

U(1) gauge 理論にもとづく 3次元多様体の位相不変量 II.

東大・理 牛腸 徹 (Toru Gocho)

数年前, [W] において Wittenにより 3次元多様体 (及びその中の link) の位相不変量が物理的な idea にもとづいて定義されて以来, それを数学的に厳密に定義しようという試みが数学サイドでなされてきている。original の Witten の論文 [W], 及びそれに関連した Atiyah, Hitchin, Segal 等の研究により, この不変量を微分幾何的にとらえることが可能であると考えられる。そうした観点にもとづいてできる限り幾何的に不変量を構成し, 理解したいという希望を筆者はもっている。Witten の不変量に相当すると思われる不変量の数学的に厳密な構成という点では [R-T], [K] などにより一応の解決をみていると考えられるが, そこでは厳密な不変量の構成に主眼がおかれているため, original な幾何的 idea はかくれてしまっているように思われる。そこで現在 Jones-Witten 理論と呼ばれているものの微分幾何的側面の理解のため

の第1段階として gauge 群が $U(1)$ の場合にこれに当たる不変量を幾何学的に、かつ *explicit* に構成しようと試みたのが [G1] である。これについては講究録の別の部分に書いたので ([G2]). ここではそうした構成の *idea* の *base* となった [W] における考え方と、それを幾何的にとらえようという Atiyah 周辺の人達の考え方の基本となる部分の一部を筆者なりにかいつまんで説明したいと思う。これについては現在では Atiyah による解説書 [A2] もあるので、そこではあまり説明されていない部分を説明することを目標とした。

さて、Witten の original な定義の setting は次のようなものである。 M を closed oriented 3次元多様体。 G を compact Lie 群とし、 M 上の trivial G -bundle $P_M = M \times G$ 及び P_M 上の connection の空間 $\mathcal{A}_M \cong \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g}$ は G の Lie algebra) を考える。このとき $\mathcal{A}_M$ 上には

$$CS(A) = \frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr} (dA \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

で定義される関数 $CS: \mathcal{A}_M \rightarrow \mathbb{R}$ が考えられる。(これを Chern-Simons invariant という。) これを Lagrangian として Feynmann の経路積分

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_M} e^{\sqrt{-1} k CS(A)} \mathcal{D}A \quad (k \in \mathbb{N} \text{ は parameter})$$

を考えると、これは M の位相不変量になるというのが

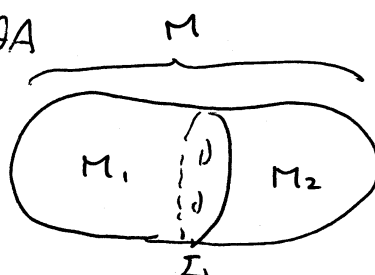
Witten の主張であった。この定義は現在の数学では認めがたいものであるが、不変量 $Z_k(M)$ を non-empty な境界をもつ次元多様体 M にまで拡張することにより、数学的に定式化できるところまで reduce しようというのが idea である。

実際、 $\partial M = \Sigma \neq \emptyset$ のとき不変量 $Z_k(M)$ は次のように拡張される。 P_Σ, A_Σ などを用いて M のかわりに Σ を考えたものとし、 $r: A_M \rightarrow A_\Sigma$ で restriction map を表わす。このとき $Z_k(M)$ は A_Σ 上の関数 $Z_k(M): A_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ として、

$$Z_k(M)(a) = \int_{r^{-1}(a)} e^{\int_1 KCS(A)} \partial A$$

により定義される。

このように不変量を拡張して考える利点は、



$M = M_1 \cup_\Sigma M_2$, $\partial M_1 = \Sigma = -\partial M_2$ と分解したときには、

$$\begin{aligned} Z_k(M) &= \int_{A_M} e^{\int_1 KCS(A)} \partial A \\ &= \int_{A_M} e^{\int_1 KCS(A_1) + \int_1 KCS(A_2)} \partial A, \quad A_i = A|_{M_i} \\ &= \int_{A_\Sigma} Z_k(M_1)(a) \overline{Z_k(M_2)(a)} \partial a \\ &= \langle Z_k(M_1), Z_k(M_2) \rangle \end{aligned}$$

