

例外型エルミート対称空間のシンプレクティック構造

信州大学大学院 工学系研究科 数理・自然情報科学 小泉 喜章 (Yoshiaki Koizumi)
Department of Mathematical Sciences Division of science and Technology,
Shinshu University

・シンプレクティック構造に関連した定義

Def 1.1

可微分多様体 M 上のシンプレクティック構造とは
非退化で閉 2 次微分形式 $\omega \in \Omega^2(M)$ のことである。

Def 1.2

$\psi \in \text{Diff}(M) := \{f : M \rightarrow M, \text{微分同相}\}$ とする。
 ψ がシンプレクティック微分同相
 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \psi$ がシンプレクティック形式を保存する。i.e. $\psi^*\omega = \omega$
 M 上のシンプレクティック微分同相の集合を $\text{Symp}(M)$ と表す。

Def 1.3

G : コンパクトリー群, (M, ω) : シンプレクティック多様体 とし,
 $\psi : G \times M \rightarrow M$, 可微分作用とする。
 $g \cdot x := \psi_g(x)$ とする。
 ψ : シンプレクティック作用 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall g \in G$ に対し、 $\psi_g \in \text{Symp}(M)$

Def 1.4

X : M 上のベクトル場 とする。
 $i(X)\omega = dH$ を満たすような $H \in C^\infty(M)$ が存在するとき、
 X をハミルトンベクトル場と言う。
ここで、 $i(X)\omega(Y) := \omega(X, Y)$ とする。
また、関数 H をハミルトン関数と言う。

Def 1.5

$\mathfrak{g}$ をリー群 G のリー環とし、 ψ : シンプレクティック作用 とする。

$\xi \in \mathfrak{g}$ に対する (M, ω) 上の *fundamental* ベクトル場 X_ξ を

$(X_\xi)_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot x \quad (x \in M)$ と定義する。

Def 1.6

リー群 G の M への作用が弱ハミルトン作用

$\Leftrightarrow$ 各ベクトル場 X_ξ がハミルトンベクトル場
def

Def 1.7

G の作用は弱ハミルトン作用とする。

M 上の G の作用がハミルトン作用

$\Leftrightarrow$ 写像 $H : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M) ; \zeta \mapsto H_\zeta$
def

が $\mathfrak{g}$ 上の *Lie* 環構造と $C^\infty(M)$ 上の *Poisson* 構造に関して、*Lie* 環準同型である。

i.e. $\zeta, \eta \in \mathfrak{g}$ に対して、 $\{H_\zeta, H_\eta\} = H_{[\zeta, \eta]}$ を満たす。

ここで、 $\{H_\zeta, H_\eta\}$ は、 $\{H_\zeta, H_\eta\} := \omega(X_\zeta, X_\eta)$ と定義し、 $\{ , \}$ を *Poissonbracket* と呼ぶ。

Def 1.8

シンプレクティック多様体 M 上のリー群 G の作用はハミルトン作用とする。

各 $p \in M$ に対し、 $(\mu(p))(\xi) := H_\xi(p)$ と定義された

$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を運動量写像と呼ぶ。

・コンパクト既約エルミート対称空間について

コンパクト既約エルミート対称空間は

古典型は $U(m, n)/U(m) \times U(n)$,

$SO(2n)/U(n)$,

$Sp(n)/U(n)$,

$SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$

例外型は $E_6/U(1) \times_{\mathbb{Z}_4} Spin(10)$,

$E_7/U(1) \times_{\mathbb{Z}_3} E_6$

である。

ここでは例外型エルミート対称空間 $E_7/U(1) \times_{\mathbb{Z}_3} E_6$ のシンプレクティック構造について調べる。

・例外型エルミート対称空間に関する定義

Def 2.1

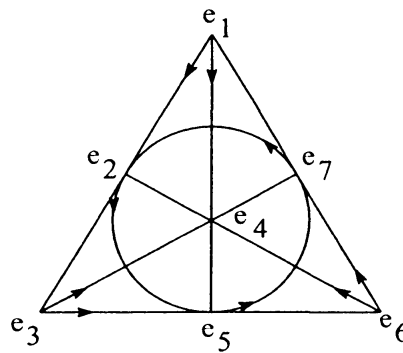
$e_0 (= 1), e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ を生成元とする $\mathbf{R}$ - 加群を $\mathfrak{C}$ とする。

また、 $x, y \in \mathfrak{C}$ の積 xy を次のように定める。

$$x = \sum_{i=0}^7 x_i e_i, \quad y = \sum_{j=0}^7 y_j e_j \quad \text{とすると、} \quad xy := \sum_{i,j} (x_i y_j) e_i e_j$$

