ を, $\|h - (\mu T f + f)\| < \varepsilon$ なる f を選ぶことが出来る.

§7. 定理4の証明への補遺 として, 予めおける結果の証明.

証明1 $C_0(X)$ に制限した T が "pre-closed" であることは田中洋氏の方法によって証明する)

より一般的に

Lemma Banach空間 E に dense な線形部分空間 $D(A)$ から E の中への linear オペレーター A の Resolvent $J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ が " $\lambda > 0$ に定義されかつ $\sup_{\lambda > 0} \|\lambda J_\lambda\| < \infty$ とする. すると $R(A)$ dense in E ならば A^{-1} が存在する.

証明.

$$(32) \quad (I - \lambda J_\lambda) f = -J_\lambda A f \quad (f \in D(A))$$

直ちに, f が $D(A)$ に近づくとき $J_\lambda A f$ は $J_\lambda A f$ に近づく. $R(A)$ dense かつ $R(J_\lambda) = D(A)$ dense in E なることからあるかゝる f が存在する.

これは Abelian ergodic theorem (23) より

(33) すべて $g \in E$ に対して $\lambda\text{-}\lim_{\mu \downarrow 0} \mu J_\mu g = 0$.

とすから $Ag = 0$ である (32) から $\lambda J_\lambda g = g$ である,

(33) から $g = 0$ であるから $g = 0$ である. よ

って A^{-1} が存在する. (Lemma 証明)

また (9) と A^{-1} の存在から

$$(9)' \quad \nabla f = -A^{-1}f \quad (f \in C_0(X))$$

とすから A は infinitesimal generator であるから closed,

よって $-A^{-1}$ は closed である. したがって $C_0(X)$ に制限した

∇ は closed extension である. また $(C_0(X))$ に制限した

∇ の最小の閉拡張 $\widetilde{\nabla}$ が $-A^{-1}$ と一致することの証明

任意の $g \in B$ に対して (17) より $\{f_n\} \subseteq C_0(X)$ を

$$\lambda\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \nabla f_n + f_n) = g$$

ととれる. J_λ の連続性から

$$\begin{aligned} \lambda\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda (\lambda \nabla f_n + f_n) &= \lambda\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{J}_\lambda (\lambda \nabla f_n + f_n) \\ &= \lambda\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla f_n = J_\lambda g \end{aligned}$$

ゆえに $\widehat{\nabla}$ が closed であるから

$$\begin{aligned} J_\lambda g &= \widehat{\nabla} f = \lambda\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla f_n, \quad g = \lambda\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \nabla f_n + f_n) \\ &= \lambda \widehat{\nabla} f + f \end{aligned}$$

したがって g に対して unique に定まることを、この式から

明らかである. よって $(\lambda \widehat{\nabla} + I)^{-1}$ が存在する.

2, closed graph theorem 2" $(\lambda \widehat{V} + I)^{-1}$ は B 2" 到る 2
 2 3 定義 2+2 continuous linear オ 1° L-2 -1=2
 3. しか 2

$$(34) \quad J_\lambda = \widehat{V} (\lambda \widehat{V} + I)^{-1}$$

2 2 u", (9) 2 A 2 closed 2 2 2 2 2

$$(35) \quad A \widehat{V} f = -f \quad (f \in D(\widehat{V}))$$

2 2 2 2. 2 2 2 2 Lemma 2 2 A^{-1} 2 2 2 2 2 2
 $\widehat{V} f = 0$ 2 2 $f = 0$ 2 2 2 2 $\widehat{V}^{-1}$ 2 2 2 2, (34)
 2 2

$$J_\lambda^{-1} = (\lambda I - A) = (\lambda \widehat{V} + I) \widehat{V}^{-1} = \lambda I + \widehat{V}^{-1}$$

2 2 2 $-A = \widehat{V}^{-1}$ 2 2 2 2 $\widehat{V} = -A^{-1}$ 2 2 2 2.

証明 2 ($C_0(X)$ 2 2 2 2 $\widehat{V}$ 2 2 pre-closed 2 2 2 2,
 2 2 2 2 2 2 Lemma 2 2 2 2 2 2 2 2).

2 2 $f \in C_0(X)$, $\sup_x (\widehat{V} f)(x) > 0$ 2 2 2 2 2 2 $\sup$ 2
 $= \sup_{f(x) > 0} (\widehat{V} f)(x)$ 2 2 2 (84) 2 2 2 2.

$f_n \in C_0(X)$, $\lambda\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$, $\lambda\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{V} f_n = g$ 2 2 2 2
 2 2 $g = 0$ 2 2 2 2 2 2 $\widehat{V}$ 2 $C_0(X)$ 2 2 2 2
 2 2 2 2 pre-closed 2 2 2 2 2 2 2.

2 2 2 2 $g(x_0) > 0$ 2 2 $x_0 \in X$ 2 2 2 2 2 2
 2 2 2 2):

2 2 2 2 コニパク 2 2 $K \ni x_0$ 2 K 2 2 2 2

$h \in C_0(X)^+$ とする,

$$V(f_n h) \leq \|f_n\| V(h) \rightarrow 0 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

よって $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} V((1-h)f_n) = g$ とあるから, n を十分大きくとると

$$|V((1-h)f_n)(x) - g(x)| \leq \frac{1}{4} g(x_0) \quad \text{for all } x.$$

よって

$$V((1-h)f_n)(x_0) \geq \frac{3}{4} g(x_0) > 0$$

$\text{supp}((1-h)f_n)$ は K の外にあるから, 注意して
 すると, $x_1 \in X - K$ が存在して

$$V((1-h)f_n)(x_1) \geq V((1-h)f_n)(x_0)$$

となるから

$$g(x_1) \geq \frac{1}{2} g(x_0)$$

となる. K を大きくとると $g \in B$ に矛盾するから $g \leq 0$

であるから $g \equiv 0$. したがって $g \geq 0$ かつ $g \leq 0$ より $g = 0$.
 (以上)

References

G. Hunt [1]: Markov processes and potentials, II, Illinois J. of Math. 1 (1957), 316-369.

K. Yosida [1]: Positive pseudo-resolvents and potentials, Proc. Jap. Acad. 41 (1965), 1-5.

K. Yosida [2]: Functional Analysis, Springer (1966)