

Asymptotic expansion of solutions to the nonlinear Schrödinger equations

Takeshi Wada (和田健志)

Department of Mathematics, Osaka University

(大阪大学理学研究科数学教室)

Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

E-mail: wada@math.sci.osaka-u.ac.jp

§1. 序論

非線形 Schrödinger 方程式をはじめとする非線形分散型方程式の解の挙動については数多くの論文が存在するが、それらの殆どは方程式の解の第 1 近似を与えるものである。これに対し、解の時間変数に関する高次の漸近展開を求める試みはあまり見かけないようである。ここではこれを問題にしたい。

もっとも取り扱いやすい場合として非線形 Schrödinger 方程式

$$(1) \quad \begin{aligned} iu_t + (1/2)\Delta u &= f(u), \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

を取り上げる。ここで $u: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ ($n \geq 2$), 非線形項としては様々なものが考えられるが、ここでは Hartree 型と呼ばれる非局所的相互作用

$$(2) \quad f(u) = (V * |u|^2)u$$

の場合を考察する。ここで $V(x) = \pm|x|^{-\gamma}$ ($0 < \gamma < 2$) である。 γ の上限 2 は L^2 に属する初期値 u_0 に対して (1)-(2) が時間大域的に解けるための条件であり、初期値がより滑らかかつ小さければさらに大きくとることもできる。しかし、本稿で論じる問題の性質上、 γ が大きければ大きいほど取り扱いが容易になるので以下常に $\gamma < 2$ とする。

ここでいくつかの記号を導入しておく。 $U(t) = \exp(it\Delta/2)$, $L^{2,s} = (1 + |x|)^{-s}L^2$ である。 $\hat{\psi} = \mathcal{F}\psi$ を ψ の Fourier 変換とする。

さて、(1)-(2) の解の振る舞いについて以下のことはよく知られている。

定理 A ([5, 12]). $1 < \gamma < 2$, $s > 1 - \gamma/2$, $u_0 \in L^{2,s}$ で $\|u_0\|_{L^{2,s}}$ は十分小とする。このとき $\phi \in L^{2,s}$ が存在して

$$(3) \quad \|U(-t)u(t) - \phi\|_{L^{2,s}} \rightarrow 0$$

が成立する。但し $u(t)$ は (1)-(2) の解である。

また、 $\gamma \leq 1$ の場合には (3) はそのままでは成立せず、位相因子による修正が必要となる。このあたりの事情は [1, 13] により、まず波動作用素の存在に関する問題で明らかにされた。また小さな解の時刻無限大での振る舞いについては次が知られている。

定理 B ([2, 4, 11]). $\gamma = 1$, $s > 1/2$, $u_0 \in L^{2,s}$ で $\|u_0\|_{L^{2,s}}$ は十分小とする. このとき $\phi \in L^{2,s}$ が存在して

$$(4) \quad \|\exp[iS(t, -i\nabla)]U(-t)u(t) - \phi\|_{L^{2,s}} \rightarrow 0$$

が成立する. 但し $S(t, \xi) = V * |\hat{\phi}|^2 \log t$, $u(t)$ は (1)-(2) の解である.

注意 1. 彼らの証明を追っていくと以下のことが分かる. このことは主定理の証明にも利用される: 任意の $\sigma < s$ に対して $\nu > 0$ が存在して

$$\|\exp[iS(t, -i\nabla)]U(-t)u(t) - \phi\|_{L^{2,\sigma}} = O(t^{-\nu})$$

が成り立つ. また, $\gamma < 1$ の場合については [3] を参照されたい.

上の結果は, 解の漸近展開の初項を求めることに相当する. それでは展開の第 2 項はどのようなになっているであろうか. これがここで取り上げる問題である. なお, 本稿の内容は九州大学の北直泰氏との共同研究を含む.

§2. 主結果

まず, $\gamma > 1$ の場合には次が成り立つ.

定理 1. $1 < \gamma < 2$, $s > \gamma/2$, $u_0 \in L^{2,s}$ で $\|u_0\|_{L^{2,s}}$ は十分小とする. このとき $\phi \in L^{2,s}$ が存在して

$$\|U(-t)u(t) - \phi - i(\gamma - 1)^{-1}t^{1-\gamma}\mathcal{F}^{-1}f(\hat{\phi})\|_{L^{2,s}} = o(t^{1-\gamma})$$

が成立する. 但し $u(t)$ は (1)-(2) の解である.

上の定理は本質的には [6] において $f(u) = \pm|u|^{p-1}u$, $p > 1 + 2/n$ (これは $\gamma > 1$ に相当する) の場合に証明された. 以下の証明は [14] による.