と $Z_k(M)$ が $Z_k(M_1)$ と $Z_k(M_2)$ の pairing で表わせる点にある。

この $Z_k(\Gamma) : \mathcal{A}_E \rightarrow \mathbb{C}$ を gauge 変換群 $\mathcal{G}_E = C^\infty(E, G)$ の symmetry によつて有限次元的な対象に reduce するというのが idea である。

そこでしばらくは上の $Z_k(\Gamma)$ のことは忘れて 2次元面 E 上の connection の空間 $\mathcal{A}_E$ を考察する。 $\mathcal{A}_E$ は $\Omega^1(E, \mathfrak{g})$ を model とする affine 空間であるので、 $\Omega^1(E, \mathfrak{g})$ 上の symplectic form,

$$\omega(\alpha, \beta) = - \int_E \text{tr}(\alpha \wedge \beta) \quad , \quad \alpha, \beta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$$

により ∞ 次元 affine symplectic 多様体になる。今 $A_0 \in \mathcal{A}_E$ を 1つ fix すると (以下では A_0 として trivial connection を考える。) $A \in \mathcal{A}_E$ に対し $A - A_0 \in \Omega^1(E, \mathfrak{g}) = T_A \mathcal{A}_E$ であるので、 $\partial_A(\cdot) = \omega(A - A_0, \cdot) \in T_A^* \mathcal{A}_E$ により $\mathcal{A}_E$ には自然な 1-form θ が定まる。微分幾何学的には、1-form は trivial hermitian line bundle $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}_E$ 上の unitary connection とみなせるが、 $\pm$ 3 次元 parameter k を導入して $\nabla^{(k)} = d - \sqrt{-1} \pi k \theta$ なる connection を考えてみる。このとき connection $\nabla^{(k)}$ の curvature $F^{\nabla^{(k)}}$ は、 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F^{\nabla^{(k)}} = k \omega$ となる。すなわち、 $(\mathbb{C}, \nabla^{(k)}) \rightarrow (\mathcal{A}_E, k\omega)$ は symplectic geometry と言うところの geometric quantization の setting になっている。

さて connection の空間 $\mathcal{A}_E$ には gauge 変換群 $\mathcal{G}_E =$

$C^\infty(\Sigma, G)$ が

$$g \cdot a = g^{-1} a g + g^{-1} dg \quad , \quad g \in \mathcal{G}_\Sigma, \quad a \in \mathcal{A}_\Sigma$$

によって作用するが、明らかにこの作用は symplectic form ω を保つ。

一般に (X, ω) を symplectic 多様体, $(L, \nabla) \rightarrow (X, \omega)$ を hermitian line bundle L とその上の unitary connection ∇ で curvature F^∇ が $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F^\nabla = \omega$ を満たすものとする。このとき Lie 群 H が X 上 symplectic form ω を保つて作用するとき、moment map と呼ばれる写像 $\mu: X \rightarrow \mathcal{L}^*$ ($\mathcal{L}$ は H の Lie algebra, $\mathcal{L}^*$ は $\mathcal{L}$ の dual space) を考察することが出来る。これは H -equivariant map $\mu: X \rightarrow \mathcal{L}^*$ で、 $\mathcal{L} \ni \xi$ の infinitesimal 作用 $\xi^* \in \mathfrak{X}(X)$ に対して $d\langle \mu, \xi \rangle = \xi^* \omega$ を満たすもののことである。このような写像の存在と L 上への metric と connection ∇ を保つ $\mathcal{L}$ 作用の持ち上げの存在とが同値であることが知られている。

我々の setting では $\mathcal{G}_\Sigma$ の Lie algebra $\mathfrak{g}_\Sigma$ は $\mathfrak{g}_\Sigma = \Omega^0(\Sigma, \mathfrak{g})$ であり、

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(\Sigma, \mathfrak{g}) \times \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\varphi, \sigma) & \longmapsto & \int_\Sigma \text{tr}(\varphi \sigma) \end{array}$$

なる pairing により $\mathfrak{g}_\Sigma^* = \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g})$ とみなすと moment map

