
講義ノート

エルゴード的古典力学系における
相関関数のふるまい*

— 非平衡統計力学の視点から —

田崎 秀一
基礎化学研究所

ノート作成

小路口 暁：東京工業大学理学部応用物理学科

(1995 年 5 月 24 日受理)

*本稿は1994年11月に東京工業大学において行われた講義の講義ノートに対して講演者が加筆、再編成を加えたものである。

目次

1 熱・統計力学とエルゴード理論	201
1.1 エルゴード概念の確立	201
1.2 統計的描像に基づく非平衡統計力学へのアプローチ	204
1.3 発展演算子の一般化された固有値問題と緩和現象	206
2 エルゴード理論	208
2.1 保測変換	208
2.1.1 準備：測度と積分	208
2.1.2 保測変換	209
2.2 エルゴード定理 – 古典的結果 –	213
2.3 エルゴード性と混合性	215
2.4 掛け算型エルゴード定理とカオス	217
3 密度分布関数による記述	221
3.1 Frobenius-Perron 演算子と Koopman 演算子	221
3.1.1 準備	221
3.1.2 Frobenius-Perron 演算子	222
3.1.3 Koopman 演算子	223
3.1.4 Example –変形 Bernoulli map–	223
3.2 Frobenius-Perron 演算子、Koopman 演算子とエルゴード性	224
4 Pollicott-Ruelle の共鳴	230
4.1 エントロピーと平衡測度	230
4.1.1 エントロピー	230
4.1.2 平衡測度	231
4.1.3 Example –変形 Bernoulli map のエントロピーと平衡測度–	233
4.2 拡大写像	236
4.3 Pollicott-Ruelle の定理	237
4.3.1 Ruelle の定理の例 –多重 Bernoulli map–	239
5 多重パイこね変換における非平衡状態	245
5.1 多重パイこね変換	245
5.2 定常状態	247
5.3 流れの様子	251
5.4 定常状態の選択 –有限長多重パイこね変換–	252

Section 1

熱・統計力学とエルゴード理論

1.1 エルゴード概念の確立

ここでは P. & T. Ehrenfest [1] の記述に沿い、Boltzmann の考えに従って、平衡熱力学と力学を両立させる条件としてエルゴードの概念がどのように確立し、平衡系の統計力学を基礎付けているかを見ていく。

熱力学では第一に熱平衡の存在が仮定される：

- (A) 「孤立した系を放置すると最初にどのような状態にあっても、
ある終局的な状態（熱平衡状態）に落ちつき、それ以上巨視的变化をしない。」

これは巨視的な系において成立する経験則である。他方、微視的に見るとあらゆる系は力学の法則に従って時間発展すると考えられている。よって、熱力学と力学が両立するためには経験則 (A) に相当する力学過程が存在しなくてはならない。このような過程は次の様になる。

- (A') 「孤立した系は長時間にわたって時間発展すると、その初期条件によらず、
熱平衡に対応する（力学的）状態に到達し、そこに留まり続ける。」

ただし、与えられた系の運動状態は時々刻々変化するので熱平衡に対応する力学的状態は複数ある。(A') は、孤立系の熱平衡状態がその系の長時間にわたる平均的ふるまいにより力学的に特徴付けられることを意味する。

孤立系は力学的には保存系に対応している。そこで、 N 個の粒子からなりハミルトニアン $H(q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N)$ をもつ系を考え、条件 (A') の意味を詳しく吟味していこう。ここで q_j, p_j はそれぞれ粒子の位置座標と運動量である。エネルギーが E である初期状態 $x_0 \equiv (q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0N}; p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0N})$ から出発した軌道を考え、エネルギー面 $H(q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N) = E$ 上の一点 $x = (q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N)$ を中心とする「表面積」 $d\sigma(x)$ の領域に平均的に滞在する時間 $d\tau_{x_0}(x)$ に注目する。これは

$$d\tau_{x_0}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (x_0 \text{ から出発した軌道が時間 } t \text{ の間に } d\sigma(x) \text{ の領域に滞在する時間}) \quad (1.1)$$

で定義される。軌道は等エネルギー面 $H(x) = E$ 上に留まり、時間は必ず正であるので、 A をエネルギー面上の任意の領域とすると

$$\int_A d\tau_{x_0}(x) \geq 0, \quad \int_{H(x)=E} d\tau_{x_0}(x) = 1 \quad (1.2)$$

が成立する。

また $d\tau_{x_0}(x)$ の定義から任意の力学量 $f(x)$ の長時間平均について

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{x_0} &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt f(x(t)) \Big|_{x(0)=x_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{H(x)=E} f(x) [x_0 \text{ からでた軌道が時間 } t \text{ 内に } d\sigma(x) \text{ 中に滞在する時間}] \\ &= \int_{H(x)=E} d\tau_{x_0}(x) f(x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

が成り立つ。ただし $x(t) \equiv (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t); p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t))$ は、 $q_j(0) = q_{0j}$ $p_j(0) = p_{0j}$ という初期条件のもとでのハミルトンの正準方程式の解で、 $x(t) = T_t x_0$ とも記す。このことから (1.1) の極限が存在すれば、長時間平均から測度 $d\tau_{x_0}(x)$ が自然に導入され、かつ、(1.2) より、これは確率測度とみなせることがわかる。また、この測度は同一な系の仮想的集団（アンサンブル）に割り振られた統計的重みと考えることもできる。

さて、今考えている系が条件 (A') を満たしているとする。すると、まず、 $t \rightarrow \infty$ の時間のうち軌道はほとんど熱平衡に対応する力学的状態に留まり続けるため、力学的量 $f(x(t))$ は巨視的には熱平衡での値をとり、その時間平均 $\langle f \rangle_{x_0}$ を熱平衡での観測値 f_{eq} と同一視できる：

$$\langle f \rangle_{x_0} = f_{eq} . \quad (1.4)$$

さらに熱平衡の一意性から、力学的量 f の時間平均 $\langle f \rangle_{x_0}$ は初期状態 x_0 に依存しない：

$$\langle f \rangle_{x_0} = \int_{H(x)=E} d\tau(x) f(x) \equiv \langle f \rangle . \quad (1.5)$$

エネルギー面上に一様に分布する統計集団（ミクロ・カノニカル分布）を考え、初期値をその分布にわたって平均してみよう。すると、(1.3) と (1.5) より

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= [\langle f \rangle_{x_0}]_{mc} \\ &= \frac{1}{\Sigma} \int dx_0 \delta(E - H(x_0)) \langle f \rangle_{x_0} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{\Sigma} \int dx_0 \delta(E - H(x_0)) f(T_t x_0) \\ &= \frac{1}{\Sigma} \int dx \delta(E - H(x)) f(x) \equiv [f]_{mc} . \end{aligned} \quad (1.6)$$

ここで $[\cdot]_{mc}$ は最後の等式で定義されるミクロ・カノニカル分布にわたる平均を表わし、 $\Sigma = \int dx \delta(E - H(x))$ はその規格化因子、 δ は Dirac のデルタ関数で、 $dx \equiv dq_1 \cdot dq_2 \cdots dq_N \cdot dp_1 \cdot dp_2 \cdots dp_N$ は相空間の体積である。四番目の等式の所ではまず変数変換 $x_0 \rightarrow x = T_t x_0$ を行い、Liouville の定理 $dx_0 = dx$ を使い、更に、エネルギー保存則 $H(x_t) = H(x_0) = E$ をもちいて

$$\int dx_0 \delta(E - H(x_0)) f(T_t x_0) = \int dx \delta(E - H(x)) f(x)$$

とした。(1.6) 式は力学的量 f の時間平均 $\langle f \rangle$ がミクロ・カノニカル分布にわたる平均 $[f]_{mc}$ と一致することを示しているが、この性質をエルゴード性と呼ぶ。

結局、条件 (A') が満たされると、以下のことが言える。

1. 長時間平均は初期状態によらない。
2. 長時間平均 $\langle f \rangle$ は系が熱平衡状態にあるときの観測値 f_{eq} と一致する。
3. 長時間平均 $\langle f \rangle$ はミクロ・カノニカル分布にわたる平均 $[f]_{mc}$ と一致する (エルゴード性)。

逆にエルゴード性が成立すれば長時間平均と観測量を同一視する限り熱平衡と同様のふるまいが得られる。事実、このとき系の物理量の長時間平均は初期状態によらない一定値 $\langle f \rangle$ をとり、 $\langle f \rangle$ を観測する限り系が一定の状態に至りそこに留まり続けているように見える。

また条件 (A') が満たされる様な系では上記の結論 2,3 から分かるように、熱平衡での物理量 f の観測値 f_{eq} がミクロ・カノニカル分布にわたる f の統計平均 $[f]_{mc}$ として計算される: $f_{eq} = [f]_{mc}$ 。この等式を積極的に用いることにより、アンサンブルに関する情報と (ミクロな) 力学の性質だけから熱平衡にある系のいろいろな量を計算することができ、さらに進めて

(孤立系の熱平衡状態) = (ミクロ・カノニカル アンサンブルによって表わされる統計的状态)

という考えを認めるならばそれらの揺らぎを議論することも可能になる。Gibbs によって確立された平衡系の統計力学 [2] はこの関係に基づいている。因に「孤立系の熱平衡状態がミクロ・カノニカル アンサンブルに対応する統計的状态である」という結論は、定エネルギー面上の等しい「面積」をもつ二つの領域に対応する状態の実現確率が等しいという「等重率の仮定」をも含んでいる。

上述した Boltzmann の議論では、1) 運動方程式によって記述される時間発展 T_t と 2) ミクロ・カノニカル分布に対応する時間発展の下で不変な定エネルギー面上の測度の組が扱われ、長時間平均を通して自然に導入される測度とミクロ・カノニカルな測度が比較されている。これを抽象化し、時間発展に相当する変換とその変換の下で不変な測度の組を考え、「長時間平均」が存在する条件、予め与えられた不変測度と「長時間平均」により自然に導入される測度の関係等を調べるのがエルゴード理論であり、第 2 節で論じる。

最後に、(1.6) 式において、ミクロ・カノニカル分布の導入がやや唐突であることを注意しておく。事実、(1.5) 式までの議論にはミクロ・カノニカル分布は現われず、(1.5) 式が成り立てば (1.6) 式は定エネルギー面上で定義される時間発展不変な任意の測度について成立し「(長時間平均)=(不変測度に関する平均)」という等式が得られる。よって定エネルギー面上の不変測度がミクロ・カノニカル測度に限る時にのみ (1.6) 式の推論に飛びはない。しかし、後述するように一般の力学系は多くの不変測度を持っており、その中からミクロ・カノニカル測度を選択する際には、力学法則とは独立に、例えば、「物理的に意味がある測度はリウヴィル測度から誘導されたものに限る」*といった「選択則」が暗黙のうちに用いられているのである。この点については第4節、第5節で触れる。

1.2 統計的描像に基づく非平衡統計力学へのアプローチ

前述したように、エルゴード的な系においてマクロな観測時間がミクロな状態変化の時間に比べ十分長い場合には、物理量の長時間平均値を熱平衡での値と同一視することができ、この値が平均滞在時間に相等する不変測度 $d\tau(x)$ にわたる平均として計算されることが分かる。この不変測度はその規則に従って状態内に分布する同一の系の仮想的統計集団 (アンサンブル) を表しているとも見なせる。つまり熱平衡状態はアンサンブルによって記述でき、マクロな物理量がミクロな情報からアンサンブル平均として求められる。このアプローチを非平衡状態に拡張したものが非平衡統計力学である。'50年代以降でも久保の線形応答理論 [3]、中島、Zwanzig、森らの射影演算子の方法 [4]、Zubarev の非平衡演算子の方法 [5]、Prigogine らの理論 [6,7]、Keldysh の Green 関数法 [8]、Thermo Field Dynamics の方法 [9] など様々な理論が提出されている [10,11]。非平衡統計力学でも分布関数、つまりアンサンブルが用いられるが、その解釈はマクロな系の力学的状態が相空間の一点で表されると考えるか (「軌道的描像」) あるいは相空間上で定義された確率分布によって表されると考えるか (「統計的描像」) によって異なってくる。以下この点を論じる。

力学では系の運動状態は相空間内の一点で表され、そこには統計集団という概念は存在しない。統計力学の対象となる系に対しても状態が相空間内の一点で表されるという見方が「軌道的描像」である。この場合、熱平衡状態を表すアンサンブルは、平均滞在時間に相等する不変測度を見易くするため便宜的に導入されたものであることを強調しておく。この見方では系の状態はマクロな観測の時間スケールとミクロな運動の時間スケールが明確に分離される場合に限りアンサンブルによる記述が可能である。そして、与えられた非平衡状態に対応するアンサンブルは何か、どの程度非平衡になるとアンサンブルによる記述ができなくなるかといったことが問題になる。この立場は例えば、統計力学的アプローチが乱流の統計理論等マクロな現象の統計理論へも適用可能であるという観点から森 [12] らによって強調さ

*ミクロ・カノニカル測度はリウヴィル測度を定エネルギー面上に制限したものである。

れている。

このような見方に対し「統計的描像」では

「物理的状態は、それが熱平衡であるか否かにかかわらず、一般に密度分布関数 (つまりアンサンブル) によって統計的に表わされ、物理量の観測値がそのアンサンブル平均にあたる」

ことを仮定する。現実の実験には常に有限の精度が伴い、観測によって系が相空間の一点にあるかどうかを確定することはできない。この状況は分布関数を用いて記述可能である。さらに Dirac のデルタ関数に比例する密度分布関数によって純力学的状態を表わすこともできるので、この描像を取ることににより数学的に制限を加えていることにはならない。この立場では平衡から大きく離れた系で過渡的に生じる現象を扱うことも可能で、また系の状態は基本的レベルから統計的性格をもつことになる。Prigogine ら [6,7] はこの観点に立つアプローチを積極的に進めている。

例としてハミルトニアン $H(x)$ をもつ N 粒子系をとり、「統計的描像」に沿って系のふるまいを考えよう。ここで q_j および p_j を粒子の位置座標および運動量とすると $x \equiv (q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N)$ である。相空間は定エネルギー面 $H(x) = E$ であり、不変測度はミクロ・カノニカル測度 μ_{mc} である。密度分布関数 ρ の時間発展は Liouville 方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{ H, \rho \} \equiv -i\mathcal{L}\rho, \quad (1.7)$$

によって記述される。ここで $\{ \cdot, \cdot \}$ は Poisson 括弧式で、密度分布関数に作用する Liouville 演算子 $\mathcal{L}$ は (1.7) の第二の等号で定義される。これより初期分布 ρ_0 の場合の時刻 t での物理量 A の「統計的描像」における観測値 $\bar{A}(t)$ は

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{\int d\mu_{mc}(x) \rho_0(x)} \int_{H(x)=E} d\mu_{mc}(x) A(x) e^{-i\mathcal{L}t} \rho_0(x) = \frac{[Ae^{-i\mathcal{L}t} \rho_0]_{mc}}{[\rho_0]_{mc}}, \quad (1.8)$$

となる。系の時間発展が熱力学に従うものとすれば観測値 $\bar{A}(t)$ は長時間後には初期状態によらず熱平衡値に緩和していくはずである。つまり

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{A}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[Ae^{-i\mathcal{L}t} \rho_0]_{mc}}{[\rho_0]_{mc}} = (A \text{ の平衡値}) = [A]_{mc}, \quad (1.9)$$

あるいは

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [Ae^{-i\mathcal{L}t} \rho_0]_{mc} = [A]_{mc} [\rho_0]_{mc}, \quad (1.10)$$

が成り立つはずである。(1.9) の最後の等号は $\rho_0(x) \equiv 1$ ととりミクロ・カノニカル測度 μ_{mc} の不変性を用いることにより示せる。任意の A, ρ_0 について性質 (1.10) が成立するとき運動は測度 μ_{mc} に関し混合的であるといわれる。次節でみるように混合性はエルゴード性より強い条件である。

逆に「統計的描像」をとり系の混合性を仮定すれば観測量はすべて熱平衡値に緩和し、熱平衡状態へのアプローチという不可逆過程が自然に記述される。ただし不可逆性の重要な側面であるエントロピー増大則に関しては何も言えていないことを注意しておく[†]。

このように「統計的描像」をとることにより熱平衡状態へのアプローチを自然に含む非平衡統計力学理論を作ることができる。ここで基本的役割を担うのは Liouville 方程式 (1.7) に従って時間発展する密度分布関数 ρ である。数学的にみても軌道の時間発展が複雑な場合むしろ分布関数の時間発展は単純になり、後者を利用する方が系のエルゴード性や混合性を容易に示せる。この点については第3節で論じる。

1.3 発展演算子の一般化された固有値問題と緩和現象

前項でみたように「統計的描像」をとると混合的な系では熱平衡への緩和が自然に扱える。混合性の条件 (1.10) が緩和過程を特徴付け、この極限の速さが緩和の速さである。第4節で示すように、あるクラスの力学系では物理量 A および初期分布 ρ_0 が一定の条件を満たすとき時刻 t での平均値 $\bar{A}(t)$ は次のように書ける。

$$\bar{A}(t) \equiv [Ae^{-i\mathcal{L}t}\rho_0]_{mc} = [A]_{mc} + \sum_{j=1}^m e^{-i\eta_j t} \Psi_j(A)^* \Phi_j(\rho_0) + \hat{W}_{A\rho_0}(t) \quad (1.11)$$

ここで $t > 0$ であり、初期分布は $[\rho_0]_{mc} = 1$ と規格化されているとした。左辺は $t \rightarrow +\infty$ で右辺第一項に収束するので $\text{Im } \eta_j < 0$ である。右辺第三項は A, ρ_0 に関し双一次で[‡]、残りの項より速く減衰する：

$$|\hat{W}_{A\rho_0}(t)| \theta^{-t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty), \quad (1.12)$$

ただし θ は $0 < \theta < \min |e^{-i\eta_j}|$ を満たす 1 未満の定数である。 Ψ_j および Φ_j はそれぞれ A および ρ_0 に複素数を対応させる線型写像 (つまり線型汎関数) である。

(1.11) 式で ρ_0 を $\exp(-i\mathcal{L}s)\rho_0$ に、あるいは A を $\exp(i\mathcal{L}^\dagger s)A$ に置き換えて[§]等式

$$[Ae^{-i\mathcal{L}t}e^{-i\mathcal{L}s}\rho_0]_{mc} = [e^{i\mathcal{L}^\dagger s}A e^{-i\mathcal{L}t}\rho_0]_{mc} = [Ae^{-i\mathcal{L}(t+s)}\rho_0]_{mc},$$

を用い、 t について同じ依存性を持つ項を等置することにより

$$\Psi_j(e^{i\mathcal{L}^\dagger s}A)^* = e^{-i\eta_j s} \Psi_j(A)^*, \quad \Phi_j(e^{-i\mathcal{L}s}\rho_0) = e^{-i\eta_j s} \Phi_j(\rho_0),$$

