

Cayley Tree 上の Ising Model

早大理工 斎藤 信彦

土屋 尚

Cayley Tree の各点に Ising spin をおいた系を考える。このような系の中で現在までに研究されているのは、ある中心から球状に成長し境界以外では枝分れの数がある一定であるような形態の系のみであるが、我々は枝分れの数 of 最大値を 3 としたあらゆる可能な形態の、有限の大きさの Cayley Tree について平均した分配関数を求める方法を提出する。

ある点の spin が $+$ ($-$) の時そこから出ている一本の枝に対する分配関数の母関数を $Z_{(+)}$ ($Z_{(-)}$)、二本の枝に対する母関数を $E_{(+)}$ ($E_{(-)}$) とし、 $+$ ($-$) spin の分配関数への寄与を x (y)、並行 (反並行) bond の寄与を v (u) とかくと、次の関係がなり立つ。

$$E_{(+)} = xz (Z_{(+)})^2 \quad (1)$$

$$E_{(-)} = yz (Z_{(-)})^2 \quad (2)$$

$$Z_{(+)} = 1 + v E_{(+)} + u E_{(-)} \quad (3)$$

$$Z_{(-)} = 1 + u E_{(+)} + v E_{(-)} \quad (4)$$

ここに z は一つの spin に対する parameter である。(3) 式の第一項は着目する spin が $+$ でそれにつづく spin がない場合、第二項は $+$ の spin がつづく場合である。これら四つの式より $Z_{(+)}$, $Z_{(-)}$ に対する二次の連立方程式が得られる。磁場のない時は $x=y=1$ となりとくことができ、四つの解の中で $z \rightarrow 0$ で収束するもののみとると

$$Z_{(+)} = Z_{(-)} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(u+v)z}}{2(u+v)z} \quad (5)$$

となる。これから磁場のない時の N コの spin をもつ系の分配関数は

$$Q_N^{(0)} = \frac{6(2N)!}{(N+2)!(N-1)!} (u+v)^{N-1} \quad (6)$$

となる。つまり一次元の Ising model に対する分配関数と同じ温度依存性を持っている。比熱は Schottky 型である。

次に連立方程式を磁場について二次まで考えにいて摂動法でとくと、弱磁場を含む分配関数が得られて、帯磁率が求められる。

$$\begin{aligned} \frac{k T \chi}{N \mu^2} &= \frac{1}{N Q_N^{(0)} \pi i} \\ &\times \oint \left[32(u+v)^5 z^{N+3} \sqrt{1-4(u+v)z} \left\{ 1 + \frac{u-v}{u+v} (1 - \sqrt{1-4(u+v)z}) \right\}^2 \right]^{-1} \\ &\times \left[4(u+v)^2 - 2(u+v)(u-3v)(1 - \sqrt{1-4(u+v)z}) \right. \\ &\quad + 2(u+v)(u-v)(1 - \sqrt{1-4(u+v)z})^2 \\ &\quad \left. - (u-v)^2 (1 - \sqrt{1-4(u+v)z})^3 \right] dz \end{aligned} \quad (7)$$

$z \rightarrow 0$ で収束する母関数をとると常にこの積分を行なうべき Riemann sheet と極の存在する Riemann sheet とは違っていることがわかり、結局積分に寄与するのは branch cut だけである。これから帯磁率も一次元系と全く同じ振舞いをして有限温度で特異点はないという結果が得られる。

我々の考えているのは可能な形態の Cayley tree の重ねあわせであるから一次元的形態の数が圧倒的になるためであろう。ここでの取り扱いとは始めから枝分れの数 2, つまり一次元, の存在を許しているので、次にはこれをのぞいた形態のみの重ねあわせについて考える必要があろう。