証明. 定理の主張を見ても分かるように, $u(t)$ よりも $U(-t)u(t)$ の挙動の方が調べやすい. そこで $w(t) = \mathcal{F}U(-t)u(t)$ とおく. よく知られているように

$$U(t)\psi = \mathcal{F}^{-1} \exp(-it|\xi|^2/2)\hat{\psi} = (2\pi it)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i|x-y|^2/2t)\psi(y) dy$$

であるから, $U(t) = M(t)D(t)\mathcal{F}M(t)$ である. ここで $M(t) = \exp(i|x|^2/2t)$, $D(t)\psi = (it)^{-n/2}\psi(x/t)$ である. これを用いると, $u(t) = M(t)D(t)U(-1/t)w(t)$ であることが分かるから,

$$(5) \quad iw_t = t^{-\gamma}U(1/t)f(U(-1/t)w)$$

となる. H^s において (5) の両辺と $w(t)$ の内積をとり, その実部を見ればアプリアリ評価

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|w(t)\|_{H^s}^2 &\leq t^{-\gamma}|\langle f(U(-1/t)w), U(-1/t)w \rangle| \\ &\leq Ct^{-\gamma}\|w(t)\|_{H^s}^4. \end{aligned}$$

が従う. 方程式 (1) の適切性により, $\|u_0\|_{L^{2,s}}$ が十分小さい場合には $\|w(1)\|_{H^s}$ が十分小さいことが分かる. よって, 上の評価式より $\|w(t)\|_{H^s}$ は $t \rightarrow \infty$ で有界である. 故に (5) の右辺は t に関して可積分になり, H^s において $\hat{\phi} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} w(t)$ が存在する. このことと, $U(\pm 1/t)$ は $t \rightarrow \infty$ において恒等作用素に収束することを用いて (5) の右辺の挙動を調べればその主要部は $t^{-\gamma} f(\hat{\phi})$ であることが分かり, これを t に関して積分すれば定理を得る. $\square$

上の証明はもちろん, $\gamma \leq 1$ では破綻する. これを見れば $\gamma = 1$ を境に解の挙動が大きく変わることも納得がいくであろう. しかし, V が Coulomb ポテンシャルの場合は物理的に最も重要な例であるので, この場合を含めて問題を解決することが望ましい. それが以下の定理 2 である. この定理の証明のためにまず次の補題を用意しておく.

補題 1. $s > 0$; $0 \leq p, q \leq 1$ とする. 任意の $g \in L^\infty \cap \dot{B}_{p,q}^s$ に対し,

$$\|\exp(ig)\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq C(1 + \|g\|_\infty)^{[s]} \|g\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$$

が成立する. ここで $[s]$ は s の整数部分である.

補題 2. $s \in \mathbf{R}$, $0 \leq a \leq 1$, l は非負整数とする. 任意の $v \in H^s$ に対し,

$$\| \{U(1/t) - \sum_{k=0}^l (i\Delta/2t)^k\} v \|_{H^{s-2l-2a}} \leq C t^{-l-a} \|v\|_{H^s}$$

が成り立つ.

証明は [14] を参照せよ.

定理 2. $\gamma = 1$, $s > 5/2$, $u_0 \in L^{2,s}$ で $\|u_0\|_{L^{2,s}}$ は十分小とする. このとき $\phi \in L^{2,s}$ が存在して $\sigma < s - 2$ に対して

$$\|U(-t)u(t) - \exp[-i\tilde{S}(t, -i\nabla)] \{ \phi + t^{-1} \sum_{j=0}^1 (\log t)^j \phi_{1,j} \} \|_{L^{2,\sigma}} = o(t^{-1})$$

が成立する. ここで $u(t)$ は (1)-(2) の解である. また $\tilde{S}(t, \xi) = S(t, \xi) + t^{-1} S_1(\xi)$ であり ($S(t)$ は定理 A と同じもの), $\phi_{1,0}, \phi_{1,1}, S_1$ は ϕ を用いて具体的に書ける.

証明. 先程と同じく $w(t) = U(-t)u(t)$ とおいて, この挙動を調べる. 定理 A および注意 1 により, $\phi \in L^{2,s}$ が存在して $0 < 2\delta < s - \sigma - 2$ に対して

$$\|w(t) - \exp(-iS(t))\hat{\phi}\|_{H^{\sigma+2+2\delta}} = O(t^{-\nu})$$

($\nu > 0$) となる. $\nu \leq \delta \leq 1$ としても一般性を失わないので以下そのように仮定する. また $2 < r < 2n/(n - 2s)_+$ であれば $\|w\|_r = O(1)$ である. そこで

$$\Phi(t) = \int_t^\infty (V * |\hat{\phi}|^2 - V * |w(\tau)|^2) \frac{d\tau}{\tau} + S(t)$$

