

多面体に対する差分商作用素と結晶基底の多面体表示

東京工業大学理学院 藤田 直樹 (Naoki Fujita)*

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

概要

本稿は RIMS 共同研究「組合せ論的表現論の諸相」における講演内容をまとめたものである。結晶基底の多面体表示の特別なクラスが多面体に対する差分商作用素で構成できることを解説し、トーリック多様体への応用について議論する。

1 導入

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元半単純リー代数とし, $I = \{1, \dots, n\}$ をディンキン図形の頂点集合, W をワイル群, P_+ を優整ウェイト全体のなす集合とする. 優整ウェイト $\lambda \in P_+$ を取り, 最長元 $w_0 \in W$ の簡約語 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in I^N$ を固定する. 中島-Zelevinsky による結晶基底の多面体表示は有理凸多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) \subset \mathbb{R}^N$ の格子点集合を用いた結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の実現であり, 柏原作用素の明示的な記述を可能とするものである ([11, 15, 16] 参照). 筆者は内藤聡教授との共同研究 [6] において, $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ が旗多様体のある付値に関する Newton-Okounkov 凸体と一致していることを証明した; このことは旗多様体が $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ に対応する正規トーリック多様体 $X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))$ へ平坦に退化することを意味している. 本稿では有理凸多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の特別なクラスを Kiritchenko [14] が導入した多面体に対する差分商作用素を用いて構成する. 多面体に対する差分商作用素は多面体を 1 点から帰納的に構成する方法を与えており, この作用素で作られる多面体は良い組み合わせ論的性質を持っていると期待される. この作用素による記述の応用として, 以下の条件 (i), (ii) を満たすような簡約語 $\mathbf{i}$ の例を与える:

(i) すべての $\lambda, \mu \in P_+$ に対して $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda + \mu) = \Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) + \Delta_{\mathbf{i}}(\mu)$ である;

(ii) すべての $\lambda \in P_+$ に対して $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は格子多面体である.

これらの条件は $X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))$ を考えることで幾何学的に解釈することができる. 応用として $X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))$ が Gorenstein Fano であるための十分条件を与える. 本稿の証明を含む詳細についてはプレプリント [5] を参照してほしい.

2 結晶基底の多面体表示

まず 中島-Zelevinsky による結晶基底の多面体表示について説明する ([11, 15, 16] 参照). $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ をカルタン部分代数とし, $\{h_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{t}$ を単純余ルート全体のなす集合, $\mathfrak{t}^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \mathbb{C})$ を $\mathfrak{t}$ の双対空間, $\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{t}^*$ を単純ルート全体のなす集合とする. 最長元 $w_0 \in W$ の簡約語

$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in I^N$ を固定し, $1 \leq k \leq N$, $i \in I$, および $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma_k(\mathbf{a}) &:= a_k + \sum_{1 \leq j < k} \langle \alpha_{i_j}, h_{i_k} \rangle a_j \in \mathbb{Z}, \\ \sigma^{(i)}(\mathbf{a}) &:= \max\{\sigma_k(\mathbf{a}) \mid 1 \leq k \leq N, i_k = i\}, \\ M^{(i)}(\mathbf{a}) &:= \{1 \leq k \leq N \mid i_k = i, \sigma_k(\mathbf{a}) = \sigma^{(i)}(\mathbf{a})\}\end{aligned}$$

とおく. $\lambda \in P_+$ を固定し, $\mathbb{Z}^N$ 上の色付き有向グラフの構造を次で定義する: $i \in I$ および $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して,

$$\sigma^{(i)}(\mathbf{a}) > -\langle \lambda, h_i \rangle + \sum_{1 \leq j \leq N} \langle \alpha_{i_j}, h_i \rangle a_j$$

のとき

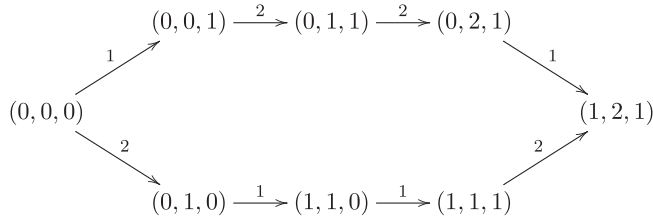
$$\mathbf{a} \xrightarrow{i} \mathbf{a} + \mathbf{e}_{\max M^{(i)}(\mathbf{a})}$$