$\mu: A_{\Sigma} \rightarrow \mathfrak{g}_{\Sigma}^*$ は $\mu(a) = kFa$ ($Fa = da + a \wedge a$ は a の curvature 2 form) で与えられることはよく知られている。したがってこの moment map に対応した $(\mathbb{C}, \nabla^{(k)}) \rightarrow (A_{\Sigma}, k\omega)$ への $\mathfrak{g}_{\Sigma}$ 作用の持ち上げが考えられるが、 $k \in \mathbb{Z}$ のときこれは $\mathfrak{g}_{\Sigma}$ 作用を induce し、次で与えられる。 $(a, u) \in \mathbb{C} = A_{\Sigma} \times \mathbb{C}$, $g \in \mathfrak{g}_{\Sigma}$ に対し、

$$g \cdot (a, u) = (g \cdot a, e^{\int_{\Sigma} k S(a, g)} u)$$

とすると、 $S(a, g)$ は

$$S(a, g) = CS(\tilde{g}^* A) - CS(A)$$

但し $2M = \Sigma$ となる M と $A|_{\Sigma} = a$, $\tilde{g}|_{\Sigma} = g$

となる $A \in \mathcal{A}_M$, $\tilde{g} \in \mathcal{G}_M$ をとる。

によって与えられる。この $S(a, g)$ は本質的に Wess-Zumino-Witten model に現われる Lagrangian となることに注意しておく。このように 2次元面 Σ 上の connection 空間 A_{Σ} 上の symplectic geometry は 3次元空間 M 上の Chern-Simons invariant と密接に関係していることがわかる。

さて以上により $2M = \Sigma$ のときの M の不変量 $Z_k(M)$ は $(\mathbb{C}, \nabla^{(k)}) \rightarrow (A_{\Sigma}, k\omega)$ の $\mathfrak{g}_{\Sigma}$ 不変な section と考えられるが、実はもっと強いことが言える。すなわち、 Σ 上に complex structure J を入れると A_{Σ} には Kähler 多様体の構造が、 $\mathbb{C} \rightarrow A_{\Sigma}$ には $\nabla^{(k)}$ を hermitian connection とする

ような holomorphic line bundle の構造が入り、それに関
 して $Z_k(\Gamma)$ は holomorphic section になる ([R-S-W])。
 この holomorphic category では g_E symmetry は、その複素化
 $g_E^{\mathbb{C}} = C^\infty(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$ の symmetry に拡張するので $g_E^{\mathbb{C}}$ -symmetry
 で割ってやることで $\mathcal{Z}_{E,J}^{(k)} \rightarrow \mathcal{M}_{E,J}$ を得る。ここで
 $\mathcal{M}_{E,J} = A_E // g_E^{\mathbb{C}}$ で、これは $\mu^{-1}(0)/g_E$ 、すなわち flat
 G connection の moduli 空間に等しいことが知られている。
 そこで、 $Z_k(\Gamma): A_E \rightarrow \mathbb{C}$ という無限次元的なものを、 $g_E^{\mathbb{C}}$
 という無限次元の symmetry によって $Z_k(\Gamma) \in H^0(\mathcal{M}_{E,J}, \mathcal{Z}_{E,J}^{(k)})$
 という有限次元的に定義できる対象に reduce して考えよ
 うというのが idea である。前に $M = M_1 \cup_E M_2$ と分解
 したときに考えた pairing $Z_k(\Gamma) = \langle Z_k(\Gamma_1), Z_k(\Gamma_2) \rangle$ も有
 限次元に reduce した上での pairing と考えて $Z_k(\Gamma)$ を定義
 しようというのが Atiyah の topological quantum field
 theory ([A1]) の idea であつた。

さて、このように有限次元への reduction を考える際に
 Σ 上に complex structure J を導入する必要があつた。この
 complex structure J に対する dependence をなくすために、
 [W] では次のことが主張された。 $\mathcal{M}_{E,J}^{(k)} = H^0(\mathcal{M}_{E,J}, \mathcal{Z}_{E,J}^{(k)})$
 として $\mathcal{M}_E^{(k)} = \bigcup_J \mathcal{M}_{E,J}^{(k)}$ を Σ の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_\Sigma$ 上の
 vector bundle とみなすと、 $\mathcal{M}_E^{(k)}$ には projective flat

