

有界作用素の商に関する二、三の性質について

富山大教育 泉野佐一 (Saichi Izumino)

1. 序. A, B は Hilbert 空間 H 上の二つの有界 (線形) 作用素で, 核条件 $\ker A \subset \ker B$ を満たしているとする. このとき, 有界作用素の商 $[B/A]$ を $Ax \rightarrow Bx, x \in H$ によって定義する. H の直積 $H \times H$ の中に $G(A, B) := \{(Ax, Bx); x \in H\}$ を考えたとき, これは一つのグラフとなるが, $[B/A]$ はこれに対応した写像として定義してもよい. 作用素の商の研究は, すでに Dixmier [2] により J -operator の名で, また, 最近では Kaufman [7], [10], [11] により (semiclosed operator とも呼ばれて) 行なわれており, その特徴づけなどがなされている. 作用素商の集合は,

- (1) 閉作用素を含む,
- (2) 和, 積について閉じている.

などはよく知られていることである. Fujii-Makimura [5] では, ある (非有界) 作用素環の閉作用素をその有界な作用素

の商で表すことが論じられている。

作用素商の和や積とともに、作用素商の共役や閉包をまた作用素の商で表す問題も考えられる。これに関連しては拙稿 [6], [7] において、いくつかの事柄を示した。

本報告では、作用素商 $[B/A]$ が必ずしも *densely defined* でないとき、その共役に相当する $[B/A]^*$ を適当に定義し、その性質などを調べることにしたい。

2. X -共役. A の値域 AH が *dense* のとき, $[B/A]$ の共役 $[B/A]^*$ は、グラフ

$$G(A, B)^* = \{(x, y); \langle Bu, x \rangle = \langle Au, y \rangle, u \in H\}$$

に対応して定まる写像と定義するのが自然である。明らかに、 $(x, y) \in G(A, B)^*$ と $B^*x = A^*y$ は同値であり、したがって、 $[B/A]^*$ の定義域は $B^{*(-1)}(A^*H) = \{x; B^*x \in A^*H\}$ とわかる。いま、 $R = (A^*A + B^*B)^{\frac{1}{2}}$ とし、方程式

$$XR = A, \quad YR = B$$

を考える。Douglas の majorization 定理 [3] ($RH \supset A^*H$, $RH \supset B^*H$ に適用) より、有界作用素の解 X, Y を得る。

$\ker X \supset \ker R$, $\ker Y \supset \ker R$ の条件をつけると、解は *unique* となり、これを $X = A_e, Y = B_e$ とかくことにする。この A_e, B_e に関して次のことがわかっている。(証明略)

命題 2.1 ([6]). $(RH)^-$ の上への直交射影を P_R として,

$$(1) \quad A_e^* A_e + B_e^* B_e = P_R.$$

$$(2) \quad B^{*(1)}(A^* H) = (1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}} H.$$

そこで, $A_* = (1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}}$ とおくと, $[B/A]^*$ の定義域は AH と書ける. いま, 方程式

$$A^* z = B^* A_*$$

を考える. $\ker z^* \supset \ker A$ の条件の下で, これは unique な有界作用素解をもつ. この解を $z = B_{\#}$ とかくことにする.

$x = A_* u$ として, $B^* x = A^* y$ から $y = B_{\#} u$ を得る. これから

命題 2.2 ([6]). AH が dense ならば

$$[B/A]^* = [B_{\#}/A_*] = [V_e B_e^* / (1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}}]$$

ここで, V_e は A_e の極分解 $A_e = V_e (A_e^* A_e)^{\frac{1}{2}}$ より得られる partial isometry である.

上の命題で, $B_{\#} = V_e B_e^*$ が成り立つが, これは,

$$\begin{aligned} A^* B_{\#} &= B^* A_* = R B_e^* (1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}} = R (P_R - B_e^* B_e)^{\frac{1}{2}} B_e^* \\ &= R (A_e^* A_e)^{\frac{1}{2}} B_e^* = R A_e^* V_e B_e^* = A^* V_e^* B_e^* \end{aligned}$$

なることより, $\ker A^* = \{0\}$ から得られる.

実は, AH が dense と仮定しなくても, $B_{\#}$ は定まる. したがって, 作用素の商 $[B_{\#}/A_*]$ はいつでも定義できる.

そこで

$$[B/A]^x = [B_{\#}/A_{*}]$$

において, これを $[B/A]$ の x -共役などと呼ぶことにする。

AH の dense なことを仮定しなくても, $B_{\#} = \bigvee_e B_e^*$ は依然として成り立つことも確かめられる。 x -共役について, 次のことが成り立つ。

定理 2.3. (1) $[B/A]^{xx} = [B_{\#}^*/(1-B_{\#}B_{\#}^*)^{\frac{1}{2}}]$.