とする; ただし $1 \leq l \leq N$ に対応する単位ベクトルを $\mathbf{e}_l \in \mathbb{Z}^N$ と書いた. このグラフの零ベクトルを含む連結成分を $G_{\mathbf{i}}(\lambda)$ とし, $V_{\mathbf{i}}(\lambda) \subset \mathbb{Z}^N$ を $G_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の頂点集合とする. 優整ウェイト $\rho \in P_+$ を

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$$

と定義する; ここで $\Phi^+ \subset \mathfrak{t}^*$ は正ルート全体のなす集合である.

例 2.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ とし, $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ とする. このとき有向グラフ $G_{\mathbf{i}}(\rho)$ は



で与えられる.

$\lambda \in P_+$ に対して, 最高ウェイト λ の既約最高ウェイト $\mathfrak{g}$ -加群を $L(\lambda)$ とし, $\mathcal{B}(\lambda)$ を $L(\lambda)$ の量子化 $L_q(\lambda)$ の結晶基底とする ([10, 12] 参照).

命題 2.2 ([15, Theorem 3.2] 参照). 色付き有向グラフ $G_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の結晶グラフと一致する.

$\mathbb{R}$ -線形空間 $P_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{t}^*$ を

$$P_{\mathbb{R}} := \sum_{i \in I} \mathbb{R} \alpha_i$$

と定義し, $P_{\mathbb{R}}$ の中で P_+ を含む最小の実閉錐を $P_{+, \mathbb{R}}$ とする. 整ウェイト全体のなす集合は $P_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{Z}$ -格子となっており, この $\mathbb{Z}$ -格子に関して $P_{+, \mathbb{R}}$ は有理凸多面錐である.

定義 2.3 ([6, Definition 2.15] 参照). $\mathbf{i} \in I^N$ を最長元 $w_0 \in W$ の簡約語とする. 部分集合 $\mathcal{S}_{\mathbf{i}} \subset P_+ \times \mathbb{Z}^N$ を

$$\mathcal{S}_{\mathbf{i}} := \{(\lambda, \mathbf{a}) \mid \lambda \in P_+, \mathbf{a} \in V_{\mathbf{i}}(\lambda)\}$$

と定義し, $\mathcal{C}_{\mathbf{i}} \subset P_{+, \mathbb{R}} \times \mathbb{R}^N$ を $\mathcal{S}_{\mathbf{i}}$ を含む最小の実閉錐とする. $\lambda \in P_+$ を固定し, 集合 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) \subset \mathbb{R}^N$ を

$$\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (\lambda, \mathbf{a}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{i}}\}$$

と定める. この集合 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ を **中島-Zelevinsky 多面体** という.

命題 2.4 ([6, Corollaries 2.18, 2.20, 4.3] 参照). $\mathbf{i} \in I^N$ を最長元 $w_0 \in W$ の簡約語とする.

- (1) 実閉錐 $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$ は有理凸多面錐であり, $\mathcal{C}_{\mathbf{i}} \cap (P_+ \times \mathbb{Z}^N) = \mathcal{S}_{\mathbf{i}}$ が成り立つ.
- (2) すべての $\lambda \in P_+$ に対して $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は有理凸多面体であり, $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) \cap \mathbb{Z}^N = V_{\mathbf{i}}(\lambda)$ が成り立つ.

命題 2.2, 2.4 より, 中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の格子点集合は結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の実現を与えている; これを結晶基底の多面体表示という.

注意 2.5. 組 $(\mathbf{i}, \lambda)$ についてのある条件の下で, [15, Theorem 4.1] において $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ を記述する線形不等式系を構成するアルゴリズムが与えられている.

例 2.6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ とし, $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ とする. このとき 中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\rho)$ は

$$\Delta_{\mathbf{i}}(\rho) = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq a_1 \leq 1, 0 \leq a_3 \leq 1, a_1 \leq a_2 \leq a_3 + 1\}$$

となる (図 1 参照).