あるいは

[†]Prigogine らは、エントロピーの定義を拡張してエントロピー増大則を定式化しようとしているが、満足のいく定式化はまだできていないようである。

[‡]つまり $\hat{W}_{A\rho_0}$ は ρ_0 を固定するとき A について線形で、 A を固定するとき ρ_0 について線形である。

[§] $\mathcal{L}^\dagger$ は $[\rho_0 \mathcal{L}^\dagger A]_{mc} \equiv [A^* \mathcal{L} \rho_0]_{mc}^*$ で定義される Liouville 演算子 $\mathcal{L}$ の随伴演算子である。

$$\Psi_j(\mathcal{L}^\dagger A)^* = \eta_j \Psi_j(A)^*, \quad \Phi_j(\mathcal{L}\rho_0) = \eta_j \Phi_j(\rho_0), \quad (1.13)$$

が得られる。ここで $\Psi_0(A) \equiv [A^*]_{mc}$ 、 $\Phi_j(\rho_0) \equiv [\rho_0]_{mc}$ 、 $\eta_0 = 0$ を加え $0 \leq j \leq m$ とした。(1.13) は Φ_j および Ψ_j が Liouville 演算子 $\mathcal{L}$ の固有値 η_j に対応する左右の固有ベクトルであることを意味する。(1.11) 式以下のコメントより η_j ($1 \leq j \leq m$) は負の虚部を持つ複素数である。つまり Liouville 演算子 $\mathcal{L}$ は (1.13) の意味で複素固有値を持ち、その虚部の絶対値が緩和率に他ならない。

ところで、量子力学と同様に密度分布関数の時間発展を Hilbert 空間上で議論することも可能である。Hilbert 空間は不変測度 μ_{mc} に関して二乗可積分な関数の空間として与えられ、内積

$$\langle A, \rho \rangle \equiv [A^* \rho]_{mc} \equiv \frac{1}{\Sigma} \int_{H(x)=E} dx \delta(H(x) - E) A(x)^* \rho(x), \quad (1.14)$$

をもつ。ただし $\Sigma \equiv \int dx \delta(H(x) - E)$ は規格化因子。(1.14) を用いて Liouville 演算子 $\mathcal{L}$ の随伴演算子を求めると部分積分により

$$\begin{aligned} \langle \rho, \mathcal{L}^\dagger A \rangle &= \langle A, \mathcal{L} \rho \rangle^* = \frac{1}{\Sigma} \left[\int_{H(x)=E} dx \delta(H(x) - E) A(x)^* i \{H(x), \rho(x)\} \right]^* \\ &= \frac{i}{\Sigma} \left[\int_{H(x)=E} dx \{H(x), \delta(H(x) - E) A(x)^*\} \rho(x) \right]^* \\ &= \frac{i}{\Sigma} \int_{H(x)=E} dx \delta(H(x) - E) \{H(x), A(x)\} \rho(x)^* = \langle \rho, \mathcal{L} A \rangle, \end{aligned} \quad (1.15)$$

となるから、Liouville 演算子はこの Hilbert 空間上エルミートの： $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ である。よってこの Hilbert 空間上で Liouville 演算子の固有値は実数でなければならない。ところが一般に η_j は虚部を持つので、 Ψ_j 、 Φ_j が固有ベクトルであることを示す関係式 (1.13) は一般化された意味でのみ成り立つ。つまり、力学量の統計平均の“熱平衡値”への緩和時間が Liouville 演算子 $\mathcal{L}$ の一般化された固有値により与えられることになる。(1.11) が成立するような系、観測量 A および初期分布 ρ_0 の条件は第4節で論じる。

一般には系が混合的であってもその平衡へのアプローチは指数的とは限らず、より緩やかな緩和（例えば $1/t^\alpha$ 型）が現われる。このようなときでも (1.11) のように分解したときあまり長くない時間スケールで指数関数部分が支配的になれば、 $\mathcal{L}$ の一般化された固有値 η_j はこの時間スケールでの緩和率と考えられる。

Prigogine らによって精力的に進められている「複素スペクトル理論」[7][¶]は前記のような時間発展演算子の一般化された固有値分解に基づく非平衡統計力学理論である。第4節の例で、決定論的拡散モデルにおける発展演算子の一般化された固有値問題と不可逆過程の関係について論じる。第5節では「統計的描像」に基づき、必ずしも密度によって表せない“特異的な”測度によって非平衡定常状態が構成できることを示す。

[¶]これはサブダイナミクス理論と呼ばれていたものであるが、当初は非摂動系が連続スペクトルを持つ場合の一般化された固有値分解の構成法に重点が置かれていたためその構造は明白ではなかった。

Section 2

エルゴード理論

ここでは、長時間平均の存在を保証する Poincaré の回帰定理および Birkhoff エルゴード定理を紹介しエルゴード性の厳密な定義を与える。さらに長時間にわたる“相乗平均”の存在を保証する Oseledec の掛け算型エルゴード定理を紹介しカオスの定義を与える。

2.1 保測変換

前節で見たように、Boltzmann の議論では力学的時間発展と共に、アンサンブルにわたる分布に対応する「測度」が考察されている。エルゴード理論ではこれを抽象化し、与えられた測度を変えない変換 (保測変換) が考察される。議論を閉じたものにするため数学的準備から始める。

2.1.1 準備 : 測度と積分

σ -代数

X を集合としその部分集合の集まり $\mathcal{A}$ が次の性質を持つ時、 $\mathcal{A}$ を σ -代数とよぶ。

1. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \equiv A^c \in \mathcal{A}$
2. X の部分集合の高々加算個の集まり $\{A_k\}$ に対し、 $A_k \in \mathcal{A}$ (for $\forall k$) $\Rightarrow \bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$.
3. $X \in \mathcal{A}$

測度 μ

σ -代数 $\mathcal{A}$ 上で定義された、集合から実数への関数 μ が次の条件を満たすとき、 μ を測度と呼ぶ。

1. $\mu(\phi) = 0$
2. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し、 $\mu(A) \geq 0$ 。

3. A の要素の高々加算個の集まり $\{A_k : A_k \in A\}$ が互いに交わらないとき、つまり $k \neq l$ ならば $A_k \cap A_l = \phi$ であるとき、 $\mu(\cup_k A_k) = \sum_k \mu(A_k)$ 。

測度空間、可測集合、可測関数

三つ組 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間、 X の部分集合で σ -代数 $\mathcal{A}$ に含まれるものを可測集合という。 X 上で定義された実数値関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は、任意の実数 α について集合 $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ が可測集合である時、可測関数とよばれる。

積分

X 上で定義された実数値関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が可測であるとき可測関数 f の積分を次の様に定義する。

1. 関数 f が非負で有界のとき:

$$\int_X d\mu(x) f(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{[n \max |f(x)|]} \frac{k}{n} \mu(x \in X : \frac{k}{n} < f(x) \leq \frac{k+1}{n}) \quad (2.1)$$

2. 関数 f が非負のとき:

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } 0 \leq f(x) \leq M \\ M, & \text{if } f(x) > M \end{cases} \quad (2.2)$$

で補助的関数を定め、次式で f の積分を定義する。

$$\int_X d\mu(x) f(x) \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \int_X d\mu(x) f_M(x) \quad (2.3)$$

3. 一般の場合:

$f^+(x) = \max(0, f(x))$ と $f^-(x) = \max(0, -f(x))$ で f の正負の部分定義して、

$$\int_X d\mu(x) f(x) \equiv \int_X d\mu(x) f^+(x) - \int_X d\mu(x) f^-(x) \quad (2.4)$$

で f の積分を定める。

(2.4) 式の両項がともに有限のとき f は可積分であるといわれる。

2.1.2 保測変換

初期点を $x(0) = x_0$ とする運動方程式の解軌道 $x(t)$ は、初期点 x_0 にある変換 T_t を作用させた結果と見なすことができる: $x(t) = T_t x_0$ 。ポテンシャルが滑らかで一定の条件を満たすとき $x(t)$ は時間変数 t と初期点 x_0 の双方にかんして滑らかで、 T_t は次の性質を持つ。

1. $T_0 x_0 = x_0$

$$2. T_t T_s = T_{t+s}$$

3. 関数: $(t, x_0) \rightarrow T_t x_0$ は二変数 x_0, t の関数として連続である。

一般に距離空間 X で定義された上述の性質を持つ変換 T_t は「流れ」(時間変数 t が実数全体を動く時) あるいは「半流」(時間変数 t が正の実数のみを動く時) と呼ばれる。また、時間変数 t を離散変数にすると $T_t = T_1^t$ が成り立つので「離散的流れ」は「写像」 T_1 と同一視できる。エルゴード理論では運動方程式の代わりに「流れ」、「半流」あるいは「写像」が考察の対象とされる。本稿では簡単のため主として写像について議論する。

前節 (1.6) 式の導出と同様にして、ハミルトニアン $H(q, p)$ をもつ保存系では Liouville の定理とエネルギー保存則から

$$\mu(A) \equiv \int_A dq dp \delta(E - H(q, p)),$$

で定義されるミクロ・カノニカル測度が時間発展について不変であることが分かる: $\mu(T_t^{-1}A) = \mu(A)$ 。ただし A は定エネルギー面 $H(q, p) = E$ 上の任意の領域で、 q, p はそれぞれ位置座標および運動量、 δ は Dirac のデルタ関数で、 T_t は正準方程式によって生成される「流れ」である。これを抽象化したものが保測変換である:

保測変換

測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ について、 X 上で定義された写像 T は

$$\text{任意の } A \in \mathcal{A} \text{ に対し、} T^{-1}A \in \mathcal{A} \text{ であつ} \mu(T^{-1}A) = \mu(A)$$

を満たす時、保測変換とよばれる。また測度 μ は写像 T について不変であるともいわれる。

エルゴード理論では与えられた測度 μ と長時間平均から導入される測度が比較される。また保測変換は必ずしも可逆でないことを注意しておく。

Example 2.1 - パイこね変換

まず次の二次元のパイこね変換について保測性を調べてみよう。この変換は次のような (図 2.1 参照)、正方形 $[0, 1) \times [0, 1)$ をそれ自身に移す全単射である。

$$T_B(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}), & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (2x - 1, \frac{y+1}{2}), & \text{if } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

$0 < \alpha < 1$ とし関数方程式

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha f_\alpha(2x), & \text{if } x < \frac{1}{2} \\ (1 - \alpha) f_\alpha(2x - 1) + \alpha, & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.6)$$

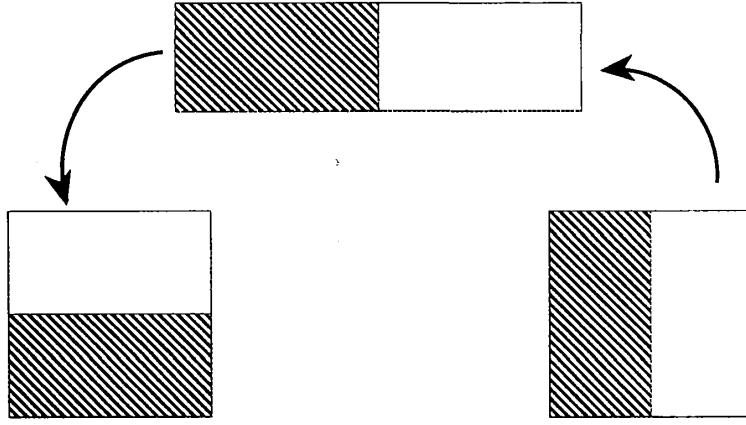


Figure 2.1: パイこね変換

で定義される関数 $f_\alpha(x)$ を考えると*、これは連続で x について厳密に増加関数であるという性質を持つ：

$$x < y \Rightarrow f_\alpha(x) < f_\alpha(y) \quad (2.7)$$

そこで

$$\mu_\alpha([0, x) \times [0, y)) = f_\alpha(x) f_\alpha(y) \quad (2.8)$$

によって正方形上に測度 μ_α を定めることができる。

この測度 μ_α についてパイこね変換 T_B は保測的である。

証明

$$T_B^{-1}[0, x) \times [0, y) = \begin{cases} [0, \frac{x}{2}) \times [0, 2y), & \text{if } y \leq \frac{1}{2} \\ [0, \frac{x}{2}) \times [0, 1) \cup [\frac{1}{2}, \frac{1+x}{2}) \times [0, 2y-1), & \text{if } y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

であるから、

1. $y \leq \frac{1}{2}$ の場合

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(T_B^{-1}[0, x) \times [0, y)) &= \mu_\alpha([0, \frac{x}{2}) \times [0, 2y)) \\ &= f_\alpha(\frac{x}{2}) f_\alpha(2y) = \alpha f_\alpha(x) f_\alpha(2y) \\ &= f_\alpha(x) f_\alpha(y) = \mu_\alpha([0, x) \times [0, y)) \end{aligned}$$

2. $y > \frac{1}{2}$ の場合

$$T_B^{-1}[0, x) \times [0, y) = [0, \frac{x}{2}) \times [0, 1) \cup [\frac{1}{2}, \frac{1+x}{2}) \times [0, 2y-1)$$

*この方程式の解の一意性については次節の例中の Lemma を参照。

$$= [0, \frac{x}{2}) \times [0, 1) \cup [0, \frac{1+x}{2}) \times [0, 2y-1) \setminus [0, \frac{1}{2}) \times [0, 2y-1)$$

と書きなおせるので、

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(T_B^{-1}[0, x) \times [0, y)) &= \mu_\alpha([0, \frac{x}{2}) \times [0, 1)) \\ &\quad + \mu_\alpha([0, \frac{1+x}{2}) \times [0, 2y-1)) - \mu_\alpha([0, \frac{1}{2}) \times [0, 2y-1)) \\ &= f_\alpha(\frac{x}{2})f_\alpha(1) + f_\alpha(\frac{x+1}{2})f_\alpha(2y-1) - f_\alpha(\frac{1}{2})f_\alpha(2y-1) \\ &= \alpha f_\alpha(x)f_\alpha(1) + ((1-\alpha)f_\alpha(x) + \alpha)f_\alpha(2y-1) \\ &\quad - \alpha f_\alpha(1)f_\alpha(2y-1) \\ &= \alpha f_\alpha(x) + f_\alpha(x)(f_\alpha(y) - \alpha) \\ &= f_\alpha(x)f_\alpha(y) = \mu_\alpha([0, x) \times [0, y)) \quad \square \end{aligned}$$

注) 関数 $f_\alpha(x)$ は $\alpha \neq \frac{1}{2}$ のとき Lebesgue の特異関数の一例、つまり Lebesgue 測度についてほとんどいたるところで $f'(x) = 0$ を満たす定数関数でない関数の例になっている。また $\alpha = \frac{1}{2}$ のときは $f_{1/2}(x) = x$ で、対応する測度 $\mu_{1/2}$ は Lebesgue 測度である。

Example 2.2 – 変形 Bernoulli map –

可逆でない保測変換の例として変形 Bernoulli map を考えよう。これは $p+q=1$ とし、次式で定義される。

$$\tilde{B}x = \begin{cases} \frac{1}{p}x, & \text{if } 0 \leq x < p \\ \frac{1}{q}(x-p), & \text{if } p \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

$0 < \alpha < 1$ とし次の関数方程式で定義される関数 $g_\alpha(x)$ を考えよう[†]。

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha g_\alpha(\frac{x}{p}), & \text{if } 0 \leq x < p \\ (1-\alpha)g_\alpha(\frac{x-p}{q}) + \alpha, & \text{if } p \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$g_\alpha(x)$ は厳密な増加関数であるから、 $\bar{\mu}_\alpha([0, x)) \equiv g_\alpha(x)$ によって区間 $[0, 1]$ 上の測度 $\bar{\mu}$ が定義できる。特に $\alpha = p$ のときは $g_p(x) = x$ で、対応する測度 $\bar{\mu}_p$ は Lebesgue 測度となる。

このとき変形 Bernoulli map $\tilde{B}$ は測度 $\bar{\mu}$ に関して保測変換である。

証明

$$\tilde{B}^{-1}[0, x) = [0, px) \cup \{[0, qx+p) \setminus [0, p)\},$$

[†]この方程式の解の一意性については次節の例中の Lemma を参照。

であるから

$$\begin{aligned}
 \bar{\mu}_\alpha(\tilde{B}^{-1}[0, x)) &= \bar{\mu}_\alpha([0, px)) + \bar{\mu}_\alpha([0, qx + p)) - \bar{\mu}_\alpha([0, p)) \\
 &= g_\alpha(px) + g_\alpha(qx + p) - g_\alpha(p) \\
 &= \alpha g_\alpha(x) + (1 - \alpha)g_\alpha(x) + \alpha - \alpha g_\alpha(1) \\
 &= g_\alpha(x) = \bar{\mu}_\alpha([0, x)) \quad \square
 \end{aligned}$$

2.2 エルゴード定理 — 古典的結果 —

前節の Boltzmann の議論では力学量の長時間平均から「ダイナミカル」な測度が構成された。(1.1) 式から分かるように長時間平均が存在するには相空間の有限の大きさを持つ領域に軌道が滞在する時間が無限大でなければならない。これは相空間の全測度が有限な保測変換について成立する (Poincaré の回帰定理)。さらに任意の力学量について、その長時間平均の存在が Birkhoff の個別エルゴード定理によって保証される。ここではエルゴード理論の古典的な結果であるこれらの定理を紹介する。

Poincaré の回帰定理

(X, A, μ) を測度空間とし、 T を測度空間 X 上で定義された保測変換とする。いま全空間の測度 $\mu(X)$ が有限で、 X の部分集合 A が正の測度を持つとする： $\mu(A) > 0$ 。するとほとんどすべての A の要素 ω に対して[†]、軌道 $T^n\omega$ は無限回 A に戻って来る。

(Poincaré の回帰定理の証明)

次のような集合 B を考える、

$$B = \{\omega \in A : \text{軌道 } \{T^n\omega : n > 0\} \text{ は 1 度も } A \text{ に戻ってこない}\}.$$

すると $T^{-n}B = \{\omega : T^n\omega \in B\}$ について、

$$m \neq n \Rightarrow T^{-n}B \cap T^{-m}B = \phi$$

がいえ。実際、 $n > m$ として、任意の $\omega \in T^{-m}B$ をとると、定義より $T^m\omega \in B$ であるから、 B の定義より $T^{n-m}(T^m\omega) \notin A$ ($n - m > 0$) である。すると $B \subset A$ であることから、 $T^{n-m}(T^m\omega) = T^n\omega \notin B$ がいえる、つまり $\omega \notin T^{-n}B$ である。

この事実から

$$\mu(\cup_{m=0}^{\infty} T^{-m}B) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu(T^{-m}B) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu(B), \quad (2.11)$$

[†]ある測度零の集合 e があって、すべての $\omega \in A \setminus e$ について軌道 $T^n\omega$ が無限回 A に戻って来ること。一般にある性質が測度零の集合を除くすべての点で成立するとき「ほとんどすべての点で成立する」あるいは「ほとんど至る所で成立する」といい、「(a.e.) で成立する」とも略す。