とおくと, 上の積分は $L^\infty \cap \dot{B}_{2n,2}^{\sigma+2+2\delta}$ において収束し¹ $\Phi(t) - S(t) = O(t^{-\nu})$ である. $\Phi_t = t^{-1}V * |w|^2$ であるから

$$(6) \quad i(e^{i\Phi}w)_t = t^{-1}e^{i\Phi}\{U(1/t)f(U(-1/t)w) - f(w)\}.$$

$t \rightarrow \infty$ で $U(1/t)$ は恒等作用素に強収束するから, 右辺は打ち消しあって t に関して可積分となる (これが定理 A が成立する理由である). だがここでは一歩進んで右辺の挙動を解析する. 形式的には $t \rightarrow \infty$ において $U(1/t) \simeq 1 + i\Delta/2t$ となるから, これを用いて右辺の $U(1/t)$ を展開し, さらに $\varepsilon \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} f(\psi + \varepsilon\eta) &= f(\psi) + \varepsilon\{V * (\eta\bar{\psi})\psi + V * (\psi\bar{\eta})\psi + V * |\psi|^2\eta\} + O(\varepsilon^2) \\ &\equiv f(\psi) + \varepsilon f'(\psi)\eta + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

を用いると,

$$U(1/t)f(U(-1/t)w) - f(w) \simeq \frac{i\Delta}{2t}f(w) - \frac{1}{2t}f'(w)[i\Delta w]$$

となる. 補題 2 を用いて実際に評価すると両辺の差は $O(t^{-1-\delta})$ である. 更に $w \simeq e^{-iS}\hat{\phi}$, $\Phi \simeq S$ となることを用いると

$$\begin{aligned} \text{の右辺} &\simeq t^{-1}e^{iS}\left\{\frac{i\Delta}{2t}f(e^{-iS}\hat{\phi}) - \frac{1}{2t}f'(e^{-iS}\hat{\phi})[i\Delta e^{-iS}\hat{\phi}]\right\} \\ &= At^{-2}\log t + Bt^{-2} \end{aligned}$$

となる. A, B は t に依存しない関数である. $\Delta e^{-iS}\hat{\phi}$ を計算すると

$$|\nabla S|^2 e^{-iS}\hat{\phi} = (\log t)^2 |\nabla V * |\hat{\phi}|^2| e^{-iS}\hat{\phi}$$

が現れるため上式において $t^{-2}(\log t)^2$ の項が出てきそうだがこれはキャンセルしてなくなる. こうして形式的に求めた展開と (6) の右辺の差を実際に評価すれば (ここで Sobolev の不等式などと補題 1 を併せ用いる) H^σ において

$$i(e^{i\Phi}w)_t = At^{-2}\log t + Bt^{-2} + O(t^{-2-\nu}P(\log t))$$

となることが分かる. $P(\log t)$ は $\log t$ の多項式である. これを t に関して積分すれば

$$(7) \quad e^{i\Phi}w = \hat{\phi} + t^{-1} \sum_{j=0}^1 (\log t)^j \hat{\phi}_{1,j} + O(t^{-1-\nu}P(\log t))$$

を得る. ここで, $\hat{\phi}_{1,1} = iA$, $\hat{\phi}_{1,0} = i(A+B)$ である. さらに Φ は $|w|$ のみに依存することに注意すると, その定義より $L^\infty \cap \dot{B}_{2n,2}^\sigma$ において

$$\Phi(t) = S(t) + t^{-1}S_1 + O(t^{-1-\nu}P(\log t))$$

を得て, これを (7) に持ち込んで補題 1 を使えば定理を得る. 詳細については [14] を参照されたい. $\square$

¹ 斉次 Besov 空間の 2 番目の指数 $2n$ の取り方はこれに限らないが, これで定理の証明には十分である.

注意 2. 上の方法を繰り返すことにより, いくらでも高次の漸近展開を求めることが可能である.

注意 3. 上記の方法は空間一次元における非線形 Schrödinger 方程式

$$iu_t + \frac{1}{2}\partial^2 u = \pm |u|^2 u \pm |u|^{p-1} u$$

(但し $p > 3$, 複号の取り方は任意) にも適用できる. 3 次の項は Hartree 方程式の場合で言うと $\gamma = 1$ の場合に, 高次の項は $\gamma > 1$ の場合に相当する. 但しこの場合, p 次の項が (p が奇数の場合を除き) 特異性を持っているために, $p \leq 7/2$ の場合には Hartree 方程式と同じ結論を得る (収束の位相を定理 2 と同じようにとる) ことは難しい. そこで初期条件が $L^{2,s}$ ($5/2 < s < p$) の属するとして, 収束の位相を $\mathcal{F}^{-1}(B_{\infty,2}^{s-5/2-0} \cap H^{s-5/2-0})$ (これは Sobolev の埋め込みの関係から言えば $L^{2,s-2-0}$ に対応) に取り替えて評価すれば, ほぼ同様の結論を得る [8].