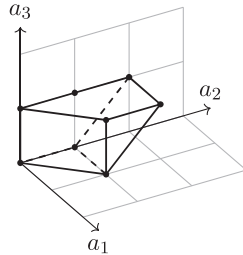


図 1: 中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\rho)$

例 2.7 ([9, Sect. III.B] 参照). $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$, $\lambda \in P_+$ とし,

$$\mathbf{i} = (n, n-1, \dots, 1, n, n-1, \dots, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \in I^{n^2}$$

とする. このとき 中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は以下の不等式を満たす

$$(a_n^{(n)}, a_n^{(n-1)}, \dots, a_n^{(1)}, \dots, a_1^{(n)}, a_1^{(n-1)}, \dots, a_1^{(1)}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n^2}$$

全体の集合と一致する:

$$\begin{aligned}
 a_1^{(i)} &\geq a_2^{(i-1)} \geq \cdots \geq a_i^{(1)} \quad (2 \leq i \leq n-1), \\
 2a_j^{(n)} &\geq a_{j+1}^{(n-1)} \geq \cdots \geq a_n^{(j)} \quad (1 \leq j \leq n-1), \\
 a_j^{(n-j+1)} &\geq a_j^{(n-j+2)} \geq \cdots \geq a_j^{(n-1)} \geq 2a_j^{(n)} \quad (2 \leq j \leq n), \\
 \lambda_i &\geq a_j^{(i-j+1)} - a_j^{(i-j)} \quad (1 \leq j \leq i \leq n-1), \\
 \lambda_n &\geq a_l^{(n)} - a_l^{(n-1)} + \sum_{1 \leq k \leq l-1} (a_{\mu_k+k-1}^{(n-\mu_k+1)} - a_{\mu_k+k-1}^{(n-\mu_k)}) \quad (l \geq 1, n \geq \mu_1 > \cdots > \mu_l = 1), \\
 \lambda_n &\geq -a_l^{(n)} + \sum_{1 \leq k \leq l} (a_{\mu_k+k-1}^{(n-\mu_k+1)} - a_{\mu_k+k-1}^{(n-\mu_k)}) \quad (l \geq 1, n \geq \mu_1 > \cdots > \mu_l > 1);
 \end{aligned}$$

ただし $i \in I$ に対して $\lambda_i := \langle \lambda, h_i \rangle$ である.

G を $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ となる $\mathbb{C}$ 上の連結単連結半単純代数群とする. $B \subset G$ をボレル部分群とし, 旗多様体 G/B を考える. $\lambda \in P_+$ に対して $L(\lambda)$ の最高ウェイトベクトル v_λ を取り, 次の射による $\mathcal{O}(1)$ の引き戻しを $\mathcal{L}_\lambda$ と書く:

$$G/B \rightarrow \mathbb{P}(L(\lambda)), \quad g \bmod B \mapsto [gv_\lambda].$$

有理凸多面錐 $P_{+, \mathbb{R}}$ の内部にある P_+ の元全体の集合を P_{++} とする. P_{++} の元を **regular 優整ウェイト** という. $\lambda \in P_{++}$ のとき直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ は非常に豊富であり, 有理凸多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の次元は N と一致する ([13, Corollary 3.2] 参照). このとき $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の面 F に対して, 集合

$$\sigma_F := \{f \in (\mathbb{R}^N)^* \mid f|_F \text{ は定数関数であり, その値は } f|_{\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)} \text{ の最小値と一致する} \}$$

は $(\mathbb{R}^N)^* \simeq \mathbb{R}^N$ 内の有理強凸多面錐である. また F が $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の面全体を動いたとき, σ_F たちのなす集合は $\mathbb{R}^N$ 内の扇を定める. これを $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の **normal fan** という. 対応する正規トーリック多様体を $X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))$ と書く. 部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ に対して, **Minkowski 和** $X + Y \subset \mathbb{R}^N$ を

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

と定義する. $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の定義および $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$ の凸性から次が示される.

命題 2.8. $\mathbf{i} \in I^N$ を最長元 $w_0 \in W$ の簡約語とし, すべての $\lambda, \mu \in P_+$ に対して $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda + \mu) = \Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) + \Delta_{\mathbf{i}}(\mu)$ であると仮定する. このとき $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の normal fan は $\lambda \in P_{++}$ の取り方に依らない. 特に正規トーリック多様体 $X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))$, $\lambda \in P_{++}$, はすべて一致する.