ここで、 $\sum_{i,j}$ は i と j に関する全ての組み合わせ (64 通り) について足すことを意味する。

また、生成元同士の積は次の図で定義する。



この図は、積 $e_i e_j$ を矢印の方向での次の生成元 e_k と定義しているものとする。 ($i \neq j \neq k \neq i$)

例えば、 $e_6 e_7$ は矢印の方向での次の生成元は e_1 なので、 $e_6 e_7 = e_1$ ということになります。

また、 $e_4 e_2$ 等については、矢印の方向での次の生成元は一周してきて、 e_6 となり、

$e_4 e_2 = e_6$ になります。

$$\text{さらに } e_i^2 = \begin{cases} 1 & (\text{if } i = 0) \\ -1 & (\text{if } i \neq 0) \end{cases}, \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq 0, j \neq 0, i \neq j)$$

とすると全ての生成元同士の積を定義することができる。

この集合 $\mathfrak{C}$ を Cayley 数 (八元数) と呼ぶ。

Def 2.2

$\mathfrak{C}$ の元 $a = \alpha_0 + \sum_{i=1}^7 \alpha_i e_i$, $b = \sum_{i=0}^7 \beta_i e_i$ に対し、

$$a \text{ の共役を } \bar{a} := \alpha_0 - \sum_{i=1}^7 \alpha_i e_i \quad a, b \text{ の内積を } (a, b) := \sum_{i=0}^7 \alpha_i \beta_i \in \mathbf{R}$$

a の絶対値を $|a| := \sqrt{(a, a)} \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ で定義する。

Def 2.3

$\mathbb{C}$ の元を成分に持つ 3 次の行列全体の集合を $M_3(\mathbb{C})$ とし、

$\mathfrak{J} := \{X \in M_3(\mathbb{C}) \mid X^* = X\}$ とする。

$$\mathfrak{J} \text{ の元 } X \text{ は } X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\xi_i \in \mathbf{R}, x_i \in \mathbb{C})$$

の形をしている。 $\mathfrak{J}$ は 27 次元 $\mathbf{R}$ 上ベクトル空間となる。

Def 2.4

$\mathfrak{J}$ の元を複素化した集合を $\mathfrak{J}^c$ と書く。

$$X \in \mathfrak{J}^c \text{ は } X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \lambda_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \in \mathbf{C}, x_i \in \mathbb{C}^c)$$

の形をしている。 $\mathfrak{J}^c$ は 27 次元 $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間となる。

Def 2.5

$X, Y \in \mathfrak{J}^c$ に対し、Jordan 積 $X \circ Y$ を $X \circ Y := \frac{1}{2}(XY + YX) \in \mathfrak{J}^c$ で定義する。

ここで、 XY は行列の積とする。

trace を $tr(X) := \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, 内積を $(X, Y) := tr(X \circ Y)$,

複素内積を $\langle X, Y \rangle := (\tau X, Y)$ と定義する。

ここで、 τX は X の各要素の複素化した部分の共役をとったものとする。

さらに、 $\mathfrak{J}^c$ に Freudenthal 積 $X \times Y$ を

$X \times Y := \frac{1}{2}(2X \circ Y - tr(X)Y - tr(Y)X + (tr(X)tr(Y) - (X, Y))E) \in \mathfrak{J}^c$ で定義し、
3 項式 $(X, Y, Z) := (X, Y \times Z) \in \mathbf{C}$ 行列式 $det X := \frac{1}{3}(X, X, X)$ と定義する。

Def 2.6

$E_6 := \{\alpha \in Iso_c(\mathfrak{J}^c) \mid det(\alpha X) = det(X), \langle \alpha X, \alpha Y \rangle = \langle X, Y \rangle\}$

ここで、 $Iso_c(\mathfrak{J}^c) = \{f: \mathfrak{J}^c \rightarrow \mathfrak{J}^c \mid f \text{ は線形同型}\}$

E_6 は E_6 型リー一群である。

$e_6 := \{\phi \in Hom_c(\mathfrak{J}^c) \mid det \phi X = 0, \langle \phi X, Y \rangle + \langle X, \phi Y \rangle = 0\}$

ここで、 $Hom_c(\mathfrak{J}^c) = \{f: \mathfrak{J}^c \rightarrow \mathfrak{J}^c \mid \text{線形}\}$

e_6 はリー一群 E_6 のリー環である。

Prop 2.7

例外型エルミート対称空間 $E_6/U(1) \times_{\mathbf{Z}_4} Spin(10)$ は

$\{X \in \mathfrak{J}^c \mid X \times X = 0, X \neq 0\}/C^*$ と微分同相である。(参考文献 [1] より)

Def 2.8

56 次元 $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間 $\mathfrak{P}^c$ を $\mathfrak{P}^c := \mathfrak{J}^c \oplus \mathfrak{J}^c \oplus \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ と定義する。