(2) $[B/A]^{xxx} = [B_{\#}/(1-B_{\#}^*B_{\#})^{\frac{1}{2}}]$.

(3) $[B/A]^{xxxx} = [B/A]^{xx}$.

略証 (1) $[B/A]^{xx} = [B_{\#}/A_{*}]^x$ であり, また命題 2.1

(1) から $(A_{*})_e = A_{*}$, $(B_{\#})_e = B_{\#}$ を得ることが出来る。これから, $(A_{*})_{*} = (1-B_{\#}B_{\#}^*)^{\frac{1}{2}}$, $(B_{\#})_{\#} = B_{\#}^*$ を示すことが出来る。

(2), (3) も同様にして得られる。

Kaufman [9] では, densely defined な閉作用素 T は pure contraction C , つまり, $\|C\| \leq 1$, $\ker(1-C^*C) = \{0\}$ なる作用素 C を用いて, $T = [C/(1-C^*C)^{\frac{1}{2}}]$ ([10] では, $T = C(1-C^*C)^{-\frac{1}{2}}$ と表現) と書けることを示している。定理 2.3 の $B_{\#}$, $B_{\#}^*$ はちょうど pure contraction なることは容易にわかり, したがって, (1) は $[B/A]^{xx}$ の Kaufman の表現に他ならない。

二つの作用素商 $[B/A]$, $[D/C]$ に対して

$$G(A, B) \supset G(C, D)$$

となるとき, $[B/A] \supset [D/C]$ と書き, $[B/A]$ は $[D/C]$ の拡張と呼ぶことにする。このとき, 次の補題を作っておくと都合がよい。

補題 2.4. (1) $[Y/X] \subset [B/A] \Leftrightarrow$ 有界作用素 Z が存在し, $X = AZ$, $Y = BZ$.

$$(2) [Y/X] \subset [B/A]^{\times} \Leftrightarrow B^*X = A^*Y, YH \subset (AH)^{\perp}.$$

略証. (1) 一般に, $G(E, F) = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} (H \times H)$, つまり $H \times H$ の作用素 $\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$ の値域. このことから Douglas の majorization 定理を用いて (1) の有界作用素 Z の存在を示すことができる。

(2) では, $B^*X = A^*Y$ から $XH \subset B^{*(-1)}(A^*H) = A_*H$. そこで, $X = A_*Z$ とおくと, $B^*A_*Z = A^*Y$. $B^*A_* = A^*B_{\#}$ から,

$$A^*(Y - B_{\#}Z) = 0, \text{ これから } Y = B_{\#}Z \text{ を得て, } [Y/X] \subset [B_{\#}/A_*].$$

逆方向の証明は容易である。

$[B/A] \subset [B/A]^{\times}$ となるとき, $[B/A]$ はいわば $\times$ -対称ということになる。これについては, 補題 2.4 から次のことがわかる。

$$\text{系 2.5. } [B/A] \subset [B/A]^{\times} \Leftrightarrow B^*A = A^*B, BH \subset (AH)^{\perp}.$$

作用素商 $[B/A]$ が closable とは,

$\{u_n\} \subset H, \quad Au_n \rightarrow 0, \quad Bu_n \rightarrow v \quad \text{ならば} \quad v=0$
と定義する ([12], p. 165). このとき,

定理 2.6. 次の (1) — (3) は同値である.

(1) $[B/A]$ は closable.

(2) $[B/A]^{xx} \supset [B/A]$.

(3) $[B/A]^{xxx} = [B/A]^x$.

略証. (1) は [7] の Lemma 2.3 によれば $\ker A_e \subset \ker B_e$ と同値. これはまた

$$(2.1) \quad B_e B_e^* = B_{\#}^* B_{\#} (= B_e V_e^* V_e B_e^*)$$

と同値. 定理 2.3 より (2.1) と (3) は同値となることがわかる. (2) については, まず (1) の仮定のもとに, (2.1) と補題 2.4₍₂₎ から, $[B/A] \subset [B_{\#}/A_{\#}]^x = [B/A]^{xx}$ を得る.

また, (2) の仮定から, 補題 2.4 (1) を用いて, $A = (1 - B_{\#} B_{\#}^*)^{\frac{1}{2}} Z$, $B = B_{\#}^* Z$ において, $Au_n \rightarrow 0, Bu_n \rightarrow v$ から $v=0$ を導き $[B/A]$ の closable なことを知る.