以下では $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ を Newton-Okounkov 凸体として実現した [6] の結果を用いて, $X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))$ の Gorenstein Fano 性について議論する.

定義 2.9 ([4, Sect. 8.3] 参照). 反標準因子類 $-K_{X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))}$ が豊富なカルティエ因子類のとき, 正規トーリック多様体 $X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))$ は **Gorenstein Fano** であるという.

定理 2.10 ([6, Corollary 4.2]). $\mathbf{i} \in I^N$ を最長元 $w_0 \in W$ の簡約語とし, $\lambda \in P_+$ とする. このとき $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は旗多様体 G/B のある付値に関する Newton-Okounkov 凸体と一致する.

Newton-Okounkov 凸体の理論は射影多様体のトーリック退化を構成する一般的な枠組みを与えており ([2, 8] 参照), 次が成り立つ.

系 2.11. 旗多様体 G/B は正規トーリック多様体 $X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))$ へ平坦に退化する.

Alexeev-Brion [1] は旗多様体 G/B の退化先として現れる正規トーリック多様体の Gorenstein Fano 性について考察している. この論文の議論を $X(\Delta_{\mathbf{i}}(2\rho))$ への退化に適用すると, 反標準層 $\mathcal{O}(-K_{X(\Delta_{\mathbf{i}}(2\rho))})$ は反標準束 $\mathcal{O}(-K_{G/B})$ の極限となっていることがわかる; ここで反標準束 $\mathcal{O}(-K_{G/B})$ は $\mathcal{L}_{2\rho}$ と同型であることに注意する ([3, Proposition 2.2.7 (ii)] 参照). 特に次が成り立つ.

系 2.12. $\mathbf{i} \in I^N$ を最長元 $w_0 \in W$ の簡約語とし, $\Delta_{\mathbf{i}}(2\rho)$ が格子多面体であると仮定する. このとき $\Delta_{\mathbf{i}}(2\rho)$ に対応する $X(\Delta_{\mathbf{i}}(2\rho))$ 上の豊富な直線束は反標準層 $\mathcal{O}(-K_{X(\Delta_{\mathbf{i}}(2\rho))})$ と一致する. 特に $X(\Delta_{\mathbf{i}}(2\rho))$ は Gorenstein Fano である.

3 多面体に対する差分商作用素

ここでは Kiritchenko [14] により導入された多面体に対する差分商作用素の定義を説明する. 最長元 $w_0 \in W$ の簡約語 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in I^N$ を固定し, 各 $i \in I$ に対して $i_k = i$ となる $1 \leq k \leq N$ の個数を d_i で表す. 次の同型によりユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ をユークリッド空間の直和 $\mathbb{R}^{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^{d_n}$ と同一視する:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^{d_n}, \\ (a_1, \dots, a_N) &\mapsto ((a_1^{(1)}, \dots, a_{d_1}^{(1)}), \dots, (a_1^{(n)}, \dots, a_{d_n}^{(n)})); \end{aligned}$$

ただし $i \in I$ に対して $(a_1^{(i)}, \dots, a_{d_i}^{(i)}) := (a_k)_{1 \leq k \leq N; i_k = i}$ である.

例 3.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ とし, $\mathbf{i} = (1, 2, 1, 3, 2, 1)$ とする. このとき $d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 1$ であり, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^6$ は次の同型により $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^1$ と同一視される:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^6 &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^1, \\ (a_1, \dots, a_6) &\mapsto ((a_1, a_3, a_6), (a_2, a_5), a_4). \end{aligned}$$

$i \in I$ および $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{d_i}), \nu = (\nu_1, \dots, \nu_{d_i}) \in \mathbb{R}^{d_i}$ に対して,

$$\Pi(\mu, \nu) := \{(a_1^{(i)}, \dots, a_{d_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d_i} \mid \text{すべての } 1 \leq k \leq d_i \text{ に対して } \mu_k \leq a_k^{(i)} \leq \nu_k\}$$

とおく.