$(X, Y, \xi, \eta) \in \mathfrak{P}^c$ と表す。

Def 2.9

$P = (X, Y, \xi, \eta), Q = (Z, W, \zeta, \omega) \in \mathfrak{P}^c$ とする。

対称内積 (P, Q) , 複素内積 $\langle P, Q \rangle$, 交代内積 $[P, Q] \in \mathbf{C}$ をそれぞれ

$$(P, Q) := (X, Z) + (Y, W) + \xi\zeta + \eta\omega, \quad \langle P, Q \rangle := \langle X, Z \rangle + \langle Y, W \rangle + \bar{\xi}\zeta + \bar{\eta}\omega,$$

$$[P, Q] := (X, W) - (Z, Y) + \xi\omega - \zeta\eta \quad \text{と定義する。}$$

Def 2.10

$\varphi \in \mathfrak{e}_6^c, A, B \in \mathfrak{J}^c, \nu \in \mathbf{C}$ に対し、 $\Phi(\varphi, A, B, \nu) : \mathfrak{P}^c \rightarrow \mathfrak{P}^c$ を

$$\Phi(\varphi, A, B, \nu) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi X - \frac{1}{3}\nu X + 2B \times Y + \eta A \\ 2A \times X - {}^t\varphi Y + \frac{1}{3}\nu Y + \xi B \\ (A, Y) + \nu\xi \\ (B, X) - \nu\eta \end{pmatrix}$$

と定義する。ここで、 ${}^t\varphi$ は $(\varphi X, Y) = (X, {}^t\varphi Y)$ ($\forall X, Y \in \mathfrak{J}^c$) を満たす写像とする。

Def 2.11

$X, Y \in \mathfrak{J}^c$ に対し、 $X \vee Y := [\tilde{X}, \tilde{Y}] + (X \circ Y - \frac{1}{3}(X, Y)E)^\sim \in \mathfrak{e}_6^c$ とする。

ここで、 $\tilde{X} : \mathfrak{J}^c \rightarrow \mathfrak{J}^c; Y \mapsto X \circ Y$ とする。

Def 2.12

$P, Q \in \mathfrak{P}^c$ に対し、 $P \times Q : \mathfrak{P}^c \rightarrow \mathfrak{P}^c$ を

$$P \times Q := \Phi(\varphi, A, B, \nu), \quad \begin{cases} \varphi = -\frac{1}{2}(X \vee W + Z \vee Y) \\ A = -\frac{1}{4}(2Y \times W - \xi Z - \zeta X) \\ B = \frac{1}{4}(2X \times Z - \eta W - \omega Y) \\ \nu = \frac{1}{8}((X, W) + (Z, Y) - 3(\xi\omega + \zeta\eta)) \end{cases} \quad \text{と定義する。}$$

Def 2.13

$\mathfrak{M}^c := \{P \in \mathfrak{P}^c \mid P \times P = 0, P \neq 0\}$

$$= \{P = (X, Y, \xi, \eta) \in \mathfrak{P}^c \mid P \neq 0, X \vee Y = 0, X \times X = \eta Y, Y \times Y = \xi X, (X, Y) = 3\xi\eta\}$$

と定義し、 $\mathfrak{M}^c$ を *Freudenthal* 複素多様体と呼ぶ。

$\mathfrak{M}_1 := \{P \in \mathfrak{M}^c \mid \langle P, P \rangle = 1\}$ と定義する。

Def 2.14

$$E_7^c := \{\alpha \in Iso_c(\mathfrak{P}^c) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q\}$$

$$E_7 := \{\alpha \in Iso_c(\mathfrak{P}^c) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q, \langle \alpha P, \alpha Q \rangle = \langle P, Q \rangle\}$$

と定義する。 E_7, E_7^c はリー群である。

リー群 E_7^c のリー環 $\mathfrak{e}_7^c$ は、 $\mathfrak{e}_7^c = \{\Phi(\varphi, A, B, \nu) \in \text{Hom}_c(\mathfrak{P}^c) \mid \varphi \in \mathfrak{e}_6^c, A, B \in \mathfrak{J}^c, \nu \in \mathbb{C}\}$ である。

リー群 E_7 のリー環 $\mathfrak{e}_7$ は、 $\mathfrak{e}_7 = \{\Phi(\varphi, A, -\tau A, \nu) \in \text{Hom}_c(\mathfrak{P}^c) \mid \varphi \in \mathfrak{e}_6^c, A \in \mathfrak{J}^c, \nu \in i\mathbb{R}\}$ である。

Prop 2.15

例外型エルミート対称空間 $E_7/U(1) \times_{\mathbb{Z}_3} E_6$ は

$\mathfrak{M}^c/C^*$ と微分同相である。(参考文献 [1] より)