$(A_{\#} H)^{\perp}$ の上への直交射影を $P_{\#}$ とおく. このとき,

$$(2.2) \quad P_{\#} = 1 - B_e B_e^* + B_{\#}^* B_{\#}$$

なることは知られている [7]. したがって, 先の定理 2.6

の (1) - (3) と $P_* = 1$ とは同値とわかる。

P_* を用いて, 作用素商 $[B/A]$ は次のように, その closable part $[P_*B/A]$ と singular part $[P_*^\perp B/A]$ との和に分解される:

$$[B/A] = [P_*B/A] + [P_*^\perp B/A]$$

これは, Jorgensen 分解 [8] である. $[P_*B/A]$ が実際 closable なることは少しの計算で直接示すこともできる. $[P_*^\perp B/A]$ が singular であるとは, $A^*H \cap (P_*^\perp B)^*H = \{0\}$ ということである。

さて, $[B/A]$ の closable part についてであるが, (2.2) より, $P_*B = B_e V_e^* V_e R$ と表される. さらに

$$\begin{aligned} [P_*B/A] &\subset [B_e V_e^* V_e / A_e] = [B_\#^* / (A_e A_e^*)^{\frac{1}{2}}] \\ &= [B_\#^* / (V_e V_e^* - B_\# B_\#^*)^{\frac{1}{2}}] \end{aligned}$$

これから, 次の系 2.7, 2.8 を得る. ($[B/A]^-$ は $[B/A]$ の閉包。)

系 2.7. AH が dense ならば,

$$(1) [P_*B/A] \subset [B_\#^* / (1 - B_\# B_\#^*)^{\frac{1}{2}}] = [B/A]^{xx}$$

$$(2) [P_*B/A]^- = [B/A]^{xx}$$

系 2.8. $[B/A]$ が closable ならば,

$$(1) [B/A]^- = [B_e / A_e].$$

$$(2) [B_e / A_e]^x = [B_\# / (1 - B_\#^* B_\#)^{\frac{1}{2}}].$$

3. 作用素商の積に関連した結果. 二つの作用素商の積 $[B/A][D/C]$ は合成

$$Cx \longrightarrow Dx = Ay \longrightarrow By$$

によって定められる. このとき, $x \in D^{-1}(AH)$ となることから, 積 $[B/A][D/C]$ の定義域は $CD^{-1}(AH)$ となる. まず, $D^{-1}(AH)$ が一つの有界作用素の値域として表されることは先に $B^{*(1)}(A^*H)$ が有界作用素 A^* の値域となることを示したと殆んど同様の方法で示される; $S = (AA^* + DD^*)^{\frac{1}{2}}$ とし, 方程式 $SX = A$, $SY = D$ の $\ker X^* \supset \ker S$, $\ker Y^* \supset \ker S$ を満たす unique な解を X, Y と (同じ文字で) 表せば, $D^{-1}(AH) = (1 - Y^*Y)^{\frac{1}{2}}H$ となる. そこでいま便宜上, $M = (1 - Y^*Y)^{\frac{1}{2}}$ とおけば, 結局 $D^{-1}(AH) = MH$. さらに, 方程式 $AZ = DM$ の $\ker Z^* \supset \ker A$ を満たす (unique な) 解を $Z = N'$ とおく. こうすると, $x = Mu$ に対して, $y = Nu$ を得て,

$$Cx = CMu \rightarrow DMu = ANu \rightarrow BNu = By.$$

したがって,

$$[B/A][D/C] = [BN/CM]$$

と表すことができる.

作用素商 $[B/A]$ が特に $B^*A = A^*B \geq 0$ を満たすとき, $[B/A]$ は X -正値としても呼ぼう. このとき,

命題 3.1. $[B/A]^x [B/A]$, $[B/A][B/A]^x$ は x -正值.

略証 たとえば, $[B_{\#}/A_{\#}][B/A] = [B_{\#}N/AM]$ とする.
ここに, M, N は $MH = B^{-1}(A_{\#}H)$, $BM = A_{\#}N$ を満たすよう
に選んだ有界作用素である. このとき,

$$(B_{\#}N)^*(AM) = N^*B_{\#}^*AM = N^*A_{\#}BM = N^*A_{\#}^2N \geq 0.$$

次に, $[B/A]^x$ のある意味での正規性に関する定理として,

定理 3.2. $[B/A]$ が closable のとき, 次の (1) - (3) は
同値である.