定義 3.2 ([14, Definition 2] 参照). $Q \subset \mathbb{R}^N$ を凸多面体とする. すべての $i \in I$ および $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ に対して, ある $\mu, \nu \in \mathbb{R}^{d_i}$ が存在して

$$Q \cap (\mathbf{c} + \mathbb{R}^{d_i}) = \mathbf{c} + \Pi(\mu, \nu)$$

が成り立つとき, Q は **parapolytope** であるという.

例 3.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ とし, $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ とする. このとき $c_2 \in \mathbb{R}$ を固定し, $\mathbf{c} := (0, c_2, 0)$ とおくと,

$$\Delta_{\mathbf{i}}(\rho) \cap (\mathbf{c} + \mathbb{R}^{d_1}) = \begin{cases} \mathbf{c} + \Pi((0, 0), (c_2, 1)) & (0 \leq c_2 \leq 1 \text{ のとき}), \\ \mathbf{c} + \Pi((0, c_2 - 1), (1, 1)) & (1 \leq c_2 \leq 2 \text{ のとき}), \\ \emptyset & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

となる. 従って $\Delta_{\mathbf{i}}(\rho)$ は parapolytope である.

部分集合 $Q \subset \mathbb{R}^N$ に対して, $\mathbb{I}_Q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ をその特性関数とする; つまり

$$\mathbb{I}_Q(x) := \begin{cases} 1 & (x \in Q \text{ のとき}), \\ 0 & (x \notin Q \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. 各 $i \in I$ に対して, $\mathbb{R}$ -線形写像 $l_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$l_i(\mathbf{a}) := - \sum_{j \in I} \langle \alpha_j, h_i \rangle (a_1^{(j)} + \cdots + a_{d_j}^{(j)})$$

と定義する. また $1 \leq k \leq N$ に対して, $i_l = i_k$ となる $1 \leq l \leq k$ の個数を m_k と書く.

定義 3.4 ([14, Sect. 2.3] 参照). $i \in I$ とし, $i_k = i$ となる $1 \leq k \leq N$ を取る. $Q \subset \mathbb{R}^N$ を parapolytope とし, 座標関数 $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $(a_1, \dots, a_N) \mapsto a_k$, が Q 上で定数であると仮定する. このとき関数 $D_i^{(k)}(Q): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する. まず

$$Q_i(\mathbf{c}) := Q \cap (\mathbf{c} + \mathbb{R}^{d_i}) \neq \emptyset$$

となる $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ を固定し, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{d_i})$ および $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{d_i})$ を用いて $Q_i(\mathbf{c}) = \mathbf{c} + \Pi(\mu, \nu)$ と書く.

$$\nu'_{m_k} := \nu_{m_k} + l_i(\mathbf{c}) - \sum_{1 \leq l \leq d_i} (\mu_l + \nu_l)$$

とおき,

$$\begin{aligned} \mu' &:= (\mu_1, \dots, \mu_{m_k-1}, \nu'_{m_k}, \mu_{m_k+1}, \dots, \mu_{d_i}), \\ \nu' &:= (\nu_1, \dots, \nu_{m_k-1}, \nu'_{m_k}, \nu_{m_k+1}, \dots, \nu_{d_i}) \end{aligned}$$

とする. $\nu'_{m_k} \geq \nu_{m_k}$ であれば

$$D_i^{(k)}(Q)|_{\mathbf{c} + \mathbb{R}^{d_i}} := \mathbb{I}_{\mathbf{c} + \Pi(\mu, \nu')}$$

と定義し, $\nu'_{m_k} < \nu_{m_k}$ であれば

$$D_i^{(k)}(Q)|_{\mathbf{c} + \mathbb{R}^{d_i}} := -\mathbb{I}_{\mathbf{c} + \Pi(\mu', \nu)} + \mathbb{I}_{Q_i(\mathbf{c})} + \mathbb{I}_{\tilde{Q}_i(\mathbf{c})}$$

と定める; ただし $\tilde{Q}_i(\mathbf{c})$ は $Q_i(\mathbf{c})$ と平行な $\mathbf{c} + \Pi(\mu', \nu)$ の面である. この $D_i^{(k)}$ を多面体に対する差分商 (Demazure) 作用素という.