connection が入る。すなわち $\mathcal{M}_\Sigma^{(k)}$ の fiber $\mathcal{M}_{\Sigma, J}^{(k)}$ は up to constant ですべて同一視されることになる。さらに、connection の引きもどしによる $\mathcal{A}_\Sigma$ 上の $\text{Diff}^+(\Sigma)$ 作用は、 $\mathcal{M}_\Sigma^{(k)}$ 上に mapping class group $\Gamma_\Sigma = \text{Diff}^+(\Sigma)/\text{Diff}_0^+(\Sigma)$ の作用を induce する。これにより Γ_Σ は $\mathcal{M}_\Sigma^{(k)}$ 上の projective flat connection の monodromy 表現を通して $\mathcal{M}_{\Sigma, J}^{(k)}$ に symmetry として作用することになる。

ここまで問題を reduce すると結局 Witten type の不変量を与えることは、適当な条件を満たすように、

- 1). 2次元面 Σ に mapping class group Γ_Σ の projective な作用をもつ有限次元 vector space $\mathcal{M}_\Sigma$ を対応させ、
- 2). $2M = \Sigma$ となる3次元多様体 M に対してその不変量 $Z(M) \in \mathcal{M}_\Sigma$ を対応させる

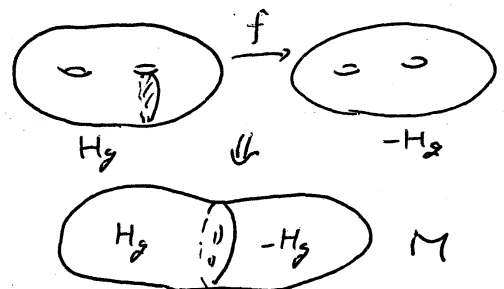
ことであると解釈できる。

さて、実際に closed oriented 3次元多様体 M の不変量を与える1つの方法として、 M が Heegaard 分解をもつことを利用するものがある。今、genus g の handle body H_g

$2H_g = \Sigma_g$, $f \in \Gamma_{\Sigma_g}$ とし

$M = H_g \cup_f (-H_g)$ と表わされ

るとする。すると topological quantum field theory の要請から



$Z(M) = \langle f \cdot Z(H_g), Z(H_g) \rangle$ と表わされることになる。
 したがって $Z(M)$ が M の Heegaard 分解の仕方によらない
 ように $Z(H_g)$ を定めることができれば不変量 $Z(M)$ が定
 義される。これは [K] において河野氏が conformal field
 theory から得られる monodromy 表現を用いて不変量を構成
 したときの idea であり、[G1] における幾何学的な構成
 の最後の部分でも用いらせてもよい方法でもある。

以上 Jones-Witten 理論における幾何学的な idea の一部
 を筆者なりに述べたが、こうした微分幾何学的な線に沿
 った不変量の構成は筆者の知る限り未だ完全には得られ
 ていないようである。特に holomorphic section $Z_k(M) \in$
 $M_{E,J}^{(k)}$ が何によって決まるのかということについてはあ
 まり手がついていないように思われる。この点でも gauge
 群が U(1) の場合の理論をよく知ることが何らかの助けに
 なるないかと希望しているが、これからの課題である。

(references)

- [A1]. M. F. Atiyah, Topological quantum field theories,
 Publ. I.H.E.S. 68 (1989) 175-186
- [A2]. M. F. Atiyah, The geometry and physics of knots,
 Cambridge University press (1990)

- [G1]. T. Gocho , The topological invariant of three-manifolds
based on the $U(1)$ gauge theory (preprint)
- [G2]. 牛腸 徹, $U(1)$ gauge理論にもとづく3次元多様体
の位相不変量 I. , 「複素解析幾何学とその周辺の
研究」の数理研講究録
- [K]. T. Kohno , Topological invariants for 3-manifolds using
representations of mapping class group I. (preprint)
- [R-S-W]. T.R. Ramadas, I.M. Singer, and J. Weitsman ,
Some comments on Chern-Simons gauge theory .
Comm. Math. Phys. 126 (1989) , 409-430
- [R-T]. N. Reshetikhin, V. Turaev , Invariants of 3-manifolds
via Link polynomials and Quantum groups
Invent. Math. 103 (1991) , 547-597
- [W] E. Witten , Quantum field theory and the Jones polyno-
mial , Comm. Math. Phys. 121 (1989) 351-399