$$(1) [B/A]^{xx} [B/A]^x = [B/A]^x [B/A]^{xx}$$

$$(2) B_{\#}^* B_{\#} = B_{\#} B_{\#}^*.$$

$$(3) A_e A_e^* + B_e B_e^* = V_e V_e^*.$$

略証. 定理 2.3, 2.6 と 積の公式 から

$$[B/A]^{xx} [B/A]^x = [B_{\#}^* B_{\#} / (1 - B_{\#}^* B_{\#})]$$

$$[B/A]^x [B/A]^{xx} = [B_{\#} B_{\#}^* / (1 - B_{\#} B_{\#}^*)]$$

とわかる. これをもとに, (1) と (2) の同値なることはすぐ
出る. (2) と (3) の同値なることは, 命題 2.1 (1) から
得られる等式

$$A_e A_e^* + B_{\#} B_{\#}^* = V_e (A_e^* A_e + B_e^* B_e) V_e^* = V_e V_e^*$$

から示すことができる.

$[B/A]$ が閉作用素で, *densely defined* ならば $[B/A]^{xx} = [B/A]$, $[B/A]^x = [B/A]^*$ であるから, 定理 3.2 は $[B/A]$ が正規となるための同値条件に他ならない。

二つの作用素 S, T の積の共役作用素に関して, Schechter によって得られた次の定理がある。

Schechter の定理 [13]. S, T を H 上の *densely defined* な閉作用素とする。もし TH が *closed*, かつ $\dim (TH)^\perp < \infty$ ならば, 積 ST は *densely defined* で, $(ST)^* = T^*S^*$ 。

そこでいま, 同様のことを $[B/A], [D/C]$ の積について考えてみたい。条件は少し弱いものを仮定する。

定理 3.3. $D^{-1}(AH)$ は *dense* とする。このとき,

- (1) $([B/A][D/C])^x \supset [D/C]^x[B/A]^x$.
- (2) DH が *closed*, かつ $\dim (DH)^\perp < \infty$ ならば

$$([B/A][D/C])^x = [D/C]^x[B/A]^x$$

略証 (1) では, まず $D^{-1}(AH) = MH$, $AN = DM$ となるような M, N を用いて, 左辺を $[BN/CM]^x$ と表しておく。また, 右辺 $[D/C]^x[B/A]^x = [D_\#/C_*][B_\#/A_*]$ についても, やはり, $B_\#^{-1}(C_*H) = VH$, $C_*W = DV$ となる V, W を用い

て, $[D_{\#}W/A_{\#}V]$ と表しておく。(i)を示すには, $[BN/CM]^{\times} \supset [D_{\#}W/A_{\#}V]$ をいえばよいわけであるが, これには, 補題 2.4 (2) から,

$$(i) \quad (BN)^*(A_{\#}V) = (CM)^*(D_{\#}W).$$

$$(ii) \quad D_{\#}WH \subset (CMH)^{\perp}.$$

の二つをいえばよい。(i)は計算よりすぐわかる。(ii)は仮定の $\ker M = \{0\}$, と $\ker C^* \subset \ker D_{\#}$ から得られる。

次に (2) の証明であるが, (i)が示されたので

$$(3.1) \quad [BN/CM]^{\times} \subset [D_{\#}W/A_{\#}V]$$

を示せばよいことになる。これには

$$(3.2) \quad (BN)^{*(-1)}((CM)^*H) \subset A_{\#}VH (= A_{\#}B_{\#}^{-1}(C_{\#}H))$$

をいえばよい。(3.2)を示す前に

$$(3.3) \quad (BN)^{*(-1)}((CM)^*H) \subset A_{\#}H$$

を示してかかろう。そこでまず, 仮定より DH が closed ということから, $\mathcal{N} = A^{-1}(DH)$ が閉部分空間になること, また, その直交補空間 $\mathcal{N}^{\perp}$ は $\dim(DH)^{\perp} < \infty$ を用いて, 有限次元空間となることに注意しよう。また, さらに

$$\begin{aligned} AH &= A\mathcal{N} + A\mathcal{N}^{\perp} = AH \cap DH + A\mathcal{N}^{\perp} \\ &= ANH + A\mathcal{N}^{\perp} \\ &= \{A(Nu+v); u \in H, v \in \mathcal{N}^{\perp}\} \end{aligned}$$

とわかる。また, 核条件 $\ker A \subset \ker B$ より BH について

$$BH = \{B(Nu+v); u \in H, v \in \mathcal{N}^\perp\}$$

となる。さて, (3.3) を示すため, 任意の $g \in (BN)^{*(-1)}((CM)^*H)$ に対して, まず

$$(iii) \quad |\langle BNu, g \rangle| \leq K_1 \|ANu\|, \quad \forall u \in H.$$