とできるが(第二等式では T の保測性を使った)、 $X \supset \bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m}B$ かつ $\mu(X) < \infty$ から、右辺の和は有限である。故に $\mu(B) = 0$ でなくてはならない。つまり、集合 B の測度は 0 である。よってほとんどすべての A の点は、少なくとも 1 回は A に戻ってくる。

さて $\omega \in A$ をそこから出発した軌道が有限回だけ A に戻る点とする。すると $T^m\omega \in A$ かつ $T^m\omega$ から出発した軌道が一度も A に戻ってこないような時間 $m \geq 0$ が存在する: $T^m\omega \in B$ 。つまり軌道が有限回だけ A に戻る A の点の集合 C は $C = \bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m}B$ と表わせる。その測度は (2.11) と $\mu(B) = 0$ よりやはり零となる: $\mu(C) = 0$ 。よって A の要素で測度零の集合 C に含まれない点 ω を初期点とする軌道は無限回 A に戻ってくる。 $\square$

Birkhoff の個別エルゴード定理

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間、 T を測度空間 X 上で定義された保測変換とし、 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ を可積分関数とする。するとほとんどすべての X の要素 ω に対し、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n f(T^t\omega) \equiv f^*(\omega) \quad (2.12)$$

が存在し、 f も可積分となる。さらにほとんどすべての X の要素 ω に対し、

$$f^*(T\omega) = f^*(\omega) \quad (f^* \text{ の不変性}) \quad (2.13)$$

が成立し、全空間の測度が有限: $\mu(X) < \infty$ ならば等式

$$\int_X f(\omega) d\mu(\omega) = \int_X f^*(\omega) d\mu(\omega) \quad (2.14)$$

が満たされる。(証明略。文献 13 参照。) $\square$

Boltzmann は統計熱力学を構築する際に、一体分布に関する Boltzmann 方程式を導き、それに基づいてエントロピー (に負号を付けたもの) に対応する H-関数の単調減少を示した (H-定理)。Zermelo は H-定理に反論するため Poincaré の回帰定理を用いたが、この定理は長時間平均存在の必要条件であり、前節で論じた Boltzmann の推論にはむしろその根拠を与えている。

また Birkhoff の個別エルゴード定理に現われる f^* は、前節で仮定した無限の時間にわたる平均滞在時間によって定められる測度 $d\tau_{x_0}(x)$ に関する物理量 f の平均 $\int d\tau_{x_0}(x) f(x)$ に相当している。つまり、Birkhoff の個別エルゴード定理は、極限 (1.1) がほとんどすべての初期値 x_0 に対して存在することを保証している。

2.3 エルゴード性と混合性

Boltzmann の議論では長時間平均と相空間平均が一致する性質としてエルゴード性が定義された。ここではエルゴードの概念の厳密な定義を与え、エルゴード系の性質を論じる。

エルゴード性

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間、 T を X 上で定義された保測変換とする。このとき、 $T^{-1}A = A$ を満たす任意の可測集合 $A \in \mathcal{A}$ に対し、 $\mu(A) = 0$ あるいは $\mu(X \setminus A) = 0$ が成立するとき変換 T はエルゴード的であるといわれる。

エルゴード性は次の定理に示す条件によって特徴づけられる。この節では簡単のため測度 μ は有界つまり $\mu(X) < \infty$ で $\mu(X) = 1$ と規格化されているものとする。

定理 2.1

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間、 T を X 上で定義された保測変換とする。
すると変換 T がエルゴード的であることと以下の条件 1), 2), 3) は同値である。

1. 可測関数 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ が、ほとんどすべての $\omega \in X$ に対し $f(T\omega) = f(\omega)$ を満たすならば、この関数 f はほとんどいたるところ定数である。
2. かつてな可積分関数 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ に対し、その長時間平均はほとんどすべての初期点 ω について μ -平均と一致する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} f(T^t \omega) = \int_X f(\omega) d\mu(\omega) \quad (2.15)$$

3. すべての可測集合 $A, B \in \mathcal{A}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-t}B) = \mu(A)\mu(B) \quad (2.16)$$

証明

エルゴード性 $\Rightarrow$ 1)

T がエルゴード的で、 $f(T\omega) = f(\omega)$ をみたしかつ $f(\omega) \neq \text{const.}$ (a.e.) となる関数 f があつたと仮定する。すると、 $A = \{\omega \in X : f(\omega) \geq r_0\}$ としたとき、 $\mu(A) \neq 0$ かつ $\mu(X \setminus A) \neq 0$ となるような r_0 が存在する。集合 A は $T^{-1}A = A$ を満たす:

$$T^{-1}A = \{\omega \mid T\omega \in A\} = \{\omega \mid f(T\omega) \geq r_0\} = \{\omega \mid f(\omega) \geq r_0\} = A. \quad (2.17)$$

するとエルゴード性より、 $\mu(A) = 0$ あるいは $\mu(X \setminus A) = 0$ が成立する。これは矛盾である。

1) $\Rightarrow$ 2)

Birkhoff の個別エルゴード定理より極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n f(T^t \omega) \equiv f^*(\omega), \quad (2.18)$$

がほとんどすべての ω について存在し以下のことが言える。

$$\int_X f(\omega) d\mu(\omega) = \int_X f^*(\omega) d\mu(\omega) \quad (2.19)$$

$$f^*(T\omega) = f^*(\omega) \quad (\text{a.e.}) \quad (2.20)$$

(2.20) と 1) を用いれば、

$$f^*(\omega) = \text{const.} \equiv f^* \quad (\text{a.e.})$$

であるから、(2.19) は

$$\int_X f(\omega) d\mu(\omega) = f^* \int_X d\mu(\omega) = f^* \mu(X) = f^*$$

となる。(2.18) にこの結果を用いれば、(2.18) 式が得られる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n f(T^t \omega) = f^* = \int_X f(\omega) d\mu(\omega)$$

2) $\Rightarrow$ 3)

集合 A の特性関数 1_A を次のように定義する。

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega \in A \\ 0, & \text{if } \omega \notin A \end{cases} \quad (2.21)$$

すると

$$\mu(A \cap T^{-t}B) = \int_X d\mu(\omega) 1_A(\omega) 1_B(T^t \omega)$$

とかけるから、さらに 2) の関係を用いれば、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-t}B) &= \int_X d\mu(\omega) 1_A(\omega) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} 1_B(T^t \omega) \\ &= \int_X d\mu(\omega) 1_A(\omega) \int_X d\mu(\omega') 1_B(\omega') \\ &= \mu(A) \mu(B). \end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ エルゴード性

$A \in \mathcal{A}$ が $T^{-1}A = A$ を満たしているとすれば $T^{-t}A = A$ で

$$\mu((X \setminus A) \cap T^{-t}A) = \mu((X \setminus A) \cap A) = \mu(\emptyset) = 0$$

となる。よって3) より

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \mu((X \setminus A) \cap T^{-t}A) = \mu(X \setminus A)\mu(A) \quad (2.22)$$

が言え、 $\mu(X \setminus A) = 0$ または $\mu(A) = 0$ となるから、 T はエルゴード的である。 $\square$

定理 2.1 の条件 (2.15) は長時間平均と予め与えた測度にわたる平均が一致することを示しており前節で論じたエルゴード性にほかならない。

エルゴード性より強い概念として混合性および弱混合性の概念を導入する。これは定理 2.1 の条件 (2.16) を強めたものとして定義される。

混合性

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を規格化された測度 μ をもつ測度空間、 T を X 上で定義された保測変換とする。このとき、任意の可測集合 $A, B \in \mathcal{A}$ に対し、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-t}B) = \mu(A)\mu(B) \quad (2.23)$$

が成立するとき、変換 T は混合的であるといわれる。

弱混合性

混合性の定義と同じ仮定の下で (2.23) より弱い条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-t}B) - \mu(A)\mu(B)| = 0 \quad (2.24)$$

が満たされるとき、変換 T は弱混合的であるといわれる。

これらの系は次の包含関係を満たす。

エルゴード系 $\supset$ 弱混合的系 $\supset$ 混合的系

重要な概念としてコルモゴロフ系やベルヌーイ系があるが本稿では触れない。

2.4 掛け算型エルゴード定理とカオス

Birkhoff の個別エルゴード定理の応用例として一次元の保測変換 $x_{n+1} = Tx_n$ (ただし $x_n \in \mathbf{R}$) の初期値のずれの成長率を考えてみよう。不変測度を μ とし変換 T は可微分で微分が可測であるとする。初期値を x_0 とすると時刻 n での値は $x_n = T^n x_0$ となるので、初期値が δx_0 違うと時刻 n では次の因子だけ成長している。

$$\frac{\delta x_n}{\delta x_0} = \frac{dT^n x_0}{dx_0} = T'(T^{n-1}x_0)T'(T^{n-2}x_0) \cdots T'(Tx_0)T'(x_0) \quad (2.25)$$

これから単位時間あたりのずれの指数成長率は

$$\lambda_n(x_0) \equiv \frac{1}{n} \log \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |T'(T^k x_0)| \quad (2.26)$$

となる。Birkhoff の個別エルゴード定理 (2.12) より上式の右辺は μ に関しほとんどすべての初期値 x_0 に対して、 $n \rightarrow \infty$ で極限をもつ。その極限值 $\lambda(x_0)$ をリアプノフ指数と呼ぶ。

$$\lambda(x_0) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |T'(T^k x_0)| \quad (2.27)$$

さらに T がエルゴード的で $\mu(X)$ が有限のときリアプノフ指数は初期値 x_0 に依らず

$$\lambda = \frac{1}{\mu(X)} \int_X d\mu(x) \log |T'(x)| \quad (2.28)$$

とかける (Birkhoff の個別エルゴード定理の (2.14) 式参照)。

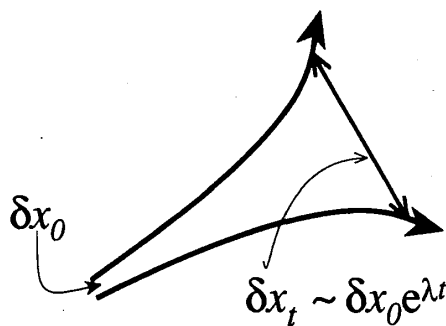


Figure 2.2: 初期値のずれの成長率

リアプノフ指数 $\lambda(x_0)$ は初期点 x_0 から出発した軌道の初期値変動に対する安定性を特徴づける ($\lambda < 0$ のとき安定、 $\lambda > 0$ のとき不安定 : 図 2.2 参照)。リアプノフ指数を多次元の (保測変換の) 場合にも一般化できることを保証するのが Oseledec の掛け算型エルゴード定理 (1968 年) である。これは長時間にわたる (2.25) 式型の “相乗平均” についてのエルゴード定理である。

Oseledec の掛け算型エルゴード定理 [14]

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を規格化された測度空間とし、 $T: X \rightarrow X$ を保測変換とする。 X 上で定義された行列値関数 $S: X \rightarrow (m \times m \text{ 行列})$ が可測で

$$\int_X d\mu(x) \log^+ \|S(x)\| < \infty \quad (2.29)$$

を満たすとする。ただし $\log^+ u = \max(0, \log u)$ かつ $\|S\| = \sup_{\vec{v} \neq 0} \frac{\|S\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$ ($\|\vec{v}\|$ は m 次元ベクトル $\vec{v}$ の長さ) である。すると、 μ に関しほとんどすべての点 $x \in X$ について極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S^*(x)S^*(Tx) \cdots S^*(T^{n-1}x)S(T^{n-1}x) \cdots S(Tx)S(x)\}^{1/2n} \equiv \Lambda(x) \quad (2.30)$$

が存在する。ただし S^* は行列 S の随伴行列である。極限行列 $\Lambda(x)$ の固有値はすべて実数である。さらに、測度 μ がエルゴード的なら、極限行列 $\Lambda(x)$ はほとんど至る所一定である。

保測変換のリアプノフ指数

X を m 次元ユークリッド空間とし、 $T : X \rightarrow X$ を可微分な変換とし、その不変測度を μ とする。このとき、 T の各成分の偏微分からなる $m \times m$ 行列

$$DT(x)_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial T_i(x)}{\partial x_j} \right) \quad (2.31)$$

に上の定理を適用すると、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{DT^*(x)DT^*(Tx) \cdots DT^*(T^{n-1}x)DT(T^{n-1}x) \cdots DT(Tx)DT(x)\}^{1/2n} \equiv \Lambda(x) \quad (2.32)$$

がほとんど至る所で存在することが分かる。極限行列 $\Lambda(x)$ の固有値の対数をリアプノフ指数あるいは特性指数と呼ぶ。さらに、測度 μ がエルゴード的ならリアプノフ指数はほとんど至る所一定である。

カオス

リアプノフ指数の定義から、正のリアプノフ指数が存在すると初期条件のずれが指数関数的に成長し後の時間発展が大きく変わることが分かる。このような「敏感な初期条件依存性」を持つ系は決定論的運動規則を持つにもかかわらず乱雑で予測不可能な運動(カオスの運動)を示す。この事実から、「点 x を初期点とする軌道は x における最大リアプノフ指数が正のときカオス的である」といわれる。

Example –多数のエルゴード測度を持つ系でのエルゴード性–

これまで見てきたようにエルゴード理論では与えられた測度を保存する保測変換が扱われており、エルゴード的な系では相空間内の“ほとんどすべて”の初期点についてそこから出発する軌道にわたる長時間平均と与えられた測度にわたる相空間平均が一致する。このことからエルゴード的な系では物理量の長時間平均が異なるような初期点は物理的にみても例外的で、長時間平均から不変測度が自然かつ一意的に決まるような印象を受ける。しかし、事情はこれほど単純でなく多数のエルゴード測度を持つ力学系が存在しそこでは測度によって

見えてくる (物理) 現象も異なる。以下で変形 Bernoulli map のリアプノフ指数を例としてこれを示す。このような場合には、どの不変測度がより物理的であるかということが問題になるが、この点に関しては第 4、第 5 節で触れる。

本節第一項の例で示したように変形 Bernoulli map $\tilde{B}$ は $\bar{\mu}_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) という非可算無限個の不変測度を持つ。さらに次節の例で示すように $\tilde{B}$ はこのすべての測度について混合的、従ってエルゴード的である。よって、測度 $\bar{\mu}_\alpha$ について“ほとんどすべて”の初期点 x_0 に対してリアプノフ指数は

$$\begin{aligned}\lambda &= \int_0^1 d\bar{\mu}_\alpha(x) \log |\tilde{B}'(x)| \\ &= \int_0^p d\bar{\mu}_\alpha(x) \log \frac{1}{p} + \int_p^1 d\bar{\mu}_\alpha(x) \log \frac{1}{q} \\ &= -\alpha \log p - (1 - \alpha) \log q\end{aligned}\tag{2.33}$$

で与えられる。(2.33) 式から分かるように異なる測度に対応するリアプノフ指数は異なり、隣接軌道の発散という現象は見る測度によって違ってくる。このとき異なる測度に関する“ほとんどすべて”の点は図 2.3 に示すように相空間内で「すみわけ」しているのである。

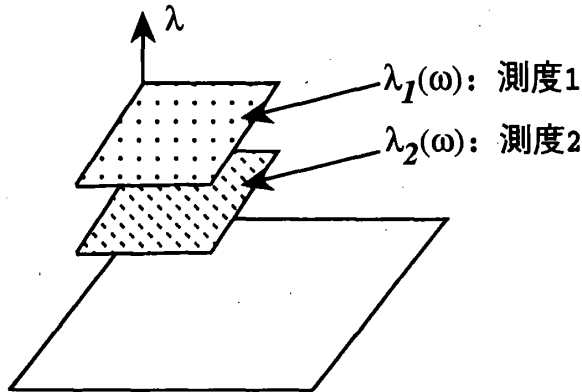


Figure 2.3: 状態のすみわけ：異なる測度は異なる Lyapunov 指数を持つ点を「見る」

Section 3

密度分布関数による記述

1.2節で論じたように「統計的描像」に基づく非平衡統計力学理論では混合的な系の場合、平衡への緩和が自然に現われる。そして分布関数の時間発展が中心的役割をはたす。写像の場合には分布関数の時間発展を記述するのは Frobenius-Perron 演算子である。この節ではこの演算子の性質とエルゴード性との関係を論じる。

3.1 Frobenius-Perron 演算子と Koopman 演算子

密度分布関数によって力学系の時間発展を記述する際に基本的役割をはたすのが Frobenius-Perron 演算子である。これは測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上の非特異な変換について定義される。まず定義に必要な概念を列挙する。

3.1.1 準備

可測変換

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし T を X 上で定義された変換とすると、任意の $A \in \mathcal{A}$ について $T^{-1}A \in \mathcal{A}$ の時 T は可測という。

非特異な変換

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間、 T を X 上で定義された可測変換とする。すべての μ -測度零の可測集合 $A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0$ に対し、 $\mu(T^{-1}A) = 0$ が成り立つとき変換 T は非特異であるという。明らかに保測変換は非特異である。

L^1 空間

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし X 上可積分な関数の全体の集合を考える。この集合で X 上ほとんど至る所一致する関数を同一視したものを L^1 空間とよび、 $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ あるいは $L^1(X)$ と

記す。 $f \in L^1(X)$ に対しそのノルムを

$$\|f\|_1 \equiv \int_X d\mu(x) |f(x)| \quad (3.1)$$

で定義する。

L^∞ 空間

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし、 X 上可測で測度零の集合を除き有界な関数の全体の集合を考える。この集合で X 上ほとんど至る所一致する関数を同一視したものを L^∞ 空間とよび、 $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ あるいは $L^\infty(X)$ と記す。 $f \in L^\infty(X)$ に対しそのノルムを

$$\|f\|_\infty \equiv \sup\{M : \mu\{x \in X : |f(x)| \geq M\} > 0\} \quad (3.2)$$

で定義する。

二つの空間 $L^1(X)$ と $L^\infty(X)$ は互いに随伴の関係にある。つまり $f \in L^1(X)$ と $g \in L^\infty(X)$ に対してスカラー積

$$\int_X d\mu(x) f(x)g(x) \equiv \langle f, g \rangle \quad (3.3)$$

が定義でき、 $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ が成り立つ。

3.1.2 Frobenius-Perron 演算子

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とするととき非特異な変換 T に関する Frobenius-Perron 演算子は関数空間 $L^1(X)$ に作用する演算子として次のようにして定義される。

1. $f \in L^1(X)$ が非負であるとき任意の可測集合 $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\nu(A) \equiv \int_{T^{-1}A} f(x) d\mu(x) \quad (3.4)$$

