

多面錐上での線形計画問題に対する内点法

小崎敏寛 (Toshihiro Kosaki)*
ステラリンク株式会社 (Stera Link, Co.,Ltd.)

概要

この論文では多面錐上での線形計画問題を考える。この問題は標準形の線形計画問題の一般化になっている。多面錐は 2 通りの表現がある。それぞれに対して多面錐上での線形計画問題を考える。その問題を再定式化し、主双対内点法を適用する。

1 はじめに

標準形の線形計画問題は線形等式制約と非負制約の下で線形関数を最小化する問題である。非負制約 $x \geq 0$ は、閉凸錐 $\mathcal{K}^0 := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ を使って、

$$x \in \mathcal{K}^0 \quad (1)$$

と記述される。線形計画問題を一般化することを考える。 $D \in \mathbb{R}^{s \times n}$ と $E \in \mathbb{R}^{t \times n}$ に対して、多面錐 [10]

$$\mathcal{K} := \{v \in \mathbb{R}^n : Dv \geq 0, Ev = 0\} \quad (2)$$

と双対錐 [2, 3]

$$\mathcal{K}^* := \{u \in \mathbb{R}^n : u = D^T \lambda_1 + E^T \lambda_2, \lambda_1 \geq 0, \lambda_1 \in \mathbb{R}^s, \lambda_2 \in \mathbb{R}^t\} \quad (3)$$

を導入する。次の錐として $\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}^*$ を考える二つの問題

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathcal{K} \\ & \text{または} \\ & x \in \mathcal{K}^*. \end{aligned} \quad (\text{P0})$$

を考える。この問題 (P0) に対して主双対内点法 [6, 11] を適用する。多面錐上の最適化問題として nearest point problem [8] がある。

2 節では錐の性質について解説する。3 節では、閉凸錐 $\mathcal{K}$ の場合の問題 (P0) の解法を述べる。4 節では、閉凸錐 $\mathcal{K}^*$ の場合の問題 (P0) の解法を述べる。5 節では、結論と今後の課題を述べる。

*toshihirokosaki@gmail.com

2 錐の性質

多面錐 $\mathcal{K} := \{v \in \mathbb{R}^n : Dv \geq 0, Ev = 0\}$ に対して, 双対錐 $\mathcal{K}^* := \{u \in \mathbb{R}^n : u^T v \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}\}$ を考える. この双対錐 $\mathcal{K}^*$ は次のように表現できる:

$$\mathcal{K}^* = \{u \in \mathbb{R}^n : u = D^T \lambda_1 + E^T \lambda_2, \lambda_1 \geq 0, \lambda_1 \in \mathbb{R}^s, \lambda_2 \in \mathbb{R}^t\}. \quad (4)$$

$D = I$ (単位行列) と $E = O$ とすると $\mathcal{K}$ は非負空間になっている. 同様に $D = I$ と $E = O$ とすると $\mathcal{K}^*$ も非負空間になっている. このことから問題 (P0) は線形計画問題の一般化になっていることが分かる. 閉凸錐の表現には 2 通りの方法がある [5, 10].

1. edge representation : 錐をベクトルの非負結合等として表現 例: $\mathcal{K}^*$ の表現

2. face representation : 錐を半空間の交わりとして表現 例: $\mathcal{K}$ の表現

錐については [4] が詳しい.

3 閉凸錐 $\mathcal{K}$ の場合

次の最適化問題を考える.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : Dx \geq 0, Ex = 0\}. \end{aligned} \quad (\text{cone(P)})$$

ただし変数を $x \in \mathbb{R}^n$, 定数を $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ と $c \in \mathbb{R}^n$ とする. 多面錐 $\mathcal{K}$ を具体的に記述すると, この問題は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & Ex = 0 \\ & Dx \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

変数 $t = Dx$ を導入し, 自由変数 x を非負変数の差 $x^+ - x^-$ で表すと,

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x^+ - c^T x^- \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A & -A & O \\ E & -E & O \\ D & -D & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & (x^+, x^-, t) \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

この問題は標準形の線形計画問題であるので, 双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y_1 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A^T & E^T & D^T \\ -A^T & -E^T & -D^T \\ O & O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \\ & (z_1, z_2, z_3) \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & b^T y \\
 \text{s.t.} \quad & A^T y + z = c \\
 & z = E^T y_2 + D^T y_3 \\
 & y_3 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

ただし, y_1 を y とした. 錐を使って表現すると,

$$\begin{aligned}
 \max \quad & b^T y \\
 \text{s.t.} \quad & A^T y + z = c \\
 & z \in \mathcal{K}^* \\
 & \mathcal{K}^* = \{z : z = E^T y_2 + D^T y_3, y_3 \geq 0\}.
 \end{aligned} \tag{Cone(D)}$$