Def 2.16

$\mathfrak{P}^c$ に同値関係 “ $\sim$ ” を入れる。

$P, Q \in \mathfrak{P}^c$ に対し、 $P \sim Q \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \theta \in \mathbb{C}^* \text{ s.t. } |\theta| = 1, \theta P = Q$ と定義する。

この同値関係による $\mathfrak{M}_1$ の商集合を $\mathfrak{M}_1/\sim := \{ \{\theta P \mid \theta \in \mathbb{C}, |\theta| = 1\} \mid P \in \mathfrak{M}_1 \}$ とする。

$\mathfrak{M}_1/U(1) := \mathfrak{M}_1/\sim = \mathfrak{M}^c/C^*$ である。

・例外型エルミート対称空間 $E_7/U(1) \times_{\mathbb{Z}_3} E_6$ の シンプレクティック構造について

$\mathfrak{M}_1/U(1) \simeq E_7/U(1) \times_{\mathbb{Z}_3} E_6$ なので、

$E_7/U(1) \times_{\mathbb{Z}_3} E_6$ のシンプレクティック構造を $\mathfrak{M}_1/U(1)$ のシンプレクティック構造で定義する。

Lemma 3.1

$P \in \mathfrak{M}_1$ とする。

$H_P := \{Q \in T_P(\mathfrak{M}_1) \mid \langle Q, P \rangle = 0\}$ とする。 $H_P \simeq T_{[P]}(\mathfrak{M}_1/U(1))$ である。

Def 3.2

$P \in \mathfrak{M}_1, Q_i \in T_{[P]}(\mathfrak{M}_1/U(1)), \pi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_1/U(1), (d\pi)_P(R_i) = Q_i, R_i \in T_P(\mathfrak{M}_1)$ とする。

$T_{[P]}(\mathfrak{M}_1/U(1))$ の内積を $\langle\langle Q_1, Q_2 \rangle\rangle := \langle R_1, R_2 \rangle - \langle R_1, P \rangle \langle P, R_2 \rangle$ と定義する。

Def 3.3

$\mathfrak{M}_1/U(1)$ への作用は E_7 とする。

i.e. $\Lambda: E_7 \times \mathfrak{M}_1/U(1) \rightarrow \mathfrak{M}_1/U(1); (\alpha, [P]) \mapsto [\alpha P]$

Def 3.4

$\omega_{[P]}(Q_1, Q_2) := 2\text{Im} \langle\langle Q_1, Q_2 \rangle\rangle$ と定義すると、 ω は symplectic 形式になる。

Prop 3.5

上の symplectic form ω に対し、 E_7 の作用 Λ は symplectic 微分同相である。

Lemma 3.6

$\phi \in \mathfrak{e}_7$ とする。 ϕ に対する *fundamental vector field* $(X_\phi)_{[P]}$ は $(X_\phi)_{[P]} = (d\pi)_P(\phi \cdot P)$

Def 3.7

$H_\phi : \mathfrak{M}_1/U(1) \rightarrow \mathbf{R} ; H_\phi([P]) = \frac{1}{i} \langle \phi P, P \rangle$ とする。

上のように、 H_ϕ を定義すると、 $dH_\phi = i(X_\phi) \omega$ を満たすので $\mathfrak{M}_1/U(1)$ への E_7 の作用は弱ハミルトン作用である。

また、 $\{H_\phi, H_{\phi'}\} = H_{[\phi, \phi']}$ も満たすので、
 $\mathfrak{M}_1/U(1)$ への E_7 の作用はハミルトン作用である。

Theorem 3.8

以上より、運動量写像 $\mu : \mathfrak{M}_1/U(1) \rightarrow \mathfrak{e}_7^*$ は $\mu([P])(\phi) = \frac{1}{i} \langle \phi \cdot P, P \rangle$

参考文献

- [1] K. ABE and I. YOKOTA: Realization of spaces $E_6/(U(1)Spin(10))$, $E_7/(U(1)E_6)$, $E_8/(U(1)E_7)$ and their volumes, Tokyo J. Math. 20 (1997), 73-86
- [2] 横田一郎: 例外型単純リー群, 現代数学社
- [3] A.Banyaga: The Structure of Classical Diffeomorphism Groups, Kluwer Acad.Publ., (1997)
- [4] A.Michèle : The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds , Birkhäuser ,(1991)
- [5] D.McDuff and D.Salamon: Introduction to Symplectic Topology , Oxford ,(1995)
- [6] P.Libermann and C.M.Marle: Symplectic Geometry and Analytical Mechanics , D.Reidel Publishing Compani , (1987)
- [7] V.I.Arnold: Mathematical methods of classical mechanics , Springer-Verlag, 60, (1989)
- [8] N.J.Wildberger: The moment map of a Lie group representations, T.A.M.S., 330, (1992)
- [9] 横田一郎: 群と表現, 裳華房, (1973)