と置くとこれは、 T^{-1} の性質と T の非特異性より $\mu(A) = 0$ となる可測集合 A に対し $\nu(A) = 0$ を満たす有界な測度を定義する。よって Radon-Nikodym の定理*より、 $L^1(X)$ の要素 $Pf(x)$ が一意的に定まり次の様に表せる。

$$\int_A Pf(x) d\mu(x) = \nu(A) = \int_{T^{-1}A} f(x) d\mu(x) \quad (3.5)$$

これが非負な可積分関数に作用する演算子 P を定める。

*Radon-Nikodym の定理

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし、 ν を $\mathcal{A}$ 上で定義され $\mu(A) = 0$ となる任意の可測集合 A に対して、 $\nu(A) = 0$ となる有界な (つまり $\nu(X) < \infty$ である) 測度とする。すると

$$\nu(A) = \int_A d\mu(x) f(x)$$

を満たす $L^1(X)$ の要素 f がただ一つ存在する。

2. 一般の $f \in L^1(X)$ に対してはこれを非負関数の差 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ で表わすとき Pf を $Pf^+(x) - Pf^-(x)$ により定義する。このとき右辺の各項は非負な可積分関数となっているから (3.5) より

$$\int_A Pf(x) d\mu(x) = \int_{T^{-1}A} f(x) d\mu(x) \quad (3.6)$$

が任意の可測集合 $A \in \mathcal{A}$ に対して成立する。 f に対して Pf を対応させる演算子 P を Frobenius-Perron 演算子と呼ぶ。

Frobenius-Perron 演算子は、1) 線形演算子で、2) 正值性を保存し (つまり非負関数を非負関数に写像し)、3) 全積分値を保存する：

$$\int_X Pf(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) \quad (3.7)$$

3.1.3 Koopman 演算子

Koopman 演算子は次の様に定義される。 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし T を非特異な変換とする。このとき $f \in L^\infty(X)$ に対して $Uf(x) = f(Tx)$ で定義される線形演算子 $U : L^\infty(X) \rightarrow L^\infty(X)$ を Koopman 演算子と呼ぶ。

Koopman 演算子 U は次の性質を持つ。

1.

$$\|Uf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (3.8)$$

2. 任意の $f \in L^1(X)$ と $g \in L^\infty(X)$ に対して

$$\int_X d\mu(x) Pf(x)g(x) = \int_X d\mu(x) f(x)Ug(x) \quad (3.9)$$

(3.9) 式は Frobenius-Perron 演算子と Koopman 演算子がスカラー積 (3.3) について随伴の関係にあることを示している。

3.1.4 Example –変形 Bernoulli map–

前節の例で紹介した変形 Bernoulli map について Frobenius-Perron 演算子を求めよう。不変測度は (2.10) で定義される $\bar{\mu}_\alpha$ をとる。

(2.9) より $\tilde{B}^{-1}[0, x) = [0, px) \cup [p, qx + p)$ となるから

$$\begin{aligned} \int_{[0, x)} P_\alpha f(y) d\bar{\mu}_\alpha(y) &= \int_{\tilde{B}^{-1}[0, x)} f(y) d\bar{\mu}_\alpha(y) \\ &= \int_0^{px} f(y) dg_\alpha(y) + \int_p^{qx+p} f(y) dg_\alpha(y) \\ &= \int_0^x f(py) dg_\alpha(py) + \int_0^x f(qy + p) dg_\alpha(qy + p) \\ &= \int_0^x d\bar{\mu}_\alpha(y) \{ \alpha f(py) + (1 - \alpha) f(qy + p) \} \end{aligned}$$

ここで (2.10) から得られる関係式 $g_\alpha(py) = \alpha g_\alpha(y)$ 等を用いた。よって、Frobenius-Perron 演算子は

$$P_\alpha f(x) = \alpha f(px) + (1 - \alpha)f(qx + p). \quad (3.10)$$

他方 Koopman 演算子は

$$U_\alpha f(x) = f(\tilde{B}x) = \begin{cases} f(x/p), & \text{if } 0 \leq x < p \\ f(x/q - p/q), & \text{if } p \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

となる。

3.2 Frobenius-Perron 演算子、Koopman 演算子とエルゴード性

前節で定義した Frobenius-Perron 演算子、Koopman 演算子を用いてエルゴード性、混合性を特徴付けることができる。

定理 3.1

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を規格化された測度 μ をもつ測度空間 ($\mu(X) = 1$)、 T を X 上で定義された保測変換とし、 U を T に対応する Koopman 演算子とする。 $\int_X d\mu(x) f(x)g(x) = \langle f, g \rangle$ と記すとき、

1. T がエルゴード的であるための必要十分条件は任意の $f \in L^1(X)$ と $g \in L^\infty(X)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, U^k g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \quad (3.12)$$

2. T が混合的であるための必要十分条件は任意の $f \in L^1(X)$ と $g \in L^\infty(X)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, U^n g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \quad (3.13)$$

証明

どちらの証明も同様であるから (3.13) のみを示す。

(十分性)

X の可測部分集合 A に対して特性関数を $1_A(x)$ とする：

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in A \\ 0, & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

するとこれは可積分でかつ有界である。そして任意の可測集合 A, B について

$$\begin{aligned}\langle 1_A, U^t 1_B \rangle &= \int_X d\mu(x) 1_A(x) U^t 1_B(x) \\ &= \int_X d\mu(x) 1_A(x) 1_B(T^t x) = \mu(A \cap T^{-t} B),\end{aligned}\quad (3.14)$$

が成り立つから、(3.13) 式より変換 T の混合性が言える。

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(A \cap T^{-t} B) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle 1_A, U^t 1_B \rangle \\ &= \langle 1_A, 1 \rangle \langle 1, 1_B \rangle = \mu(A) \mu(B).\end{aligned}\quad (3.15)$$

(必要性)

いま f, g が可測集合 A, B の特性関数 $f = 1_A, g = 1_B$ であれば (3.14) より (3.13) 式が言える。

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle f, U^t g \rangle &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(A \cap T^{-t} B) \\ &= \mu(A) \mu(B) = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle.\end{aligned}\quad (3.16)$$

そして関係 (3.13) は f, g のそれぞれについて線形であるから、これらが有限個の特性関数の一次結合の場合

$$f(x) = \sum_j \lambda_j 1_{A_j}(x), \quad \text{かつ} \quad g(x) = \sum_l \sigma_l 1_{B_l}(x), \quad (3.17)$$

にも成立する。

最後に $f \in L^1(X)$ かつ $g \in L^\infty(X)$ の場合に (3.13) を示そう。まず関数 f, g がそれぞれの関数空間内でいくらでも良く特性関数の有限一次結合で近似できることを注意しておく。例えば g については M を $\|g\|_\infty$ 以上の正整数とし m をかつてな自然数とすると

$$g_m(x) = \sum_{j=-Mm}^{Mm-1} \frac{j}{m} 1_{B_j}(x), \quad (3.18)$$

ただし

$$B_j = \{x \in X \mid \frac{j}{m} \leq g(x) < \frac{j+1}{m}\}, \quad (3.19)$$

とおけば、 $g(x)$ と $g_m(x)$ の差は測度零の集合を除き $1/m$ 以下で結局 $\|g - g_m\|_\infty \leq 1/m$ が成り立つ。同様に $\|f - f_m\|_1 \leq 1/m$ を満たす特性関数の有限一次結合 f_m を構成できる。

これらの関数を用いると次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned}|\langle f, U^t g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle| &\leq |\langle f_m, U^t g_m \rangle - \langle f_m, 1 \rangle \langle 1, g_m \rangle| \\ &\quad + |\langle f - f_m, U^t g \rangle - \langle f - f_m, 1 \rangle \langle 1, g_m \rangle|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + |\langle f, U^t(g - g_m) \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g - g_m \rangle| \\
 & \leq |\langle f_m, U^t g_m \rangle - \langle f_m, 1 \rangle \langle 1, g_m \rangle| \\
 & \quad + \frac{2}{m} (\|f\|_1 + \|g\|_\infty + \frac{1}{m}) .
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

ただし二番目の不等号では

$$|\langle f, U^t(g - g_m) \rangle| \leq \|f\|_1 \|U^t(g - g_m)\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g - g_m\|_\infty \leq \frac{\|f\|_1}{m} ,$$

などの関係を用いた。 f_m および g_m は特性関数の有限一次結合であるから上述の議論より (3.20) の左辺第一項は $t \rightarrow +\infty$ で零に収束する。

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\langle f_m, U^t g_m \rangle - \langle f_m, 1 \rangle \langle 1, g_m \rangle| = 0 .$$

従って m を大きくとり t を十分大きくとることにより (3.20) の左辺はいくらでも小さくできる。つまり関係 (3.13) が成立する。 $\square$

Frobenius-Perron 演算子は Koopman 演算子の随伴演算子であるからこの定理は Frobenius-Perron 演算子に関する定理に読み替えられる。

系 3.1

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を規格化された測度 μ をもつ測度空間、 T を X 上で定義された保測変換とし、 P を対応する Frobenius-Perron 演算子とする。

1. T がエルゴード的であるための必要十分条件は任意の $f \in L^1(X)$ と $g \in L^\infty(X)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle P^k f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \tag{3.21}$$

2. T が混合的であるための必要十分条件は任意の $f \in L^1(X)$ と $g \in L^\infty(X)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle P^n f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \tag{3.22}$$

$\square$

Example – 変形 Bernoulli map –

前節第一項の例で示したように変形 Bernoulli map $\tilde{B}$ は $\bar{\mu}_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) という非可算無限個の不変測度を持つ。ここでは系 3.1 を用いて $\tilde{B}$ がすべての測度について混合的であることを示す。

証明

この証明のためにまず次の Lemma を証明する。

Lemma

P_α を測度 $\bar{\mu}_\alpha$ に関する変形 Bernoulli map $\tilde{B}$ の Frobenius-Perron 演算子とすると

$$f \text{ が連続関数} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P_\alpha^t f(x) = \int_0^1 dg_\alpha(x) f(x)$$

(Lemma の証明)

まず、 f は連続関数であるから次のように書ける。

$$f(x) = \int_0^1 dy \delta(y-x) f(y) = \int_0^1 d\theta_x(y) f(y) \quad (3.23)$$

ここで $\theta_x(y)$ は $y < x$ の時 $\theta_x(y) = 0$ 、 $y \geq x$ の時 $\theta_x(y) = 1$ となる階段関数である。また、Frobenius-Perron 演算子の効果は次のように測度に押し込めることができる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 dF(x) P_\alpha f(x) &= \int_0^1 dF(x) \{ \alpha f(px) + (1-\alpha) f(qx+p) \} \\ &= \int_0^p d \left(\alpha F\left(\frac{x}{p}\right) \right) f(x) + \int_p^1 d \left((1-\alpha) F\left(\frac{x-p}{q}\right) \right) f(x) \\ &= \int_0^1 d(\hat{\tau} F(x)) f(x) \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで演算子 $\hat{\tau}$ は次式で定義される。

$$\hat{\tau} F(x) = \begin{cases} \alpha F\left(\frac{x}{p}\right), & \text{if } 0 \leq x < p \\ (1-\alpha) F\left(\frac{x-p}{q}\right) + \alpha, & \text{if } p \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

容易にわかるように f を有界関数とすると $\hat{\tau} f$ も有界で

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\hat{\tau} f(x) - \hat{\tau} g(x)| \leq \bar{\alpha} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|, \quad (3.26)$$

を満たす。ただし $\bar{\alpha} = \max(\alpha, 1-\alpha)$ は 1 未満の正定数である。

(3.23) と (3.24) より

$$P_\alpha^t f(x) = \int_0^1 d\theta_x(y) P_\alpha^t f(y) = \int_0^1 d(\hat{\tau}^t \theta_x(y)) f(y), \quad (3.27)$$

が得られる。以下で $\hat{\tau}^t \theta_x(y)$ が $t \rightarrow +\infty$ で $g_\alpha(y)$ に一様収束することを示す。

まず区間 $[0,1]$ 上で定義された有界関数の成す関数空間を考えるとこれは

$$\|f\|_{\text{sup}} \equiv \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

で定義されるノルムについて完備である[†]。そして不等式 (3.26) は変換 $\hat{\tau}$ がこの空間で縮小写像であることを示している。よって縮小写像についての不動点定理より写像 $\hat{\tau}$ は、この空

[†]つまりこの関数空間は Banach 空間である。

間に唯一の不動点を持つ。変換 $\hat{\tau}$ の定義 (3.25) と関数 g_α の定義式 (2.10) を比べることにより g_α が不動点であることが分かる。(3.26) を繰り返し使い $\hat{\tau}g_\alpha = g_\alpha$ を用いると

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq y \leq 1} |\hat{\tau}^t \theta_x(y) - g_\alpha(y)| &\leq \bar{\alpha} \sup_{0 \leq y \leq 1} |\hat{\tau}^{t-1} \theta_x(y) - g_\alpha(y)| \\ &\leq \cdots \leq \bar{\alpha}^t \sup_{0 \leq y \leq 1} |\theta_x(y) - g_\alpha(y)| \end{aligned} \quad (3.28)$$

が得られるが、 $0 < \bar{\alpha} < 1$ であるから $t \rightarrow +\infty$ で $\hat{\tau}^t \theta_x(y)$ は $g_\alpha(y)$ に一様収束する。

この時、 f が連続ならば Stieltjes 積分に関する Bray-Helly の定理 [15] から

$$\int_0^1 d(\hat{\tau}^t \theta_x(y)) f(y) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^1 dg_\alpha(y) f(y) \quad (3.29)$$

がいえ、Lemma が証明できたことになる。 (Lemma の証明終わり)

変形 Bernoulli map の混合性を調べるために、絶対可積分関数 f と有界関数 g に対して、 $\langle P_\alpha^t f, g \rangle$ の漸近的ふるまいを見てみよう。連続関数の全体は絶対可積分関数の空間で稠密であるから任意の絶対可積分関数 f は連続関数によりいくらでも良く近似できる。つまり任意の自然数 m に対し $\|f - f_m\|_1 \leq 1/m$ を満たす連続関数 f_m が存在する。

このとき

$$\begin{aligned} |\langle P_\alpha^t f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle| &\leq |\langle P_\alpha^t f_m, g \rangle - \langle f_m, 1 \rangle \langle 1, g \rangle| \\ &\quad + |\langle P_\alpha^t (f - f_m), g \rangle| + |\langle (f_m - f), 1 \rangle \langle 1, g \rangle| \\ &\leq |\langle P_\alpha^t f_m, g \rangle - \langle f_m, 1 \rangle \langle 1, g \rangle| \\ &\quad + \frac{2}{m} \|g\|_\infty \end{aligned} \quad (3.30)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} |\langle P_\alpha^t (f - f_m), g \rangle| &= |\langle (f - f_m), U_\alpha^t g \rangle| \\ &\leq \|f - f_m\|_1 \|U_\alpha^t g\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{m} \\ |\langle (f_m - f), 1 \rangle \langle 1, g \rangle| &\leq \|f - f_m\|_1 \|g\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{m} \end{aligned}$$

を用いた。明らかに不等式 (3.30) の左辺第二項は m を大きくとることによりいくらでも小さくできる。次に第一項を評価しよう。 P_α の定義 (3.10) より $|P_\alpha^t f_m(x)| \leq \sup_x |f_m(x)|$ で、 f_m が連続なので Lemma が適用できて

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_\alpha^t f_m(x) = \int_0^1 dg_\alpha(x) f_m(x) = \langle f_m, 1 \rangle$$

が各 x で成立するので Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle P_\alpha^t f_m(x), g \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 d\bar{\mu}_\alpha(x) P_\alpha^t f_m(x) g(x) = \int_0^1 d\bar{\mu}_\alpha(x) \langle f_m, 1 \rangle g(x) = \langle f_m, 1 \rangle \langle 1, g \rangle, \quad (3.31)$$

が得られる。つまり (3.30) の左辺第一項は $t \rightarrow +\infty$ で零に収束する。これらの事実から (3.30) の左辺は m を大きくとり、それに応じて t を十分大きくとると任意に小さくできる。つまり

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle P_\alpha^t f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle,$$

が成立する。ゆえに系 3.1 より変形 Bernoulli map $\tilde{B}$ は測度 $\bar{\mu}_\alpha$ に関して混合的である。□

Section 4

Pollicott-Ruelle の共鳴

ここでは 1.3 節で触れた相関関数の緩和率と発展演算子の固有値の関係についての定理 (Pollicott-Ruelle の定理) を紹介する。これは不変測度として“平衡測度”と呼ばれる測度をとった場合の「拡大写像」や「公理 A 可微分同相写像」について定式化されている。そこで以下では“平衡測度”、「拡大写像」を説明した後、定理を紹介する。“平衡測度”は複数の不変測度を持つ力学系で変分原理を満たす測度として定義され、第 1 節で論じたのとは別の側面から熱平衡系の統計力学と密接な関係がある。まず、その説明から始めよう。

4.1 エントロピーと平衡測度

これまでは、取りあげる系について、不変測度を与えて議論してきたが、前節の例でも見たように、多くの力学系には複数の (時として無数の) 不変測度が存在し、その取り方によって、記述される現象が変わってくる。そこで、望ましい性質を持った不変測度を決定し、その性質を調べるのが重要になる。ここではそのような測度として、Sinai、Bowen、Ruelle らに導入された“平衡測度”を以下の議論に必要な程度紹介する。

4.1.1 エントロピー

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を規格化された測度 μ が与えられた測度空間とする。 X の互いに交わらない部分集合の族 $\{C_j\}$ で、その各要素が可測で、これらの和集合が全空間 X と一致するとき $X = \bigcup_j C_j$ 、 $\xi \equiv \{C_j\}$ を X の可測分割と呼ぶ。分割 ξ に対し、そのエントロピー $H_\mu(\xi)$ を

$$H_\mu(\xi) = - \sum_j \mu(C_j) \log \mu(C_j) \quad (4.1)$$

で定める。これは分割 ξ の持つ情報量と考えることができる。いま $T: X \rightarrow X$ を X 上で定義された保測変換とする。このとき T と分割 ξ から新しい X の分割 $T^{-1}\xi \equiv \{T^{-1}C_j\}$ が生

成できる。これととの分割を組み合わせてより細かい分割を作ることができる：

$$\xi \vee T^{-1}\xi \equiv \{C_j \cap T^{-1}C_k\}_{jk} \quad (4.2)$$

これを繰り返し、次々と細かい分割を生成できる。この様に作られる細分割に対するエントロピー $H_\mu(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-m+1}\xi)$ は漸近的に時間 m に比例し、極限

$$h_\mu(T, \xi) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} H_\mu(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-m+1}\xi) \quad (4.3)$$

が存在することが分かっている [13,16]。これを分割 ξ に関する (保測) 変換 T のエントロピーと呼ぶ。分割のエントロピー H_μ を情報量と見なすと、 h_μ は分割 ξ に関する変換 T による情報生成速度とみなせる。さらに “情報生成速度” の上限

$$h_\mu(T) = \sup_{\xi} h_\mu(T, \xi) \quad (4.4)$$

を変換 T のエントロピー (K-S エントロピー) と呼ぶ。このとき次の性質が成り立つ。

Proposition [13,16]