注意 4. さらに, 空間一次元における微分型非線形 Schrödinger 方程式

$$iu_t + \frac{1}{2}\partial^2 u = \lambda_1 |u|^2 u + i\lambda_2 |u|^2 \partial u + i\lambda_3 u^2 \overline{\partial u} + \lambda_4 u |\partial u|^2 + \lambda_5 \bar{u} (\partial u)^2 + i\lambda_6 |\partial u|^2 \partial u$$

($\lambda_1, \dots, \lambda_6$ は実数) についてもほぼ同様の結論が成り立つ [9, 7].

§3. 他の分散型方程式について

それでは他の非線形分散型方程式についてはどうであろうか. Schrödinger 型の場合に解析がうまくいったのは, 発展作用素が指数関数という非常に都合のよい関数を用いて積分核表示されるという事情によるところが大きい. また, 上の証明においては非線形項の持つゲージ不変性も使われている. このような事情から, 現在漸近展開の第 2 項がうまく求まっているのは Benjamin-Ono 型方程式

$$(8) \quad \begin{aligned} v_t + \frac{1}{2}\mathcal{H}\partial^2 v + \partial f(v) &= 0 \\ v(0, x) &= v_0(x) \end{aligned}$$

の場合のみである. 但し $f(v) = \pm |v|^{p-1} v$ ($p > 3$) $v: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ である. これは, 変換 $u = Pv \equiv (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty e^{ix\xi} \hat{v}(\xi) d\xi$ により, (8) が Schrödinger 型の

$$(9) \quad \begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}\partial^2 u + iP\partial f(u + \bar{u}) &= 0 \\ u(0, x) &= Pv_0(x) \end{aligned}$$

に変換されるからである. 但し, 非線形項にゲージ不変性がなく, また P が不連続な表象を持つ Fourier multiplier であるため, 取り扱いが定理 1 に比べてかなり複雑になる. 得られた結論のみを述べると次のようになる.

定理 3. $p > 3$, $u_0 \in H^2 \cap H^{1,1}$ で $\|u_0\|_{H^2 \cap H^{1,1}}$ は十分小さいとすると, $\phi \in H^1$, $\psi \in L^2$ が存在して

$$\|V(-t)v(t) - \phi - t^{(p-3)/2}\psi\|_2 = o(t^{(p-3)/2})$$

が成り立つ. ここで $V(t) = \exp(-t\mathcal{H}\partial^2/2)$ である.

$p = 3$ は Hartree 方程式で言うと $\gamma = 1$ の場合に相当し, $p > 3$ の場合と比べて取り扱いが格段に難しくなる. また, KdV 型方程式の解の高次の漸近展開についてもよく分かっていない.

References

- [1] J. Ginibre and T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$* , Comm. Math. Phys. **151** (1993), 619–645.
- [2] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Asymptotic behavior in time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.
- [3] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Remarks on scattering theory and large time asymptotics of solutions to Hartree type equations with a long range potential*, SUT J. Math. **34** (1998), 13–24.
- [4] N. Hayashi, P. I. Naumkin and T. Ozawa, *Scattering theory for Hartree equation*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 1256–1267.
- [5] N. Hayashi and Y. Tsutsumi, *Scattering theory for Hartree type equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46** (1987), 187–213.
- [6] N. Kita, *Sharp L^r asymptotics of the solutions to nonlinear Schrödinger equations*, preprint.
- [7] N. Kita, *Sharp asymptotics of small solutions to derivative nonlinear Schrödinger equations with gauge invariant cubic nonlinearity*, preprint.
- [8] N. Kita and T. Wada, *Sharp asymptotic behavior of solutions to nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, to appear in Funkcial. Ekvac.
- [9] N. Kita and T. Wada, *Sharp asymptotics of the small solutions to the nonlinear Schrödinger equations of derivative type*, to appear in Differential Integral Equations.
- [10] N. Kita and T. Wada, in preparation.
- [11] K. Nakanishi, *Modified wave operators for the Hartree equation with data, image and convergence in the same space*, preprint.
- [12] H. Nawa and T. Ozawa, *Nonlinear scattering with nonlocal interaction*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 259–275.
- [13] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.
- [14] T. Wada, *Asymptotic expansion of the solution to the nonlinear Schrödinger equation with nonlocal interaction*, J. Funct. Anal. **180** (2001), 11–30.