を示そう。ここで, K_1 は u に無関係な正の定数である。

これを示すには, しかし

$$(BN)^{*(-1)}((CM)^*H) \subset (BN)^{*(-1)}((CD^\dagger DM)^*H)$$

という関係を (証明なしで) 用いる。 $D^\dagger$ は D の一般逆作用素である。 (DH が closed という) ことから有界作用素 $D^\dagger$ の存在は保証される [1, p.321].) そこで, $(BN)^*g \in (CD^\dagger DM)^*H$ ということから, ある $h \in H$ を選んで, $(BN)^*g = (CD^\dagger DM)^*h$ したかつて,

$$\begin{aligned} |\langle BNu, g \rangle| &= |\langle u, (BN)^*g \rangle| = |\langle u, (CD^\dagger DM)^*h \rangle| \\ &= |\langle CD^\dagger DMu, h \rangle| \leq \|h\| \|CD^\dagger\| \|DMu\| \\ &= K_1 \|ANu\| \quad (\forall u \in H) \end{aligned}$$

また, $AN^\perp$ は有限次元空間ということから, $K_2 > 0$ を選んで

$$(iv) \quad |\langle Bv, g \rangle| \leq K_2 \|Av\|, \quad \forall v \in \mathcal{N}^\perp$$

とできる。よって, (iii), (iv) より, $K_3 > 0$ を選んで

$$|\langle BNu + Bv, g \rangle| \leq K_3 (\|ANu\| + \|Av\|)$$

とできる。 $(ANH)^\perp \cap AN^\perp = \{0\}$ となることから, ある

$K_4 > 0$ を選んで

$$\|ANu\| + \|Av\| \leq K_4 \|ANu + Av\|.$$

よって, ある $K_5 > 0$ を用いて

$$|\langle B(Nu+v), g \rangle| \leq K_5 \|A(Nu+v)\|$$

これは, 任意の x に対して, $|\langle Bx, g \rangle| \leq K_5 \|Ax\|$

ということであり, $B^*g \in A^*H$. よって, $g \in A_*H$ となり

(3.3) が示された. そこで (3.2) を示すため, $g = A_*k$

($g \in (BN)^{*(1)}((CM)^*H)$) とおく. すると

$$(BN)^*g = (BN)^*A_*k = N^*B^*A_*k = N^*A^*B_{\#}k = M^*D^*B_{\#}k.$$

一方, $l \in H$ を適当にとり, $(BN)^*g = (CM)^*l$ とおけば,

$$M^*D^*B_{\#}k = M^*C^*l. \text{ for } M = \ker M^* = \{0\} \text{ から, } D^*B_{\#}k = C^*l.$$

よって, $B_{\#}k \in D^{*(1)}(C^*H) = C_*H$, あるいは, $B_{\#}k \in B_{\#}H \cap C_*H$

とかける. これから,

$$B^*A_*k = A^*B_{\#}k \in A^*(B_{\#}H \cap C_*H)$$

したがって, $g = A_*k \in B^{*(1)}A^*(B_{\#}H \cap C_*H)$. さらに少し

計算すれば, $B^{*(1)}A^*(B_{\#}H \cap C_*H) \subset A_*B_{\#}^{-1}(C_*H)$ という

こともわかる. これで (3.2) が示される.

REFERENCES

- [1] A. Ben-Israel and T. N. Greville, Generalized Inverses: Theory and Applications, Wiley, New York, 1974.
- [2] J. Dixmier, Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, Bull. Soc. Math. France 77 (1949), 11-101.

- [3] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 413-416.
- [4] P. A. Fillmore and J. P. Williams, On operator ranges, Advances in Math. 7 (1971), 254-281.
- [5] M. Fujii and K. Makimura, Von Neumann's regularization as a non-commutative Steinitz theory, Math. Japonica 29 (1984), 283-285.
- [6] S. Izumino, Quotients of bounded operators, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [7] S. Izumino, Decomposition of quotients of bounded operators with respect to closability and Lebesgue-type decomposition of positive operators, to appear in Hokkaido Math. J.
- [8] P. E. T. Jorgensen, Unbounded operators: Perturbations and commutativity problems, J. Functional Anal. 39 (1980), 281-307.
- [9] W. E. Kaufman, Representing a closed operator as a quotient of continuous operators, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 531-534.
- [10] W. E. Kaufman, Semiclosed operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 76 (1979), 67-73.
- [11] W. E. Kaufman, Closed operators and pure contractions in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 83-87.
- [12] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1966.
- [13] M. Schechter, The conjugate of a product of operators, J. Functional Anal. 6 (1970), 26-28.