1) 保測変換 T が可逆で T^{-1} も保測的であるとする。このとき T と T^{-1} のエントロピーは一致する： $h_\mu(T) = h_\mu(T^{-1})$ 。

2) Kolmogorov の定理

分割 ξ に対し分割のエントロピー $H_\mu(\xi)$ が有限で、

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}\xi = (X \text{ の個々の点への分割}) \quad (4.5)$$

が成立するとき (このとき分割 ξ は生成的であると言われる)、等式

$$h_\mu(T) = h_\mu(T, \xi) \quad (4.6)$$

が成り立つ。 $\square$

4.1.2 平衡測度

Hamiltonian 系の様な力学系では、測度だけでなく距離や滑らかさを持つ空間が扱われている。“平衡測度” もこのような空間 (多様体) の写像について定義される。まず必要な用語について直感的に解説する。

多様体

曲線や曲面は一点のごく近くでは直線や平面と見なせる。これを一般化したもので、局所的に m 次元ユークリッド空間と見なせる (位相) 空間を m 次元多様体とよぶ (より正確には m 次元ユークリッド空間の開集合と同相な加算個の開近傍でおおえるハウスドルフ空間のこと)。曲線や曲面と同様、多様体に滑らかさの概念を導入することができる。無限回微分可能性に対応する滑らかさをもつ m 次元多様体を m 次元 C^∞ 多様体と呼ぶ。

可微分写像

滑らかな多様体上で定義された関数に関しては微分可能性を定義できる。特に C^∞ 多様体上では任意の正整数 r に対し r 回連続可微分な関数を考えることができる。今、 C^∞ 多様体 X から他の C^∞ 多様体 X' への写像 T が全単射で、 T と T^{-1} が共に連続微分可能の時、 T を可微分同相写像とよぶ。

接ベクトル空間、リーマン計量

滑らかな曲線や曲面では各点で接線や接平面を考えることができる。これらはベクトル空間の構造を持っている。滑らかな (m 次元) 多様体では各点で接線や接平面に対応する (m 次元の) ベクトル空間を構成できる。これを接ベクトル空間と呼び、その要素を接ベクトルと呼ぶ。

多様体上の点 p における接ベクトル $\vec{v}_p$ の長さの二乗が正定値の二次形式

$$\|\vec{v}_p\|^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(p) v_{pi} v_{pj}$$

で与えられるとき、 g をリーマン計量とよび、リーマン計量をもつ多様体をリーマン多様体という。リーマン計量を用いて多様体上の二点間の距離を定義できる。これを多様体上のリーマン計量と呼ぶ。

以上の準備の下で平衡測度を定義する。

平衡測度

X を有限次元の C^∞ 多様体とし、 $T: X \rightarrow X$ を X 上で定義された可微分写像、 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ を X 上で定義された連続な実数値関数とする。このとき T に関する不変測度 μ のうち

$$P_g(T, \mu) \equiv h_\mu(T) + \int_X d\mu(x) g(x) \quad (4.7)$$

を最大にするものを関数 g に関する写像 T の平衡測度と呼ぶ*。

* $P_g(T, \mu)$ は統計力学で、自由エネルギーに対応する量になっている。この平衡測度での値 $P_g(T) = \sup_\mu P_g(T, \mu)$ は topological pressure と呼ばれている。ここで例として扱われている変形 Bernoulli map や、

4.1.3 Example –変形 Bernoulli map のエントロピーと平衡測度–

§2.1.2 で定義した変形 Bernoulli map を例に取って測度 $\bar{\mu}_\alpha$ の K-S エントロピーや平衡測度を実際に求めてみよう。

まず、準備として、2 つの区間 $I_0 = [0, p)$, $I_1 = [p, 1)$ を用意し、次のような 0,1 の列を考え

$$\omega^{[m]} = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m), \quad (\omega_j = 0 \text{ または } 1)$$

これに対して次のような集合を作る。

$$I_{\omega^{[m]}} \equiv \bigcap_{j=0}^m \tilde{B}^{-j} I_{\omega_j} = [a_{\omega^{[m]}}, b_{\omega^{[m]}}) \quad (4.8)$$

最後の等式のように、この様に作られた集合は、ある区間となるが (図 4.1 参照)、この区間に対して、次のことが成り立つ。

Lemma

$N_0 = \{\omega_j = 0 \text{ となる } \omega_j \text{ の個数} \}$, $N_1 = \{\omega_j = 1 \text{ となる } \omega_j \text{ の個数} \}$ ($N_0 + N_1 = m + 1$) とするとき、

1. 区間の長さ :

$$b_{\omega^{[m]}} - a_{\omega^{[m]}} = p^{N_0} q^{N_1} \quad (4.9)$$

2. 区間 $I_{\omega^{[m]}}$ の測度 :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_\alpha(I_{\omega^{[m]}}) &= g_\alpha(b_{\omega^{[m]}}) - g_\alpha(a_{\omega^{[m]}}) \\ &= \alpha^{N_0} (1 - \alpha)^{N_1} . \end{aligned} \quad (4.10)$$

(Lemma の証明)

まず次のような集合を導入する。

$$\tilde{I}_r \equiv \bigcap_{j=0}^r I_{\omega_{j+m-r}}$$

すると、 $\tilde{I}_0 = I_{\omega_m}$, $\tilde{I}_m = I_{\omega^{[m]}}$ である。集合 $\tilde{I}_r$ も区間となるので $\tilde{I}_r \equiv [c_r, d_r)$ とおくと、次の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{r+1} &= [c_{r+1}, d_{r+1}) = I_{\omega_{m-r-1}} \cap \tilde{B}^{-1} \tilde{I}_r \\ &= I_{\omega_{m-r-1}} \cap \{[pc_r, qd_r) \cup [qc_r + p, qd_r + p)\} \\ &= \begin{cases} [pc_r, qd_r), & \text{if } \omega_{m-r-1} = 0 \\ [qc_r + p, qd_r + p), & \text{if } \omega_{m-r-1} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

拡大写像では平衡測度は一意に決まるが、このことは、これらの系が symbolic dynamics の手法で、有限温度で相転移しない 1 次元のスピン系に書きかえることができるということに対応している [18]。

この漸化式から、測度と区間の長さの漸化式を得ることができる。実際、 $\omega_{m-r-1} = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_\alpha(\tilde{I}_{r+1}) &= g_\alpha(d_{r+1}) - g_\alpha(c_{r+1}) = g_\alpha(pd_r) - g_\alpha(pc_r) \\ &= \alpha\{g_\alpha(d_r) - g_\alpha(c_r)\} \\ &= \alpha\bar{\mu}_\alpha(\tilde{I}_r)\end{aligned}$$

と

$$d_{r+1} - c_{r+1} = p(d_r - c_r)$$

が、 $\omega_{m-r-1} = 1$ のとき、

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_\alpha(\tilde{I}_{r+1}) &= (1 - \alpha)\bar{\mu}_\alpha(\tilde{I}_r) \\ d_{r+1} - c_{r+1} &= q(d_r - c_r)\end{aligned}$$

が得られる。区間 I_0, I_1 の長さがそれぞれ $p, 1 - p = q$ で、かつ $\bar{\mu}_\alpha(I_0) = \alpha, \bar{\mu}_\alpha(I_1) = 1 - \alpha$ であるから、上の漸化式を繰り返し用いて (4.9) と (4.10) が成り立つことがわかる。□

エントロピーを計算しよう。まず全ての記号列 $\omega^{[m]}$ に渡る区間の集合 $\{I_{\omega^{[m]}}\}$ は、区間 $[0, 1]$ の分割になっている。(図 4.1 参照)

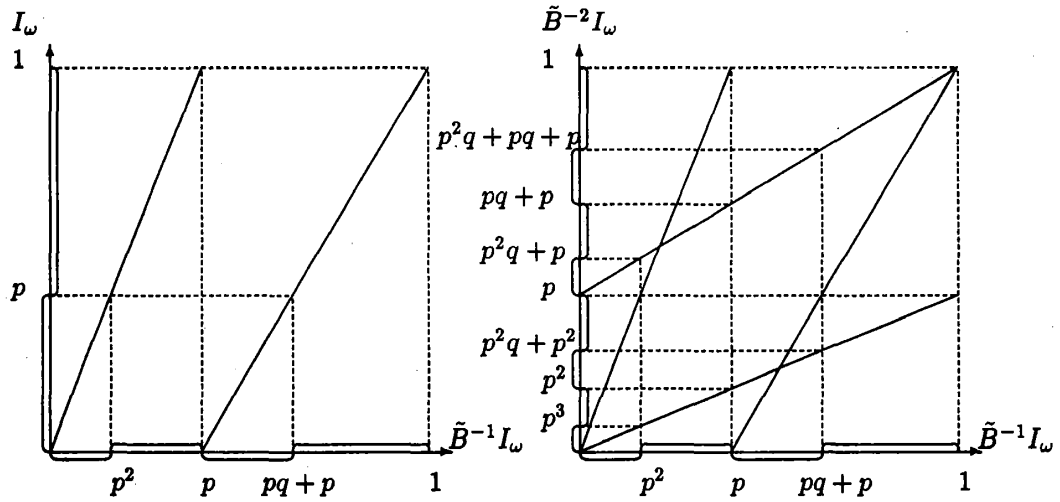


Figure 4.1: 分割 $\{I_{\omega_j}\}$ の作り方

さて、最初に分割 $\xi \equiv \{I_0, I_1\}$ をとると、それから $\tilde{B}$ によって生成される分割は、例えば、

$$\xi \vee \tilde{B}^{-1}\xi = \{I_0 \cap \tilde{B}^{-1}I_0, I_0 \cap \tilde{B}^{-1}I_1, I_1 \cap \tilde{B}^{-1}I_0, I_1 \cap \tilde{B}^{-1}I_1\}$$

であるから、

$$\xi \vee \tilde{B}^{-1}\xi \vee \dots \vee \tilde{B}^{-(m-1)}\xi = \{I_{\omega[m-1]}\}$$

である。とくに

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}\xi = \{I_{\omega[\infty]}\} \quad (4.11)$$

が成り立つ。ここで $\omega^{[\infty]}$ は無数個の $0,1$ からなる記号列である。分割 ξ が生成的であることを示そう。

列 $\omega^{[\infty]}$ の最初の $m+1$ 個の記号から成る有限列を $\omega^{[m]}$ とし、(4.8)で定まる半開区間を $I_{\omega^{[m]}} = [a_{\omega^{[m]}}, b_{\omega^{[m]}})$ とすると、 $I_{\omega^{[m]}} \supset I_{\omega^{[m+1]}}$ が満たされる。よって数列 $\{a_{\omega^{[m]}}\}$ 、 $\{b_{\omega^{[m]}}\}$ はそれぞれ単調増加列、単調減少列となり、 $m \rightarrow \infty$ で収束する。さらに Lemma の (4.9) よりこれらの極限は一致する： $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{\omega^{[m]}} = \lim_{m \rightarrow \infty} b_{\omega^{[m]}} \equiv c$ 。そして $I_{\omega^{[\infty]}} = \{c\}$ あるいは $\emptyset$ である。つまり分割 ξ は生成的である。因に $I_{\omega^{[\infty]}} = \emptyset$ は無数記号列 $\omega^{[\infty]}$ のある記号から先がすべて1になるような場合に限り、高々可算個の場合しかない。

よって、Kolmogorov の定理より変換 $\tilde{B}$ のエントロピーは分割 ξ に関する変換 $\tilde{B}$ のエントロピーと一致する。後者は、Lemma の (4.10) より

$$\begin{aligned} h_{\bar{\mu}_\alpha}(\tilde{B}, \xi) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{I_{\omega^{[m-1]}} \in \bigvee_{j=0}^{m-1} \tilde{B}^{-j}\xi} -\bar{\mu}_\alpha(I_{\omega^{[m]}}) \log \bar{\mu}_\alpha(I_{\omega^{[m]}}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-1}{m+1} \sum_{N_0=0}^m \binom{m}{N_0} \alpha^{N_0} (1-\alpha)^{m-N_0} \log(\alpha^{N_0} (1-\alpha)^{m-N_0}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。上式の和は

$$\begin{aligned} ((4.12) \text{ の和}) &= \sum_{N_0=0}^m \binom{m}{N_0} \alpha^{N_0} (1-\alpha)^{m-N_0} \log(\alpha^{N_0} (1-\alpha)^{m-N_0}) \\ &= \sum_{N_0=0}^m \binom{m}{N_0} \alpha^{N_0} (1-\alpha)^{m-N_0} [N_0 \log \alpha + (m-N_0) \log(1-\alpha)] \\ &= (\log \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \log(1-\alpha) \frac{\partial}{\partial y}) \sum_{N_0=0}^m \binom{m}{N_0} x^{N_0} y^{m-N_0} \Big|_{x=\alpha, y=1-\alpha} \\ &= (\log \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \log(1-\alpha) \frac{\partial}{\partial y}) (x+y)^m \Big|_{x=\alpha, y=1-\alpha} = m(\log \alpha + \log(1-\alpha)) \end{aligned}$$

と計算できるので結局、変換 $\tilde{B}$ のエントロピーは

$$h_{\bar{\mu}_\alpha}(\tilde{B}) = h_{\bar{\mu}_\alpha}(\tilde{B}, \xi) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha) \quad (4.13)$$

となる。

変形 Bernoulli map の平衡測度

関数 $\phi(x) = -\gamma \log |\tilde{B}'(x)|$ に対して、 $\bar{\mu}_\alpha$ の形の測度の中で、 $\tilde{B}$ の平衡測度を定める変分問題を考えよう。

$$\begin{aligned} P_\phi(\tilde{B}, \alpha) &= h_{\bar{\mu}_\alpha}(\tilde{B}) + \int_X d\bar{\mu}_\alpha(x) (-\gamma \log |\tilde{B}'(x)|) \\ &= -\alpha \log \frac{\alpha}{p^\gamma} - (1-\alpha) \log \frac{(1-\alpha)}{(1-p)^\gamma} \end{aligned}$$

これを最大にする α を求める。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} P_\phi(\tilde{B}, \alpha) = \log \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{p^\gamma}{(1-p)^\gamma} = 0$$

から、最大値を与える α_{eq} は

$$\alpha_{eq} = \frac{p^\gamma}{p^\gamma + (1-p)^\gamma} \quad (4.14)$$

と求まる。このとき $P_\phi(\tilde{B}, \alpha_{eq}) = \log(p^\gamma + q^\gamma)$ で $\bar{\mu}_{\alpha_{eq}}$ は平衡測度である。 $\gamma = 1$ の時、つまり ϕ が Lyapunov 指数を求める積分 (2.28) の被積分関数の場合

$$\alpha_{eq} = \frac{p}{p + (1-p)} = p \quad (4.15)$$

となるが、この時 $g_\alpha(x) = x$ で、平衡測度は Lebesgue 測度となる。

4.2 拡大写像

ここではエルゴード理論の立場からもよく調べられている強いカオス系である拡大写像を紹介する。

拡大写像

X を有限次元の C^∞ 多様体とし、 d をそのリーマン計量とする。コンパクト集合 (つまり有界閉集合) K と開集合 U があって、 $K \subseteq U \subseteq X$ とする。 r 回連続微分可能な写像 $T: U \rightarrow X$ が次の性質を持つ時、 T を拡大写像とよぶ。

1. $\epsilon > 0, 0 < \theta < 1$ が存在して、 $x, y \in U$ かつ $d(x, y) < \epsilon$ を満たす x, y に対し

$$d(Tx, Ty) \geq \theta^{-1} d(x, y) \quad [\text{拡大性}]$$

2. $K = \{x \in U : \text{全ての正の } n \text{ に対し } T^n x \in U\}$ [3] と組み合わせて K の不変性]

3. $O(\subseteq K)$ が空でない開集合ならば、ある正整数 n に対し $T^n O = K$ [位相的混合性]

拡大写像は平衡測度についてエルゴード的である。

定理：拡大写像のエルゴード性 [17-19]

X を有限次元のコンパクトな C^∞ リーマン多様体とし、 T を拡大写像とする。そして $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ を (ヘルダー[†]) 連続な関数とする。すると g に関する写像 T の平衡測度 μ が一意的に存在し、これはエルゴード的でもある。

4.3 Pollicott-Ruelle の定理

平衡測度について拡大写像はエルゴード的であるから二つの力学量 A, B の相関関数

$$\langle U^t AB \rangle_\mu - \langle A \rangle_\mu \langle B \rangle_\mu \equiv \int_X d\mu(x) U^t A(x) B(x) - \int_X d\mu(x) A(x) \int_X d\mu(x) B(x) \quad (4.17)$$

は $|t| \rightarrow \infty$ で (平均的に) 零に近づく。ここで U は Koopman 演算子である。力学量 A, B に対し一定の滑らかさを課すことにより、相関関数の減衰の仕方についてより詳しい結果が、Ruelle によって得られている。

定理：Pollicott-Ruelle 共鳴 (Ruelle, 1989)[19]

X を有限次元の C^∞ 多様体とし、 $U (\subseteq X)$ を開集合、 $T : U \rightarrow X$ を r 回連続微分可能な拡大写像 (拡大率 θ^{-1}) とする。そして、 $g : U \rightarrow \mathbf{R}$ を r 回連続微分可能な関数とし、 μ を g に関する平衡測度とする。このとき r 回連続微分可能な関数 A, B の相関関数の “フーリエ変換”

$$S_{AB}(z) \equiv \sum_{t=0}^{+\infty} z^t (\langle U^t AB \rangle_\mu - \langle A \rangle_\mu \langle B \rangle_\mu) \quad (4.18)$$

は $|z| < 1$ で収束し、 $|z| < \theta^{-r}$ に解析接続できる。そして $1 < |z| < \theta^{-r}$ では高々位数の有限な極を持つ。(図 4.2 参照) 特にすべての極が単純なとき

$$S_{AB}(z) = \sum_j \frac{\Psi_j(A) \Phi_j(B)}{1 - z \lambda_j} + \hat{W}_{AB}(z) \quad (4.19)$$

と表わされる。ここで λ_j^{-1} は $S_{AB}(z)$ の $1 < |z| < \theta^{-r}$ に存在する極で、 $\hat{W}_{AB}(z)$ は A, B について双線形かつ $|z| < \theta^{-r}$ で解析的である。 Ψ_j, Φ_j は超関数でそれぞれ Frobenius-Perron 演算子 P 、Koopman 演算子 U の、固有値 λ_j に対する (一般化された) 固有関数である[‡]：つま

[†]距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ に対して、写像 $f : X \rightarrow Y$ が定義されている時、定数 $\alpha, M > 0$ に対して、

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq M \{d_X(x, y)\}^\alpha \quad (4.16)$$