関数 $D_i^{(k)}(Q)$ がある部分集合 $Q' \subset \mathbb{R}^N$ の特性関数と一致するとき, $Q' = D_i^{(k)}(Q)$ とも書くことにする.

例 3.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ とし, $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ とする. このとき $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)})$ であり,

$$l_1(\mathbf{a}) = a_2 - 2a_1 - 2a_3, \quad l_2(\mathbf{a}) = a_1 + a_3 - 2a_2$$

となる. $a'_1 := a_2 - a_1 - 2a_3$ とし, $\mathbf{a}' := (a'_1, a_2, a_3)$ とおく. $a'_1 \geq a_1$ のとき

$$D_1^{(1)}\mathbf{a} = \mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\}}$$

であり, $a'_1 < a_1$ のとき

$$D_1^{(1)}\mathbf{a} = -\mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\}} + \mathbb{I}_{\mathbf{a}} + \mathbb{I}_{\mathbf{a}'}$$

である.

以下 $a'_1 \geq a_1$ を仮定する. $a'_2 := a_1 + a_3 - a_2$, $a''_2 := -a_1 - a_3$ とし, $\mathbf{b} := (a_1, a'_2, a_3)$, $\mathbf{b}' := (a'_1, a''_2, a_3)$ とおく. まず $a'_2 \geq a_2$ のとき,

$$D_2^{(2)} D_1^{(1)}(\mathbf{a}) = \mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'\}}$$

である (図 2 参照). 次に $a''_2 \geq a_2 > a'_2$ のとき, $\mathbf{b}'' := (2a_2 - a_3, a_2, a_3)$ とおくと,

$$D_2^{(2)} D_1^{(1)}(\mathbf{a}) = \mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{b}''\}} - \mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}''\}} + \mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}'\}} + \mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{b}, \mathbf{b}''\}} - \mathbb{I}_{\mathbf{b}''}$$

となる (図 3 参照). 最後に $a_2 > a''_2$ のとき,

$$D_2^{(2)} D_1^{(1)}(\mathbf{a}) = -\mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'\}} + \mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\}} + \mathbb{I}_{\text{Conv}\{\mathbf{b}, \mathbf{b}'\}}$$

である (図 4 参照).

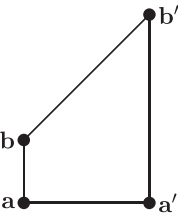


図 2: $D_2^{(2)} D_1^{(1)}(\mathbf{a})$ ($a'_1 \geq a_1$ かつ $a'_2 \geq a_2$ のとき)

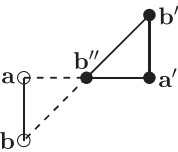


図 3: $D_2^{(2)} D_1^{(1)}(\mathbf{a})$ ($a'_1 \geq a_1$ かつ $a''_2 \geq a_2 > a'_2$ のとき)

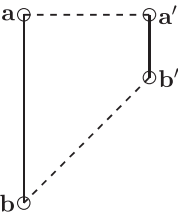


図 4: $D_2^{(2)} D_1^{(1)}(\mathbf{a})$ ($a'_1 \geq a_1$ かつ $a_2 > a''_2$ のとき)

例 3.6 ([14, Sect. 4.3] 参照). Grossberg-Karshon [7] は Bott-Samelson 多様体が複素構造の変形により Bott 多様体と呼ばれる非特異トーリック多様体へ退化することを証明し, その Duistermaat-Heckman 測度を twisted cube と呼ばれる組み合わせ論的对象として計算した. $D_i^{(k)}$ の定義において $\mathbf{c} + \mathbb{R}^{d_i}$ の代わりに

$$\mathbf{c} + \{(a_1^{(i)}, \dots, a_{d_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d_i} \mid \text{すべての } l \neq m_k \text{ に対して } a_l^{(i)} = 0\}$$

を用いることで, 多面体に対する差分商作用素 $\tilde{D}_i^{(k)}$ を新しく定義する. このとき上記の twisted cube はある 1 点に $\tilde{D}_i^{(k)}$ を作用させていくことで構成できる.

本稿の主結果では 中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ をある $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^N$ に対する $D_{i_N}^{(N)} \dots D_{i_1}^{(1)}(\mathbf{a})$ と関連付ける. 次の例が示すように $D_{i_N}^{(N)} \dots D_{i_1}^{(1)}(\mathbf{a})$ は常に定義されるとは限らない.