3.1 弱双対定理

定理 1 弱双対定理. 問題 (Cone(P)) と (Cone(D)) の制約をみたす点 x と (y, z) における目的関数値をそれぞれ $v(P)$ と $v(D)$ とする. このとき次の関係がなりたつ.

$$v(P) \geq v(D). \tag{9}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
 & v(P) - v(D) \\
 &= c^T x^+ - c^T x^- - b^T y \\
 &= \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^T & E^T & D^T \\ -A^T & -E^T & -D^T \\ O & O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ t \end{pmatrix} \\
 &\quad - \left(\begin{pmatrix} A & -A & O \\ E & -E & O \\ D & -D & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ t \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
 &\geq 0. (\because \text{ベクトルの非負性})
 \end{aligned}$$

■

系 1 $v(P) = v(D)$ ならば, x と (y, z) はそれぞれ cone(P) と cone(D) の最適解である.

3.2 双対定理

定理 2 分離定理 [9]. C を凸集合, y を C の閉包の外点とする. このとき

$$a^T y < \inf_{x \in C} a^T x \tag{10}$$

をみたすベクトル a が存在する。¹

定理 3 (cone-P) が最適解をもつならば、双対問題 (cone-D) も最適解を持ち、その最適値は等しい。

(証明) この証明は [7, 9] を参考にしている。 w^* を (cone-P) の最適値とする。 $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$C := \{(r, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : r = tw^* - c^T x, u = tb - Ax, t \geq 0, Ex = 0, Dx \geq 0\} \quad (11)$$

を考える。この集合 C は原点を含むので、空でない閉凸錐である。

$(1, 0) \in C$ と仮定すると w^* が (cone-P) の最適値であることに矛盾する。したがって $(1, 0) \notin C$ 。

分離定理より、

$$(\alpha, d^T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} < \inf \left\{ (\alpha, d^T) \begin{pmatrix} r \\ u \end{pmatrix}, (r, u) \in C \right\} \quad (12)$$

がなりたつ。右辺の値を β とする。すると $\beta = 0$ である。一般性を失うことなく、 $\alpha = -1$ と仮定できる。このとき、任意の $(r, u) \in C$ に対して、

$$0 \leq -r + d^T u \quad (13)$$

が成立する。 C の定義より、任意の $t \geq 0$ と $x : Dx \geq 0, Ex = 0$ に対して、

$$\begin{aligned} 0 &\leq -(tw^* - c^T x) + d^T (tb - Ax) \\ &= t(b^T d - w^*) + (c - A^T d)^T x \end{aligned}$$

がなりたつ。したがって

$$b^T d - w^* \geq 0 \quad (14)$$

がなりたち、双対錐を考えることで、 $\lambda_1 \geq 0$ として、

$$c - A^T d = D^T \lambda_1 + E^T \lambda_2 \quad (15)$$

と書ける。これは、 d が双対問題の実行可能解であり、目的関数値が w^* 以上であることを意味する。弱双対定理より w^* が双対問題の最適値であり、 d が双対問題の最適解である。

■

¹分離の双対の概念である射影を使って表現することもできる (Projection Theorem[1])。

3.3 最適条件

最適条件は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} A & -A & O \\ E & -E & O \\ D & -D & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} A^T & E^T & D^T \\ -A^T & -E^T & -D^T \\ O & O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 & x_i^+ z_{1,i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & x_i^- z_{2,i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & t_i z_{3,i} = 0, \quad i = 1, \dots, s, \\
 & (x^+, x^-, t) \geq 0, \\
 & (z_1, z_2, z_3) \geq 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

3.4 解析的センター

パラメータ $\mu > 0$ の解析的センターは次の等式不等式系をみたす点である.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} A & -A & O \\ E & -E & O \\ D & -D & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} A^T & E^T & D^T \\ -A^T & -E^T & -D^T \\ O & O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 & x_i^+ z_{1,i} = \mu, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & x_i^- z_{2,i} = \mu, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & t_i z_{3,i} = \mu, \quad i = 1, \dots, s, \\
 & (x^+, x^-, t) > 0, \\
 & (z_1, z_2, z_3) > 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

3.5 フィージブル内点法

等式制約をみたし非負制約を強くみたす点が得られているとする。この点における Newton 方向は次の方程式の解で与えられる。

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} A & -A & O \\ E & -E & O \\ D & -D & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^+ \\ \Delta x^- \\ \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} A^T & E^T & D^T \\ -A^T & -E^T & -D^T \\ O & O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & Z_1 \Delta x^+ + X^+ \Delta z_1 = \gamma \mu e - X^+ z_1 \\
 & Z_2 \Delta x^- + X^- \Delta z_2 = \gamma \mu e - X^- z_2 \\
 & Z_3 \Delta t + T \Delta z_3 = \gamma \mu e - T z_3
 \end{aligned} \tag{18}$$