である時 f は、 α 次ヘルダー連続であるという。 $\alpha = 1$ の時は特にリプシッツ連続という。

[‡]厳密には U は Koopman 演算子を r 回可微分な関数の空間に制限したもので、 P は分布関数に対してではなく物理量に対して定義されているので Frobenius-Perron 演算子ではない。後者は Ruelle の transfer 演算子から作られる (定義については注参照)。しかし、形式的に U, P はそれぞれ Koopman 演算子、Frobenius-Perron 演算子に一致するので本稿ではこう呼ぶ。

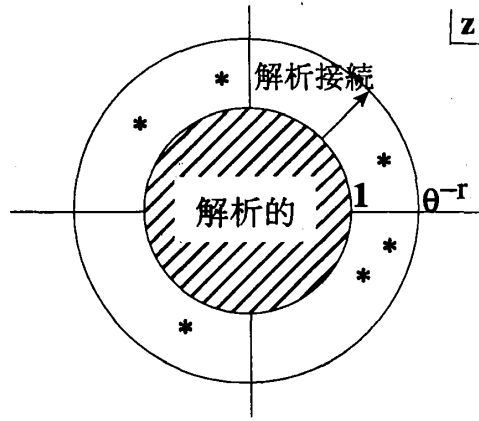


Figure 4.2: Pollicot-Ruelle 共鳴 : *が共鳴 λ_j^{-1} の位置を示している。

り、任意の A, B に対し、次式が成立する。

$$P\Psi_j(A) \equiv \Psi_j(UA) = \lambda_j\Psi_j(A) \quad (4.20)$$

$$U\Phi_j(B) \equiv \Phi_j(PB) = \lambda_j\Phi_j(B) \quad (4.21)$$

□

このときの極 λ_j^{-1} は Pollicott-Ruelle 共鳴と呼ばれている。極の位数が2以上の時は (4.19) の右辺第一項には固有関数 Ψ_j, Φ_j の代わりに Jordan 標準形に対応する (一般化された) 左右の principal vector が現われる。

同様の結果は指数的不安定性をもつ公理 A 微分同相写像と呼ばれる可逆な写像についても成り立つ (Pollicott, 1985, 1986; Ruelle, 1986, 1987 [20,21])。

(4.19) を逆 Fourier-Laplace 変換すると、相関関数の正方向の時間発展が次のようになることがわかる。

$$\langle U^t AB \rangle_\mu = \langle A \rangle_\mu \langle B \rangle_\mu + \sum_j \lambda_j^t \Psi_j(A) \Phi_j(B) + W_{AB}(t) \quad (4.22)$$

ここで $t > 0$ であり、右辺第三項は A, B に関し双一次で残りの項より速く減衰する：

$$|W_{AB}(t)| \theta'^{-t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (4.23)$$

ただし θ' は $\theta^* < \theta' < \min |\lambda_j|$ を満たす1未満の定数である。

いま不変測度 μ に関し絶対連続で Ruelle の定理が適用できる程滑らかな密度 ρ_0 を持つ初期分布を与えたとし、滑らかな力学量 A の平均値の時間発展を考える。すると (4.22) より

$$\bar{A}(t) \equiv \langle U^t A \rangle_{\rho_0} = \langle A \rangle_\mu + \sum_j \lambda_j^t \Psi_j(A) \Phi_j(\rho_0) + \hat{W}_{A\rho_0}(t) \quad (4.24)$$

を得る。これは力学量 A の平均値が“熱平衡値” $\langle A \rangle_\mu$ に指数的に緩和することを示しており、1.3 節で論じた「統計的描像」に基づく非平衡統計力学の基本となる。

注) 脚注で指摘したように演算子 P は厳密には Frobenius-Perron 演算子ではなく、Ruelle の transfer 演算子から次のように構成される。 X をコンパクトな C^∞ な多様体とし、 $T: X \rightarrow X$ を連続な写像とする。このとき X 上の連続複素数値関数の成す空間 $C^0(X)$ を考え

$$\mathcal{L}_g f(x) \equiv \sum_{y \in T^{-1}(x)} e^{g(y)} f(y)$$

で演算子 $\mathcal{L}_g$ を定義する。ここで g は X 上のヘルダー連続な実数値関数で、平衡測度の定義 (4.7) に現われるものである。この $\mathcal{L}_g$ を Ruelle の transfer 演算子とよぶ。 T が拡大写像のとき正数 λ_0 、 X 上の実数値関数 $h(x) (> 0)$ と測度 ν があって、i) $\mathcal{L}_g h(x) = \lambda_0 h(x)$, ii) すべての $f \in C^0(X)$ について $\int_X d\nu(x) \mathcal{L}_g f(x) = \lambda_0 \int_X d\nu(x) f(x)$, iii) $\int_X d\nu(x) h(x) = 1$ が満たされる。そして $\mu(A) \equiv \int_A d\nu(x) h(x)$ で測度 μ を定めるとこれはヘルダー連続関数 g に対応する平衡測度である。このとき

$$Pf(x) \equiv \frac{1}{\lambda_0 h(x)} \mathcal{L}_g(hf)(x) \quad (4.25)$$

で定義される空間 $C^0(X)$ 上の演算子が Ruelle の定理に現われる P である。 $\mathcal{L}_g$, ν の性質から

$$\begin{aligned} \int_X d\mu(x) U A(x) B(x) &= \frac{1}{\lambda_0} \int_X d\nu(x) \mathcal{L}_g(h A \circ T B)(x) = \frac{1}{\lambda_0} \int_X d\nu(x) A(x) \mathcal{L}_g(h B)(x) \\ &= \int_X d\nu(x) h(x) A(x) \frac{1}{\lambda_0 h(x)} \mathcal{L}_g(h B)(x) = \int_X d\mu(x) A(x) P B(x), \end{aligned} \quad (4.26)$$

となるので (4.25) で与えられる P は形式的に Frobenius-Perron 演算子と一致する。

4.3.1 Ruelle の定理の例 —多重 Bernoulli map—

N 個の格子点からなる周期的一次元格子上的各サイトに区間 $[0,1)$ を配し、そのサイトと区間を次のようなダイナミックスで運動するモデルを考よう (これを多重 Bernoulli map とよぶ)。これは決定論的拡散モデルの一例である。

$$S(n, x) = \begin{cases} (n-1, 2x), & \text{if } x < \frac{1}{2} \\ (n+1, 2x-1), & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.27)$$

ただし $1 \leq n \leq N$ で $n = -1$ と $n = N$ のサイト、 $n = N+1$ と $n = 1$ のサイトはそれぞれ同一である。(2.6) 式で定義される関数 $f_\alpha(x)$ を用い $\mu_\alpha\{[0, x]\}_n = f_\alpha(x)$ (添字 n は区間が n 番

目のサイトに属していることを示す) で測度 μ_α を定めるとこれは不変測度である。対応する Frobenius-Perron 演算子は

$$Pf(n, x) = \alpha f(n+1, \frac{x}{2}) + (1-\alpha)f(n-1, \frac{1+x}{2}) \quad (4.28)$$

と書ける。この多重 Bernoulli map について Ruelle の定理を具体的に見てみよう。

まず、この方程式をサイトの成分について Fourier 変換する。

$$\hat{f}_s(x) \equiv \sum_{n=1}^N e^{-iq(s)n} f(n, x),$$

ここで $s = 1, 2, \dots, N$ で $q(s) = 2\pi s/N$ と略記した。この逆変換の公式と (4.28) より分布の時間発展が次式のようになることが容易にわかる。

$$P^t f(n, x) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N e^{iq(s)n} \lambda_s^t \hat{P}_s^t \hat{f}_s(x) \quad (4.29)$$

ただし、複素数 λ_s は

$$\lambda_s = \alpha e^{iq(s)} + (1-\alpha)e^{-iq(s)}, \quad (4.30)$$

で、演算子 $\hat{P}_s$ は $\alpha_s \equiv \alpha e^{iq(s)}/\lambda_s$ という定数を用い次式で与えられる。

$$\hat{P}_s \hat{f}_s(x) \equiv \alpha_s \hat{f}_s(\frac{x}{2}) + (1-\alpha_s) \hat{f}_s(\frac{x+1}{2}) \quad (4.31)$$

Ruelle の定理に相等する結果を述べる前に演算子 $\hat{P}_s$ の不変汎関数、つまり任意の関数 $f(x)$ について $\mathcal{F}_s(\hat{P}_s f) = \mathcal{F}_s(f)$ を満たす汎関数 $\mathcal{F}_s$ を調べて見よう。いま

$$\mathcal{F}_s(f) = \int_0^1 dF_s(x) f(x), \quad (4.32)$$

と置いてみると $\mathcal{F}_s$ の不変性は関数 $F_s(x)$ が次の関数方程式をみたすことと同値である。

$$F_s(x) = \begin{cases} \alpha_s F_s(2x), & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (1-\alpha_s)F_s(2x-1) + \alpha_s, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.33)$$

方程式 (4.33) は $\max(|\alpha_s|, |1-\alpha_s|) < 1$ の時に限って解を持つ。この条件が満たされないと (4.32) は意味を成さないが、 F_s を何回か積分したものは意味を持つ。そして積分した F_s を用いて不変汎関数を構成することができる。まず $l = 1, 2, \dots$ として漸化式

$$h_{0,s}(x) = \alpha_s, \quad h_{l,s}(x) = \int_{1/2}^x dx' h_{l-1,s}(x') + \frac{\alpha_s}{2^l - 1} \int_{1/2}^1 dx' h_{l-1,s}(x'), \quad (4.34)$$

で定まる l 次の多項式を用いて

$$F_{r,s}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha_s}{2^r} F_{r,s}(2x), & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1-\alpha_s}{2^r} F_{r,s}(2x-1) + h_{r,s}(x), & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.35)$$

という関数方程式を考えるとこれは $\max(|\alpha_s|/2^r, |1-\alpha_s|/2^r) < 1$ のときに一意解を持つ。そして $\bar{\alpha} = \max(\alpha, 1-\alpha)$ とし s が $\bar{\alpha}/2^r < |\lambda_s| \leq \bar{\alpha}/2^{r-1}$ を満たすとき

$$\mathcal{F}_s(f) = \sum_{l=0}^{r-1} (-1)^l c_{l,s} f^{(l)}(1) + (-1)^r \int_0^1 dF_{r,s}(x) f^{(r)}(x), \quad (4.36)$$

で汎関数を定めると、これは不変である： $\mathcal{F}_s(\hat{P}_s f) = \mathcal{F}_s(f)$ 。ここで定数 $c_{l,s}$ は

$$c_{l,s} = \frac{2^l}{2^l - 1} \int_{1/2}^1 dx' h_{l-1,s}(x'),$$

で与えられる。

Proposition

関数 $g(n, x)$ が x について $(m+1)$ 回連続微分可能であれば次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} P^t g(n, x) &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{s \\ \bar{\alpha}/2^m < |\lambda_s| \leq 1}} \lambda_s^t Q_{s,0}(n, x) \langle \tilde{Q}_{s,0}, g \rangle \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{N} \sum_{\substack{s \\ \bar{\alpha}/2^{m-\nu} < |\lambda_s| \leq 1}} \left(\frac{\lambda_s}{2^\nu} \right)^t Q_{s,\nu}(n, x) \langle \tilde{Q}_{s,\nu}, g \rangle + W_t^{(m)} g(n, x) \end{aligned} \quad (4.37)$$

ただし、 $\bar{\alpha} \equiv \max(\alpha, 1-\alpha)$ で、各項の関数は以下のような性質を持つ：

1. 左固有関数：

$$\langle \tilde{Q}_{s,\nu}, g \rangle \equiv \mathcal{F}_s(\hat{g}_s^{(\nu)}), \quad (4.38)$$

$$\langle \tilde{Q}_{s,\nu}, P g \rangle = \frac{\lambda_s}{2^\nu} \langle \tilde{Q}_{s,\nu}, g \rangle \quad (4.39)$$

2. 右固有多項式：

$$Q_{s,\nu}(n, x) \equiv e^{iq(s)n} P_{s,\nu}(x), \quad (4.40)$$

$$P Q_{s,\nu}(n, x) = \frac{\lambda_s}{2^\nu} Q_{s,\nu}(n, x), \quad (4.41)$$

で $P_{s,\nu}(x)$ は次の母関数によって生成される ν 次の多項式である。

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu P_{s,\nu}(x) = \frac{e^{xt}}{\prod_{k=1}^{\infty} (\alpha_s + (1-\alpha_s)e^{t/2^k})} \quad (4.42)$$

3. 剰余項のオーダー：

$$|W_t^{(m)} g(n, x)| \sim \left(\frac{\bar{\alpha}}{2^m} \right)^t \quad (4.43)$$

注) (4.37) の右辺第一項は N 個のサイト上で定義された (左隣のサイトへの遷移確率が α 、右隣のサイトへの遷移確率が $1 - \alpha$) ランダム ウォークの Chapman-Kolmogorov 方程式の初期値問題の解と一致する。つまり、決定論的なダイナミックスに従っているモデルで、極限操作をせずに確率的な現象論を厳密に導けるのである。また、Frobenius-Perron 演算子の固有値 $\lambda_s/2^\nu$ は予め設定した測度のパラメータ α に依存している。このことは、第 2 章でも見たことだが、設定している測度を変えることで見える (記述される) 物理現象が変わることを示している。

証明

まず、次のような演算子 J_s を導入する。

$$\begin{aligned} Ig(x) &\equiv \int_0^x dx' g(x'), \\ J_s g(x) &\equiv Ig(x) - \mathcal{F}_s(Ig) \end{aligned} \quad (4.44)$$

この J_s を利用して (4.37) を証明しよう。さて $Ig'(x) = g(x) - g(0)$ と $\mathcal{F}_s(1) = 1$ より

$$g(x) = \mathcal{F}_s(g) + J_s g'(x) \quad (4.45)$$

である。そこで、 $P_{s,0}(x) \equiv 1$, $P_{s,\nu}(x) \equiv J_s^\nu P_{s,0}(x)$ として、

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^m P_{s,\nu}(x) \mathcal{F}_s(g^{(\nu)}) + J_s^{m+1} g^{(m+1)}(x) \quad (4.46)$$

を帰納法で示そう。 $m = k$ で (4.46) が正しいとする:

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^k P_{s,\nu}(x) \mathcal{F}_s(g^{(\nu)}) + J_s^{k+1} g^{(k+1)}(x) \quad (4.47)$$

(4.45) より、

$$g^{(k+1)}(x) = \mathcal{F}_s(g^{(k+1)}) + J_s g^{(k+2)}(x) \quad (4.48)$$

であるから、(4.47) より

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^k P_{s,\nu}(x) \mathcal{F}_s(g^{(\nu)}) + J_s^{k+1} \mathcal{F}_s(g^{(k+1)}) + J_s^{k+2} g^{(k+2)}(x) \quad (4.49)$$

とできる。ここで、 $J_s^{k+1} \cdot 1 = J_s^{k+1} P_{s,0}(x) = P_{s,k+1}(x)$ 故、 $m = k+1$ でも (4.46) が成り立つ。

演算子 J_s と Frobenius-Perron 演算子の s 成分との間には次のような交換関係が存在する。

$$\hat{P}_s J_s = \frac{1}{2} J_s \hat{P}_s. \quad (4.50)$$

これと多項式 $P_{s,\nu}(x)$ の定義から

$$\hat{P}_s^t P_{s,\nu}(x) = \hat{P}_s^t J_s^\nu P_{s,0}(x) = \left(\frac{1}{2^\nu}\right)^t J_s^\nu \hat{P}_s^t P_{s,0}(x) = \left(\frac{1}{2^\nu}\right)^t J_s^\nu P_{s,0}(x) = \left(\frac{1}{2^\nu}\right)^t P_{s,\nu}(x) . \quad (4.51)$$

(4.46), (4.50) と (4.51) から

$$\begin{aligned} \lambda_s^t \hat{P}_s^t g(x) &= \sum_{\nu=0}^k \lambda_s^t \hat{P}_s^t P_{s,\nu}(x) \mathcal{F}_s(g^{(\nu)}) + \lambda_s^t \hat{P}_s^t J_s^{k+1} g^{(k+1)}(x) \\ &= \sum_{\nu=0}^k \left(\frac{\lambda_s}{2^\nu}\right)^t P_{s,\nu}(x) \mathcal{F}_s(g^{(\nu)}) + \left(\frac{\lambda_s}{2^{k+1}}\right)^t J_s^{k+1} \hat{P}_s^t g^{(k+1)}(x) , \end{aligned} \quad (4.52)$$

と書ける。

つぎに分布 g の時間発展の表式で準運動量 s の和を次のように分ける：

$$P^t g(n, x) = \sum_{r=0}^m \frac{1}{N} \sum_{\bar{\alpha}/2^r < |\lambda_s| \leq \bar{\alpha}/2^{r-1}} e^{iq(s)n} \lambda_s^t \hat{P}_s^t \hat{g}_s(x) + \frac{1}{N} \sum_{|\lambda_s| \leq \bar{\alpha}/2^m} e^{iq(s)n} \lambda_s^t \hat{P}_s^t \hat{g}_s(x) . \quad (4.53)$$

最後の項は $\lambda_s^t \sim \left(\frac{\bar{\alpha}}{2}\right)^t$ であるから $W_t^{(m)}$ に含めることができる。

いま $\bar{\alpha}/2^r < |\lambda_s| \leq \bar{\alpha}/2^{r-1}$ の項を考えよう。このとき演算子 J_s は r 回可微分な関数について定義できるので g が $m+1$ 回可微分の時、展開 (4.52) は $k = m-r$ まで適用可能である。そして

$$\begin{aligned} e^{iq(s)n} \lambda_s^t \hat{P}_s^t \hat{g}_s(x) &= e^{iq(s)n} \sum_{\nu=0}^{m-r} \left(\frac{\lambda_s}{2^\nu}\right)^t P_{s,\nu}(x) \mathcal{F}_s(\hat{g}^{(\nu)}) + e^{iq(s)n} \left(\frac{\lambda_s}{2^{m-r+1}}\right)^t J_s^{m-r+1} \hat{P}_s^t \hat{g}^{(m-r+1)}(x) \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-r} \left(\frac{\lambda_s}{2^\nu}\right)^t Q_{s,\nu}(x) \langle \tilde{Q}_{s,\nu}, g \rangle + e^{iq(s)n} \left(\frac{\lambda_s}{2^{m-r+1}}\right)^t J_s^{m-r+1} \hat{P}_s^t g^{(m-r+1)}(x) . \end{aligned} \quad (4.54)$$

最後の項は $\left(\frac{\lambda_s}{2^{m-r+1}}\right)^t \sim \left(\frac{\bar{\alpha}}{2^m}\right)^t$ であるから $W_t^{(m)}$ に含められる。(4.54) を (4.53) に代入して整理すると (4.37) が得られる。