例 3.7. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ とし, $\mathbf{i} = (2, 1, 2, 3, 2, 1)$ とする. このとき

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (a_1^{(2)}, a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_3^{(2)}, a_2^{(1)})$$

であり,

$$\begin{aligned} l_1(\mathbf{a}) &= a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + a_3^{(2)} - 2a_1^{(1)} - 2a_2^{(1)}, \\ l_2(\mathbf{a}) &= a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_1^{(3)} - 2a_1^{(2)} - 2a_2^{(2)} - 2a_3^{(2)}, \\ l_3(\mathbf{a}) &= a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + a_3^{(2)} - 2a_1^{(3)} \end{aligned}$$

となる.

$$\mathbf{a}_{\text{low}} := -\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}\right) \in \mathbb{R}^6$$

とおくと, 関数 $D_3^{(4)} D_2^{(3)} D_1^{(2)} D_2^{(1)}(\mathbf{a}_{\text{low}})$ は well-defined であり, 以下で定義される凸多面体 $Q_{\leq 4} \subset \mathbb{R}^6$ の特性関数と一致する:

$$\begin{aligned} (a_2^{(1)}, a_3^{(2)}) &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{4}{3}\right), \quad -\frac{1}{3} \leq a_1^{(2)} \leq \frac{2}{3}, \quad -\frac{5}{4} \leq a_1^{(1)} \leq a_1^{(2)} + \frac{1}{12}, \\ -\frac{1}{3} \leq a_2^{(2)} &\leq \min\left\{a_1^{(1)} + \frac{11}{12}, \frac{2}{3}\right\}, \quad -\frac{3}{2} \leq a_1^{(3)} \leq a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

この凸多面体 $Q_{\leq 4}$ は parapolytope ではない. 実際

$$\mathbf{c} := \left(0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}\right) \in \mathbb{R}^6$$

とすると, $Q_{\leq 4} \cap (\mathbf{c} + \mathbb{R}^{d_2})$ は以下を満たす $(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}) \in \mathbb{R}^{d_2}$ 全体の集合と同一視される:

$$-\frac{1}{3} \leq a_1^{(2)} \leq \frac{2}{3}, \quad -a_1^{(2)} + \frac{1}{3} \leq a_2^{(2)} \leq \frac{2}{3}, \quad a_3^{(2)} = -\frac{4}{3};$$

これは三角形であり, $\Pi(\mu, \nu)$ の形には書けない. 以上より関数 $D_2^{(5)} D_3^{(4)} D_2^{(3)} D_1^{(2)} D_2^{(1)}(\mathbf{a}_{\text{low}})$ は well-defined ではない.

4 主結果

$\lambda \in P_+$ および $i \in I$ に対して, $\hat{\lambda}_i \in \mathbb{Q}$ を

$$\lambda = \sum_{j \in I} d_j \hat{\lambda}_j \alpha_j$$

により定義する. $G_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の頂点の中で成分の和が最も大きいものを $\mathbf{x}_\lambda \in \mathbb{Z}^N$ とし,

$$\mathbf{a}_\lambda := -\mathbf{x}_\lambda + (\hat{\lambda}_{i_1}, \dots, \hat{\lambda}_{i_N})$$

とおく.

例 4.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ とし, $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ とする. このとき $\rho = \alpha_1 + \alpha_2$ であり, $\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2}$ および $\hat{\rho}_2 = 1$ が成り立つ. また $\mathbf{x}_\rho = (1, 2, 1)$ であり,

$$\mathbf{a}_\rho = -(1, 2, 1) + \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

となる.

次が本稿の一つ目の主結果である.

定理 4.2. $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in I^N$ を最長元 $w_0 \in W$ の簡約語とし, $\lambda \in P_+$ とする. さらに 中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ が parapolytope であると仮定する.

- (1) 関数 $D_{i_N}^{(N)} \cdots D_{i_1}^{(1)}(\mathbf{a}_\lambda)$ は well-defined であり, ある凸多面体の特性関数と一致する.
- (2) $D_{i_N}^{(N)} \cdots D_{i_1}^{(1)}(\mathbf{a}_\lambda) = -\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) + (\hat{\lambda}_{i_1}, \dots, \hat{\lambda}_{i_N})$.
- (3) $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は格子多面体である.