$Q_{s,\nu}$, $\tilde{Q}_{s,\nu}$ が Frobenius-Perron 演算子 P の固有関数であることは容易に示せる。実際、

$$\begin{aligned} \cdot PQ_{s,\nu}(n, x) &= e^{iq(s)n} \lambda_s \hat{P}_s P_{s,\nu}(x) = \frac{\lambda_s}{2^\nu} e^{iq(s)n} P_{s,\nu}(x) = \frac{\lambda_s}{2^\nu} Q_{s,\nu}(n, x) , \\ \cdot \langle \tilde{Q}_{s,\nu}, Pg \rangle &= \mathcal{F}_s(\{\widehat{Pg}\}_s^{(\nu)}) = \lambda_s \mathcal{F}_s(\{\hat{P}_s \hat{g}_s\}^{(\nu)}) = \frac{\lambda_s}{2^\nu} \mathcal{F}_s(\hat{P}_s \hat{g}_s^{(\nu)}) \\ &= \frac{\lambda_s}{2^\nu} \mathcal{F}_s(\hat{g}_s^{(\nu)}) = \frac{\lambda_s}{2^\nu} \langle \tilde{Q}_{s,\nu}, g \rangle . \end{aligned}$$

最後に多項式 $P_{s,\nu}(x)$ の母関数を求めよう。

$$G_s(t, x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu P_{s,\nu}(x) \quad (4.55)$$

と置く。すると、 $J_s P_{s,\nu}(x) = P_{s,\nu+1}(x)$ より

$$J_s G_s(t, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} t^{\nu} P_{s,\nu}(x) = \frac{1}{t} [G_s(t, x) - 1], \quad (4.56)$$

であるから、 x で微分して $G_s(t, x) = \partial_x G_s(t, x)/t$ を得る。よって

$$G_s(t, x) = C(t) e^{xt}.$$

これを (4.56) に代入し $C(t) = \mathcal{F}_s(e^{xt})^{-1}$ が分かる。 $\mathcal{F}_s$ の $\hat{P}_s$ 不変性、 $\hat{P}_s \exp(xt) = [\alpha_s + (1 - \alpha_s) \exp(t/2)] \exp(xt/2)$ と $\mathcal{F}_s(1) = 1$ から

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(e^{xt}) &= \mathcal{F}_s(\hat{P}_s e^{xt}) = [\alpha_s + (1 - \alpha_s) e^{t/2}] \mathcal{F}_s(e^{xt/2}) \\ &= \cdots = \prod_{k=1}^K [\alpha_s + (1 - \alpha_s) e^{t/2^k}] \mathcal{F}_s(e^{xt/2^K}) = \prod_{k=1}^{\infty} [\alpha_s + (1 - \alpha_s) e^{t/2^k}], \end{aligned}$$

となるので結局 (4.42) を得る。

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu} P_{s,\nu}(x) = G_s(t, x) = \frac{e^{xt}}{\prod_{k=1}^{\infty} (\alpha_s + (1 - \alpha_s) e^{t/2^k})}.$$

□

Section 5

多重パイこね変換における非平衡状態

これまで論じてきたように「統計的描像」をとると相関関数の減衰が緩和に対応し、その緩和率が分布関数の時間発展演算子の一般化された固有値として特徴付けられる。前節の例では決定論的拡散モデルにおいて、この一般化された固有値が実際に拡散の現象論的モデル(ランダムウォーク)の確率分布の緩和率を再現していることを見てきた。ここでは保存的で可逆な決定論的拡散モデルを用い、「統計的描像」の枠内で非平衡定常状態が構成できることを示す。以下で見るようにモデルの可逆性にもかかわらず定常状態には時間反転対称でないものが存在する。

5.1 多重パイこね変換

多重パイこね変換は前節の例で扱った多重 Bernoulli map の2次元版で、決定論的かつ可逆なモデルである。相空間は一次元格子の各点に単位正方形を配したものでダイナミックスは次の変換で与えられる(図5.1参照)。

$$B(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, 2x, \frac{y}{2}), & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (n+1, 2x-1, \frac{y+1}{2}), & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

この系は一様に双曲的で、最大 Lyapunov 数は $\log 2$ である。このモデルで、統計分布のふるまいを調べる。通常密度関数で表せない状態も含めるため累積分布関数

$$G(n, x, y) \equiv \mu(\{[0, x] \times [0, y]\}_n) \quad (5.2)$$

の時間発展を考える。ここで添字 n は中括弧内の領域がサイト n の正方形の部分集合であることを示す。

今、 μ_t を時刻 t での測度と考えれば、図5.2よりわかるように、その時間発展は、

$$\mu_{t+1}(A) = \mu_t(B^{-1}A) \quad (5.3)$$

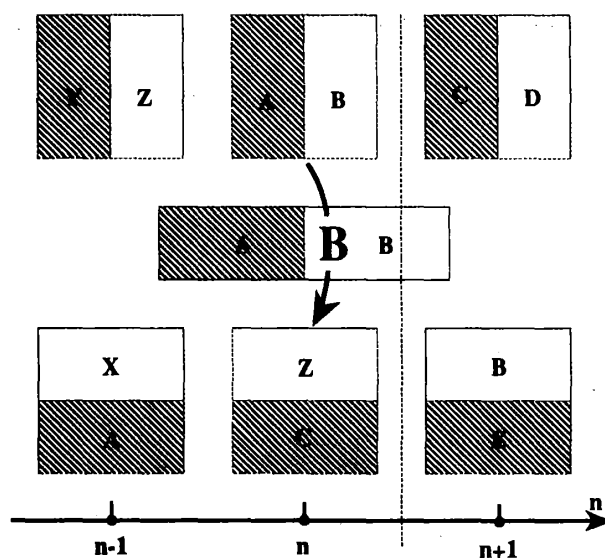


Figure 5.1: 多重パイコね変換：横軸はサイトの番号である。

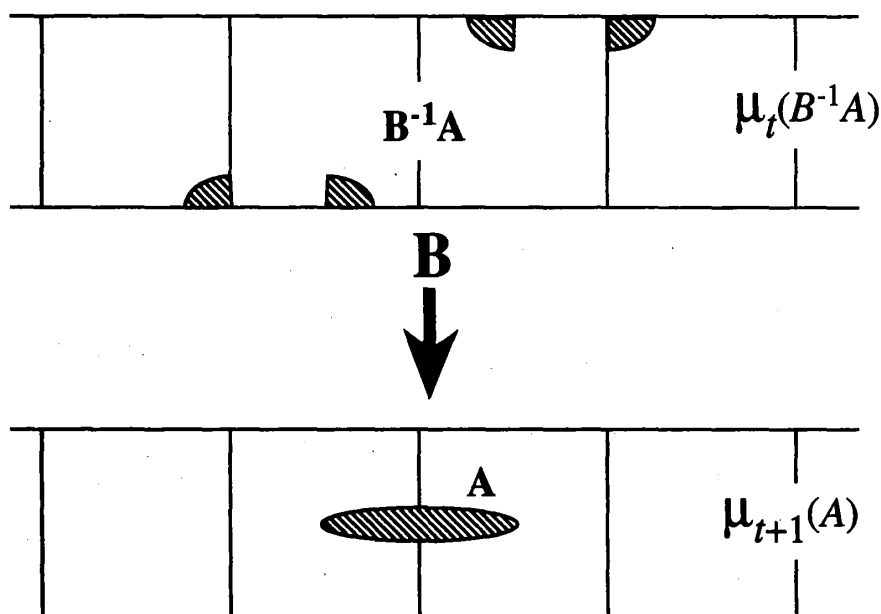


Figure 5.2: 測度の時間発展

となる。よって累積分布関数の運動方程式は、

$$B^{-1}\{[0, x] \times [0, y]\}_n = \begin{cases} \{[0, \frac{x}{2}] \times [0, 2y]\}_{n+1}, & \text{if } y < \frac{1}{2} \\ \{[0, \frac{x}{2}] \times [0, 1]\}_{n+1} \cup \{[\frac{1}{2}, \frac{x+1}{2}] \times [0, 2y-1]\}_{n-1}, & \text{if } y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

であるから、次の様になる。

$$\begin{aligned} G_t(n, x, y) &= \mu_{t-1}(B^{-1}\{[0, x] \times [0, y]\}_n) \\ &= \begin{cases} G_{t-1}(n+1, \frac{x}{2}, 2y), & \text{if } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ G_{t-1}(n+1, \frac{x}{2}, 1) + G_{t-1}(n-1, \frac{x+1}{2}, 2y-1) \\ \quad - G_{t-1}(n-1, \frac{1}{2}, 2y-1), & \text{if } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

時間反転不変性

一般に $I^2 = I$ という性質を持つ演算子が存在し

$$IBI = B^{-1}, \quad (5.5)$$

が満たされるとき変換 B によって与えられるダイナミックスは時間反転不変であるといい、 I を時間反転演算子とよぶ。今の場合、例えば図 5.3 からすぐにわかる様に、 I は各々のセルの中での $y = -x + 1$ に関する折り返しである。つまり、

$$I(n, x, y) = (n, 1-y, 1-x) \quad (5.6)$$

尚、時間反転 I は通常の力学系では速度反転の操作に対応している。

5.2 定常状態

方程式 (5.4) の定常解 G を見つけよう。この解について以下の条件を仮定する。

1. 積測度の仮定：

$$G(n, x, y) \equiv G(n, 1, y)F(n, x) \quad (5.7)$$

これから $F(n, 1) = 1$ となることが分かる。

2. 一様性の仮定：

$$F(n, \frac{1}{2}) = \alpha \quad (n \text{ によらない}) \quad (5.8)$$

(5.4) で $x = 1$ とおけば $G(n, 1, y)$ の従う方程式がえられる。

$$\begin{aligned} G(n, 1, y) &= \begin{cases} G(n+1, \frac{1}{2}, 2y), & \text{if } y < \frac{1}{2} \\ G(n+1, \frac{1}{2}, 1) + G(n-1, 1, 2y-1) - G(n-1, \frac{1}{2}, 2y-1), & \text{if } y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha G(n+1, 1, 2y), & \text{if } y < \frac{1}{2} \\ (1-\alpha)G(n-1, 1, 2y-1) + \alpha G(n+1, 1, 1), & \text{if } y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.9)$$

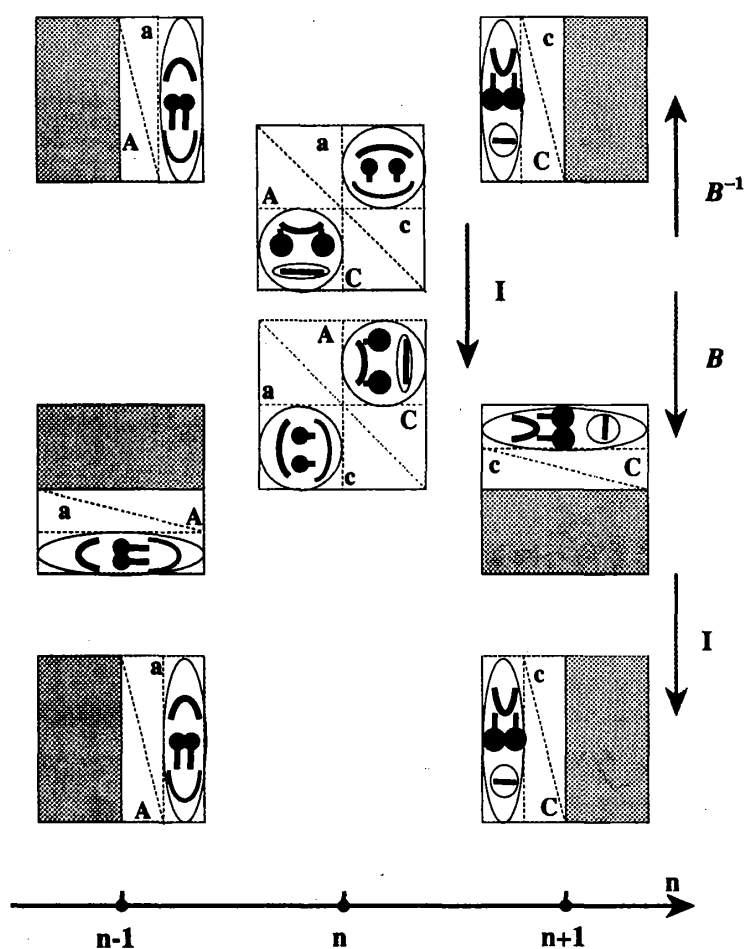


Figure 5.3: 多重パイこね変換の時間反転不変性 - B と B^{-1} との関係

次に F を決定する方程式を導こう。 $y \leq 1/2$ のとき、(5.4) と (5.9) をそれぞれ用いると

$$\begin{aligned} G(n+1, \frac{x}{2}, 2y) &= G(n, x, y) = G(n, 1, y) F(n, x) \\ &= G(n+1, 1, 2y) F(n+1, \frac{x}{2}) = \alpha^{-1} G(n, 1, y) F(n+1, \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

と変形できるから、 F については

$$F(n, \frac{x}{2}) = \alpha F(n, x)$$

という関係が得られる。他方 (5.4) で $y = 1$ としたものから

$$G(n, x, 1) = \{\alpha G(n+1, 1, 1) + (1 - \alpha) G(n-1, 1, 1)\} F(n, x)$$

$$\begin{aligned}
 &= G(n+1, 1, 1)F(n+1, \frac{x}{2}) + G(n-1, 1, 1) \left\{ F(n-1, \frac{x+1}{2}) - \alpha \right\} \\
 &= \alpha G(n+1, 1, 1)F(n+1, x) + G(n-1, 1, 1) \left\{ F(n-1, \frac{x+1}{2}) - \alpha \right\}
 \end{aligned}$$

つまり

$$F(n-1, \frac{x+1}{2}) = (1-\alpha)F(n, x) + \alpha,$$

が得られる。以上をまとめて

$$F(n, x) = \begin{cases} \alpha F(n-1, 2x), & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (1-\alpha)F(n+1, 2x-1) + \alpha, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.10)$$

この解 F は §2.1.2 の (2.6) 式で導入した特異関数 f_α である。

$$F(n, x) = f_\alpha(x)$$

(5.9) で $y = 1$ とおけば $G(n, 1, 1)$ の方程式が得られる。

$$G(n, 1, 1) = (1-\alpha)G(n-1, 1, 1) + \alpha G(n+1, 1, 1) \quad (5.11)$$

これは左右の隣接サイトへの遷移確率がそれぞれ $\alpha, 1-\alpha$ であるようなランダム・ウォークについての Chapman-Kolmogorov の式と一致する。よって、 F に課した一様性の条件 (5.8) はこのランダム・ウォークの遷移確率が全サイトに渡って一様であるという仮定にあたる。以下で α について場合分けをして定常状態を求める。

$\alpha = \frac{1}{2}$ の場合

まず、§2.1.2 でみたように、 $F(n, x) = f_{\frac{1}{2}}(x) = x$ である。そして、方程式 (5.11) は B, B' を境界条件で定められる定数とすると

$$G(n, 1, 1) = nB + B' \quad (5.12)$$

という解を持つ。よって、各サイトに渡っての分布は図 5.4 の様になっている。これを (5.9) に代入すると $G(n, 1, y)$ についての関数方程式が得られる。これはある縮小写像の不動点を求める方程式となっているので、ひとつ解が見つかればそれは唯一である。そこで解の形を

$$G(n, 1, y) = f(y)n + g(y)$$

と仮定してとくと、 f, g は次のように決まる。

$$f(y) = By, \quad g(y) = BT(y) + B'y$$

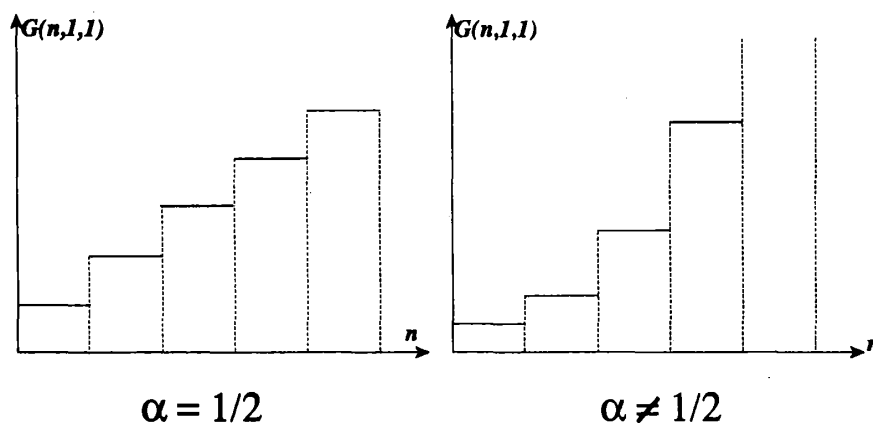


Figure 5.4: セル上の累積分布関数の各サイトに渡る分布 ($B > 0$)

ただし、ここでの関数 $T(y)$ は次の関数方程式で決まる関数で、高木関数 [22,23] として知られているものである。

$$T(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}T(2y) + y, & \text{if } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}T(2y-1) + 1 - y, & \text{if } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

結局 $\alpha = \frac{1}{2}$ の時の定常状態は

$$G(n, x, y) = x \{ B (ny + T(y)) + B'y \} \quad (5.14)$$

となる。

$\alpha \neq \frac{1}{2}$ の場合

(5.11) は境界条件によって定められる定数を A, A' とすると

$$G(n, 1, 1) = A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^n + A' \quad (5.15)$$

という解を持つ (図 5.4 参照)。これを (5.9) に代入し、解を

$$G(n, 1, y) = A g_1(y) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^n + A' g_2(y)$$

と仮定すると $g_1(y) = f_{1-\alpha}(y)$, $g_2(y) = f_{\alpha}(y)$ と求まる。そして定常解は次の様になる。

$$G(n, x, y) = f_{\alpha}(x) \left\{ A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^n f_{1-\alpha}(y) + A' f_{\alpha}(y) \right\} \quad (5.16)$$

時間反転した状態

系の時間反転不変性より、時間反転した状態も定常状態である。 $\alpha \neq \frac{1}{2}$ 場合には時間反転によっても新しい状態は作られない。 $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき、時間反転した状態の累積分布関数 $\bar{G}$ は、

$$\begin{aligned}\bar{G}(n, x, y) &\equiv \mu(I[0, x) \times [0, y)) \\ &= y \{A(nx - T(x)) + Bx\}\end{aligned}\quad (5.17)$$

となり、 x に関してフラクタルな分布になる。

5.3 流れの様子

次に、この定常状態での流れの様子を見てみよう。流れは、一回の変換である境界を n から $n+1$ の方向に横切る測度と考える。

$\alpha = \frac{1}{2}$ の場合

図 5.1 の点線の境界を横切る測度を流れと考えると、 B が右に移動して C が左に移動しているから、

$$\begin{aligned}J_{n|n+1} &= \mu(B) - \mu(C) \\ &= \mu\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right) \times [0, 1) \right)_n - \mu\left(\left[0, \frac{1}{2}\right) \times [0, 1) \right)_{n+1} \\ &= G(n, 1, 1) - G\left(n, \frac{1}{2}, 1\right) - G\left(n+1, \frac{1}{2}, 1\right) \\ &= -\frac{1}{2} [G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)] = -\frac{B}{2}\end{aligned}\quad (5.18)$$