例 4.3 ([9, 15] 参照). $\mathfrak{g}$ および $\mathbf{i}$ を以下のように取る:

- (i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$,

$$\mathbf{i} = (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \in I^{\frac{n(n+1)}{2}};$$

- (ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ または $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$,

$$\mathbf{i} = (n, n-1, \dots, 1, n, n-1, \dots, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \in I^{n^2};$$

- (iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$,

$$\mathbf{i} = (n, n-1, \dots, 1, n, n-1, \dots, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \in I^{n(n-1)};$$

- (iv) $\mathfrak{g}$ を G_2 型の単純リー代数とし, $\mathbf{i} = (1, 2, 1, 2, 1, 2)$ または $\mathbf{i} = (2, 1, 2, 1, 2, 1)$ とする.

このときすべての $\lambda \in P_+$ に対して, 中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は parapolytope である.

次が本稿の二つ目の主結果である.

定理 4.4. $\mathbf{i} \in I^N$ を最長元 $w_0 \in W$ の簡約語とし, $\lambda, \mu \in P_+$ とする. さらに $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda), \Delta_{\mathbf{i}}(\mu), \Delta_{\mathbf{i}}(\lambda + \mu)$ がすべて parapolytope であると仮定する. このとき

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda + \mu) &= \Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) + \Delta_{\mathbf{i}}(\mu) \text{ および} \\ V_{\mathbf{i}}(\lambda + \mu) &= V_{\mathbf{i}}(\lambda) + V_{\mathbf{i}}(\mu)\end{aligned}$$

が成り立つ.

命題 2.8, 系 2.12, 定理 4.2, 4.4, および例 4.3 を合わせることで次が示される.

系 4.5. $\mathfrak{g}$ および $\mathbf{i}$ を例 4.3 のように取る. このとき正規トーリック多様体 $X(\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda))$ は $\lambda \in P_{++}$ の取り方に依らない. さらに Gorenstein Fano である.

参考文献

- [1] V. Alexeev and M. Brion, Toric degenerations of spherical varieties, *Selecta Math.* (N.S.) **10** (2004), 453–478.
- [2] D. Anderson, Okounkov bodies and toric degenerations, *Math. Ann.* **356** (2013), 1183–1202.
- [3] M. Brion, Lectures on the geometry of flag varieties, in *Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2005, 33–85.
- [4] D. Cox, J. Little, and H. Schenck, *Toric Varieties*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 124, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [5] N. Fujita, Polyhedral realizations of crystal bases and convex-geometric Demazure operators, preprint 2018, arXiv:1810.12480v1.
- [6] N. Fujita and S. Naito, Newton-Okounkov convex bodies of Schubert varieties and polyhedral realizations of crystal bases, *Math. Z.* **285** (2017), 325–352.
- [7] M. Grossberg and Y. Karshon, Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations, *Duke Math. J.* **76** (1994), 23–58.
- [8] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, *Invent. Math.* **202** (2015), 927–985.
- [9] A. Hoshino, Polyhedral realizations of crystal bases for quantum algebras of finite types, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 113514.
- [10] M. Kashiwara, On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991), 465–516.
- [11] M. Kashiwara, The crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula, *Duke Math. J.* **71** (1993), 839–858.
- [12] M. Kashiwara, On crystal bases, in *Representations of Groups (Banff, AB, 1994)*, CMS Conf. Proc. Vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 155–197.
- [13] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, *Ann. of Math.* **176** (2012), 925–978.
- [14] V. Kiritchenko, Divided difference operators on convex polytopes, in *Schubert Calculus—Osaka 2012*, Adv. Stud. Pure Math. Vol. 71, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016, 161–184.
- [15] T. Nakashima, Polyhedral realizations of crystal bases for integrable highest weight modules, *J. Algebra* **219** (1999), 571–597.
- [16] T. Nakashima and A. Zelevinsky, Polyhedral realizations of crystal bases for quantized Kac-Moody algebras, *Adv. Math.* **131** (1997), 253–278.