という表式を得る。この式は、拡散率 $D = \frac{1}{2}^*$ に比例した、分布の勾配を均す方向への流れが生じることを示している。これは、拡散の現象論的法則、Fick の法則である。

*一様な状態ではサイトに渡る測度の運動を記述する方程式が、

$$G_{t+1}(n, 1, 1) = (1 - \alpha)G_t(n-1, 1, 1) + \alpha G_t(n+1, 1, 1)$$

というランダムウォークの式になるから、その拡散率は、

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2t} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 G_t(n, 1, 1) - \bar{n}^2}{2t}$$

の公式を用いて、 $\alpha = \frac{1}{2}$ の時、 $D = \frac{1}{2}$ と計算できる。

$\alpha \neq \frac{1}{2}$ の場合

$$J_{n|n+1} = A'(1 - 2\alpha) \quad (5.19)$$

をえる。この場合は Fick の法則は成り立っていない。

時間反転した状態

$$\begin{aligned} \bar{J}_{n|n+1} &= \mu(IB) - \mu(IC) \\ &= \bar{\mu}([0, \frac{1}{2}) \times [0, 1)_{n+1}) - \bar{\mu}([0, \frac{1}{2}) \times [0, 1)_{n+1}) \\ &= \bar{G}(n, 1, 1) - \bar{G}(n, \frac{1}{2}, 1) - \bar{G}(n+1, \frac{1}{2}, 1) \\ &= \frac{B}{2} = \frac{1}{2} [G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)] \end{aligned} \quad (5.20)$$

と表せるので、「反 Fick の法則」に従っているといえる。

5.4 定常状態の選択 – 有限長多重パイこね変換 –

前項で、さまざまな非平衡定常状態が実現しうるということを見たが、これらの中のどの状態が物理的に実現される状態なのだろうか。

まず、K-S エントロピー最大の状態が物理的であるという観点を取れば、 $\alpha = \frac{1}{2}$ の状態が選ばれる[†]。しかし、K-S エントロピーが最大値となる状態は Fick の法則が成り立つ状態と反 Fick の法則が成り立つ状態との 2 つがあり、これらを区別することはできない。そこで、ここでは与えられた境界条件のもとで、どのような（あるいはどちらの）状態が定常状態として実現するかを調べてみよう。

境界条件を指定できる様に $n = 1 \sim N-1$ の間は通常 of 多重パイこね変換を、 $n \leq -2$, $n \geq N+2$ では自由運動に対応する（こねない）変換を置き、境界では全体が可逆になるように接続した変換（有限長多重パイこね変換）を考える（図 5.5 参照）。

$$B'(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, 2x, \frac{y}{2}), & \text{if } x < \frac{1}{2} \\ (n+1, 2x-1, \frac{y+1}{2}), & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad 1 \leq n \leq N-1$$

[†]この系の一様な定常状態に対し、K-S エントロピーは、

$$h_{KS} = -\alpha \ln \alpha - (1-\alpha) \ln(1-\alpha)$$

と計算されるが、これは $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $h_{KS} = \ln 2$ をとる。

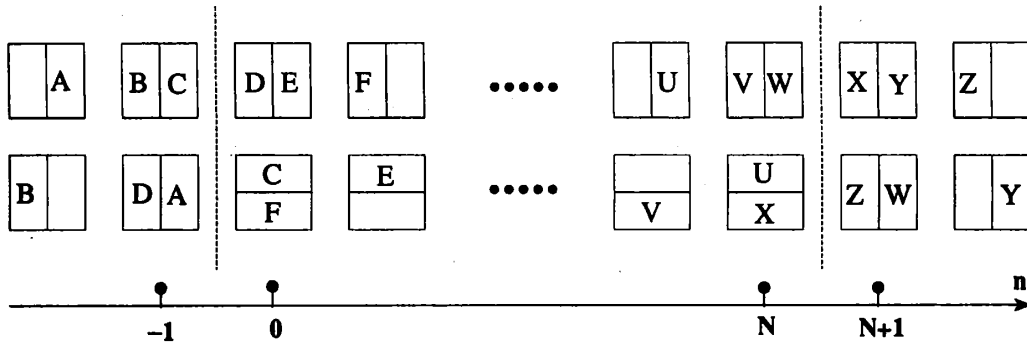


Figure 5.5: 有限長の多重パイこね変換

$$B'(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, x, y), & \text{if } x < \frac{1}{2} \\ (n+1, 2x-1, \frac{y+1}{2}), & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad n = 0, -1$$

$$B'(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, 2x, \frac{y}{2}), & \text{if } x < \frac{1}{2} \\ (n+1, x, y), & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad n = N, N+1$$

$$B'(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, x, y), & \text{if } x < \frac{1}{2} \\ (n+1, x, y), & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad n \leq -2 \text{ or } n \geq N+2$$

この系で初期条件を以下の様に置いて系の漸近的ふるまいを調べる。

- 多重パイこね部では、累積分布関数 $G_0(n, x, y)$ が、 x について2回連続微分可能。
- 自由運動部では、次のような一様 Lebesgue 測度とする。

$$G_0(n, x, y) = \begin{cases} \rho_- xy, & n \leq -1 \\ \rho_+ xy, & n \geq N+1 \end{cases} \quad (5.21)$$

ただし、密度差 $\rho_+ - \rho_-$ は0でないとする。

このとき系が定常状態をもち、それに向かって次のような段階を経て漸近して行くことが解析的に示せる。

1. x 方向への一様化：時間スケール $\sim \left(\frac{1}{2}\right)^t$

これは時刻 t での累積分布関数の x についての2階微分が $t \rightarrow \infty$ で0に収束することから分かる。

$$\|\partial_x^2 G_t\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^t \|\partial_x^2 G_0\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

ただし $\|\partial_x^2 G_t\|$ は $|\partial_x^2 G_t(n, x, y)|$ の (n, x, y) についての上限である。

2. サイトにわたる一様勾配分布への漸近：時間スケール $\sim \left(\cos \frac{\pi}{N+2}\right)^t$

$G_t(n, 1, 1)$ は、定常分布 $\left(\frac{\rho_+ + \rho_-}{N+2}(n+1) + \rho_-\right)$ へ向かって、 $\left(\cos \frac{\pi}{N+2}\right)^t$ のように漸近して行く。

3. y 方向へフラクタルな分布の形成：時間スケール $\sim \left(\frac{1}{2}\right)^t$

y 方向の分布の形成はステップ2に追従して起こる。この過程自体の時間スケールは $\left(\frac{1}{2}\right)^t$ である。

定常状態は次のような形をとる。

$$G_{\infty}(n, x, y) = x \left[\frac{\rho_+ - \rho_-}{N + 2} \{(n + 1)y + T_n(y)\} + \rho_- y \right] \quad (5.22)$$

ここでの $T_n(y)$ は高木関数に似たフラクタル関数で、図 5.6 のような形をしている。

この状態での流れは

$$\begin{aligned} J_{n|n+1} &= G_{\infty}(n, 1, 1) - G_{\infty}(n, \frac{1}{2}, 1) - G_{\infty}(n + 1, \frac{1}{2}, 1) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_+ - \rho_-}{N + 2} \\ &= -\frac{1}{2} [G_{\infty}(n + 1, 1, 1) - G_{\infty}(n, 1, 1)] \end{aligned}$$

となっていて、Fick の法則を満たしている。

時間発展の過程のうち漸近分布 (5.22) を得るうえで重要なのは伸びる方向、 x 方向への分布の一様化である。前項で見た様に Fick の法則に従わない分布は x 方向について特異的である。ダイナミクスによる x 方向への一様化に抗して、この方向に特異的な定常分布が存在できるのは伸びる方向にフラクタル的構造をもつからである。これを漸近状態として実現するには初期状態としてフラクタル的分布を用意しなくてはならない。しかしその操作は厳密には不可能である。

この結果から、たいていの（ある程度滑らかさを持った）初期条件からスタートした状態は Fick の法則に従う、伸びる方向（ x 方向）に滑らかで縮む方向（ y 方向）に自己相似な定常状態に行き着くことがわかる。この意味で、前節で議論したさまざまな定常状態の中で Fick の法則に従う状態が安定だといえる。これはまた時間反転不変な力学系で不可逆過程が実現されるメカニズムについての示唆を与えている：いま不安定な力学系において非平衡定常状態が実現されていると一般に分布は伸びる方向に滑らかで縮む方向にフラクタル的であり、この構造はダイナミクスによって安定に維持される。時間反転により安定な方向と不安定な方向は入れ替わるので、時間反転した状態は伸びる方向にフラクタル的で縮む方向に滑らかである。しかし、ダイナミクスによる引き伸ばしのためフラクタル構造の小さな揺らぎは正方向の時間発展により成長し、反転状態はこの意味で不安定になる。このことから反転状態は実際には観測できず、その結果、もとの非平衡定常状態のみが実現する（不可逆性の出現）と考えられるのである。

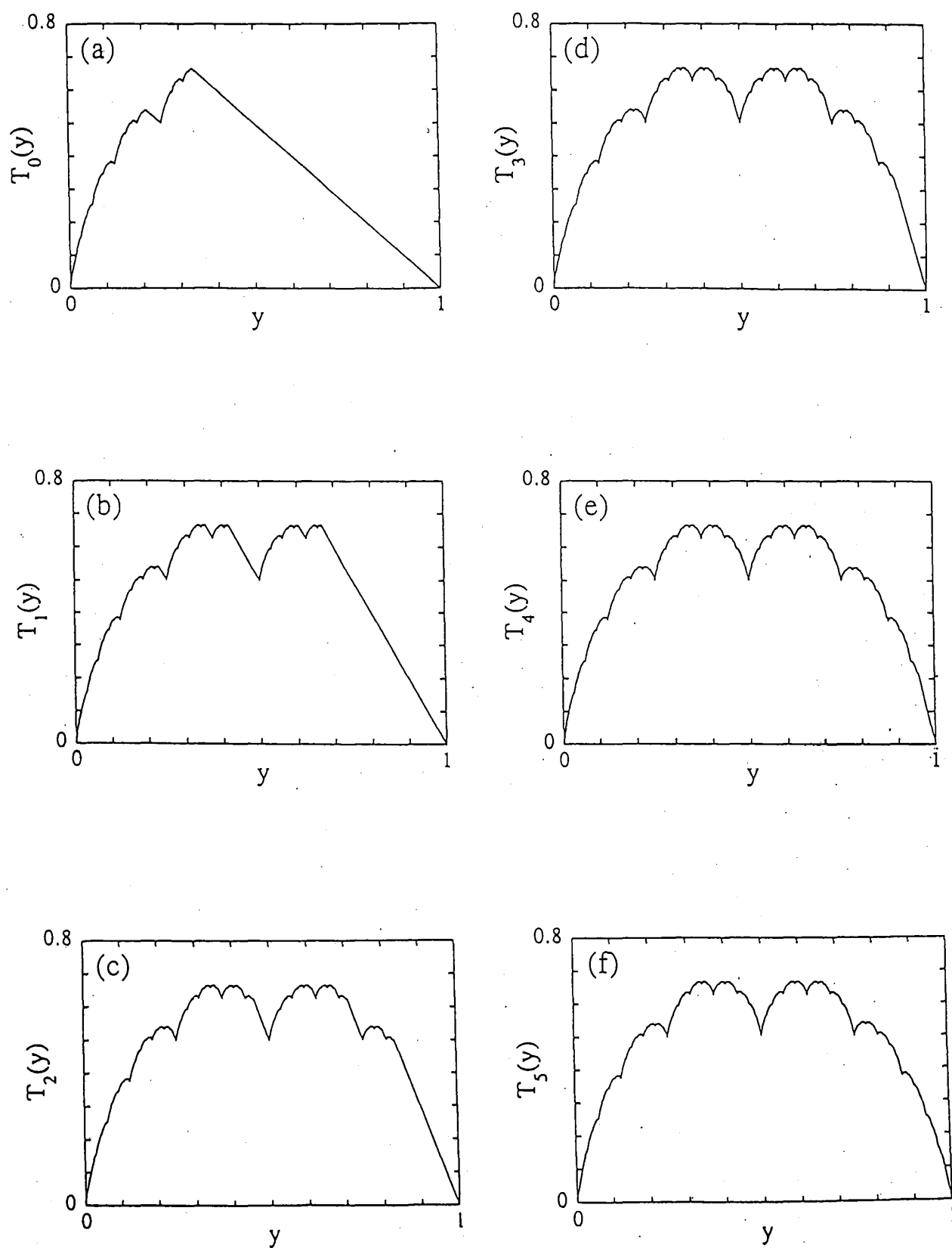


Figure 5.6: 不完全高木関数 $T_n(y)$

引用文献

1. Paul and Tatiana Ehrenfest, "The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics", (Cornel Univ. Press, 1959). Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften Vol. IV 2II (1912) (独語) の英訳。
2. J. W. Gibbs, "Elementary Principles in Statistical Mechanics", (Yale Univ. Press, 1902: Dover 1960).
3. R. Kubo, "Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes I", J. Phys. Soc. Jpn. **12** (1957) 570.
4. S. Nakajima, "On Quantum Theory of Transport Phenomena -Steady Diffusion-", Prog. Theor. Phys. **20** (1958) 948.
R. Zwanzig, "Ensemble Method in the Theory of Irreversibility", J. Chem. Phys. **33** (1960) 1338.
H. Mori, "Transport, Collective Motion, and Brownian Motion", Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 424.
5. D.N. Zubarev, "Nonequilibrium Statistical Mechanics", (Nauka, 1971) [久保亮五、鈴木増雄、山崎義武訳「非平衡統計熱力学」(丸善, 1976)]
6. I. Prigogine, "Non-Equilibrium Statistical Mechanics", (Wiley, 1962).
I. Prigogine, C. George, F. Henin and L. Rosenfeld: *Chemica Scripta* **4** (1973) 5.
7. T. Petrosky and I. Prigogine: *Physica A* **175** (1991) 146.
T. Petrosky and I. Prigogine: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **90** (1993) 9393.
I. Antoniou and I. Prigogine: *Physica A* **192** (1993) 443.
8. L.V. Keldysh, "Diagram Technique for Nonequilibrium Processes", *Sov. Phys. JETP* **20** (1965) 1018.
9. H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, "Thermo Field Dynamics and Condensed States", (North-Holland, 1982).
H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (eds.), "Thermal Field Theories and their Applications", (Elsevier Science Pub., 1991)
10. 戸田盛和、久保亮五、斎藤信彦、橋爪夏樹「統計物理学 (第2版)」岩波講座 現代物理学の基礎 5 (岩波書店、1978)
11. 鈴木増雄「統計力学」岩波講座 現代の物理学 4 (岩波書店、1994)

12. 森肇, private communication.
13. 十時東夫、「エルゴード理論入門」(共立出版、1971 年)
14. V.I. Oseledec, "A Multiplicative Ergodic Theorem: Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems", Trans. Moscow Math. Soc. 19 (1968) 197.
15. Ya.G. Sinai, "Introduction to Ergodic Theory", (Princeton Univ. Press, 1976)
16. D.V. Widder, "The Laplace transform", (Princeton Univ. Press, 1972) の定理 16.4
17. R. Bowen, "Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphism", Lect. Notes in Math. 470, (Springer-Verlag, 1975).
18. D. Ruelle, "Thermodynamic Formalism", Encycl. of Math. (Addison-Wesley, 1978).
19. D. Ruelle, "The Thermodynamic Formalism for Expanding Maps", Comm. Math. Phys. 125 (1989) p. 239
20. M. Pollicott, "On the rate of mixing of Axiom A flows", Invent. Math. 81 (1985) p. 413.
M. Pollicott, "Meromorphic extensions of generalized zeta functions", Invent. Math. 85 (1986) p. 147.
21. D. Ruelle, "Resonances of Chaotic Dynamical Systems", Phys. Rev. Lett. 56 (1986) p. 405.
D. Ruelle, "Locating Resonances for Axiom A Dynamical Systems", J. of Stat. Phys. 44 (1986) p. 281.
D. Ruelle, "One-Dimensional Gibbs States and Axiom A Diffeomorphisms", J. Differ. Geom. 25 (1987) p. 117.
22. T. Takagi, "A simple example of the continuous function without derivative", in "The Collected Papers of Teiji Takagi", p.5 (Iwanami Shoten, 1973)
23. 山口昌哉、畑政義、木上淳「フラクタルの数理」岩波講座 応用数学 [対象 7] (岩波書店、1993)

1.1 節は文献 [1] の第 2 章に沿っている。2.1 から 2.3 節の議論は文献 [13] の第 1, 第 2 章を参考にし、2.4 節の Oseledec の定理は

- D. Ruelle, "Chaotic evolution and strange attractors", (Cambridge Univ. Press, 1989)

の表現に従った。特に Birkhoff の個別エルゴード定理の証明は文献 [13] 第 2 章にある。第 3 節は

- A. Lasota and M. Mackey, "Probabilistic properties of deterministic systems", (Cambridge Univ. Press, 1985).

の第 2, 第 3 章の紹介である。4.1 節のエントロピーについては文献 [13] の第 6 章に、平衡測度については文献 [17] に詳しい。第 4 節の拡大写像、Pollicott-Ruelle の定理の一般論は文献 [19] に沿った。各章で例として用いた一次元写像の特異不変測度、それらのエルゴード性および Pollicott-Ruelle の共鳴については

- S. Tasaki, Z. Suchanecki and I. Antoniou, "Ergodic properties of piecewise linear maps on fractal repellers", Phys. Lett. **A 179** (1993) 103.
- S. Tasaki, I. Antoniou and Z. Suchanecki, "Spectral Decomposition and Fractal Eigenvectors for a Class of Piecewise Linear Maps", Chaos, Solitons and Fractals **4** (1994) 227.

の記述に沿った。また例に用いた一次元マップによる決定論的拡散モデルは

- P. Gaspard, Phys. Lett. **A168**, (1992) 13.
- H.H. Hasegawa and D.J. Driebe, Phys. Lett. **A168**, (1992) 18.
- S. Tasaki, I. Antoniou and Z. Suchnecki, Phys. Lett. **A179**, (1993) 97.
- P. Gaspard, Chaos **3**, (1993) 427.

でも論じられている。第 5 節の多重パイコね変換における非平衡定常状態は

- S. Tasaki and P. Gaspard, "Fractal Distribution and Fick's Law in a Reversible Chaotic System", in "Towards the Harnessing of Chaos", M. Yamaguti (ed.), (Elsevier, 1994).
- S. Tasaki and P. Gaspard, "Fick's Law and Fractality of Nonequilibrium Stationary States in a Reversible Multibaker Map", 1995, submitted to J. Stat. Phys..

で論じられている。