ただし $\mu = \frac{(x^+)^T z_1 + (x^-)^T z_2 + t^T z_3}{2n+s}$ と $\gamma \in [0, 1]$ とする。終わりの 3 行の大文字は対応する小文字のベクトルを対角要素に持つ対角行列。

3.5.1 アルゴリズム

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &:= \begin{pmatrix} A & -A & O \\ E & -E & O \\ D & -D & -I \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} := \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \tilde{x} &:= \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ t \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ t_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{s} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{19}$$

と表記する。

$$w := (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) \tag{20}$$

と表記する。

実行可能内点を

$$\mathcal{F}^0 := \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) : \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \tilde{A}^T \tilde{y} + \tilde{s} = \tilde{c}, (\tilde{x}, \tilde{s}) > 0 \right\} \tag{21}$$

と表す。 $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$ と仮定する。

近傍を

$$\mathcal{N} := \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) \in \mathcal{F}^0 : \|\tilde{X}\tilde{s} - \mu e\|_2 \leq 0.4\mu \right\} \tag{22}$$

と表す。

step1: パラメータ $\gamma := 1 - \frac{0.4}{\sqrt{2n+s}}$ とする。初期点 $w^0 \in \mathcal{N}$ が与えられている。

step2: 終了条件 $(x^+)^T z^1 + (x^-)^T z^2 + t^T z^3 \leq \varepsilon$ をみたせば終了する.

step3: Newton 方向 Δw を計算する.

step4: $w^{k+1} := w^k + \Delta w$ と更新する.

step5: $k := k + 1$ として, step2 に戻る.

3.5.2 解析

定理 4 $\mathcal{O}\left(\sqrt{\max(n, s)} \log \left(\frac{(x^+)^T z^1 + (x^-)^T z^2 + t^T z^3}{\varepsilon}\right)\right)$ 反復で終了する.

(証明) k 反復目を考える. 等式制約は次の関係より成り立つ.

$$\tilde{A}\tilde{x}^{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}^k = \tilde{b}, \quad (23)$$

$$\tilde{A}^T \tilde{y}^{k+1} + \tilde{s}^{k+1} = \tilde{A}^T \tilde{y}^k + \tilde{s}^k = \tilde{c}. \quad (24)$$

最適性の基準として使う双対ギャップについて, $\Delta \tilde{x}^k \Delta \tilde{s}^k = 0$ に注意すると, 次の評価を得る.

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{k+1^T} \tilde{s}^{k+1} &= (\tilde{x}^k + \Delta \tilde{x}^k)^T (\tilde{s}^k + \Delta \tilde{s}^k) \\ &= \tilde{x}^{k^T} \tilde{s}^k + \tilde{x}^{k^T} \Delta \tilde{s}^k + \tilde{s}^{k^T} \Delta \tilde{x}^k + \Delta \tilde{x}^{k^T} \Delta \tilde{s}^k \\ &= \left(1 - \frac{0.4}{\sqrt{2n+s}}\right) (2n+s) \mu^k. \end{aligned} \quad (25)$$

次の不等式が成り立つことよりアルゴリズムで得られる次の点も近傍に入る.

$$\begin{aligned} \|\tilde{X}^{k+1} \tilde{s}^{k+1} - \mu^{k+1}\|_2 &= \|(\tilde{X}^k + \Delta \tilde{X}^k) (\tilde{s}^k + \Delta \tilde{s}^k) - \mu^{k+1}\|_2 \\ &= \|\Delta \tilde{X}^k \Delta \tilde{s}^k\|_2 \\ &= \|D^{-1} \Delta \tilde{X}^k D \Delta \tilde{s}^k\|_2 \quad \text{ただし } D := \tilde{X}^{k^{1/2}} \tilde{S}^{k^{-1/2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \|D^{-1} \Delta \tilde{x}^k + D \Delta \tilde{s}^k\|_2^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left\| \left(\tilde{X}^k \tilde{S}^k \right)^{-1/2} \left(\gamma \mu^k e - \tilde{X}^k \tilde{s}^k \right) \right\|_2^2 \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\|\tilde{X}^k \tilde{s}^k - \gamma \mu^k e\|_2^2}{\min_i \tilde{x}_i^k \tilde{s}_i^k} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\left\| \left(\tilde{X}^k \tilde{s}^k - \mu^k e \right) + (1-\gamma) \mu^k e \right\|_2^2}{(1-0.4) \mu^k} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{0.4^2 + (1-\gamma)^2 (2n+s)}{1-0.4} \mu^k \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{240} \mu^k \\ &\leq 0.4 \mu^{k+1}. \end{aligned}$$

正值性もなりたつ.



得られた解から, $\text{cone}(\mathbf{P})$ の変数 x は,

$$x = x^+ - x^- \quad (26)$$

と得られる.

3.6 インフィージブル内点法

等式制約をみたすとはかぎらない内点から始める, 実装に近いアルゴリズムであるインフィージブル内点法を説明する. 現在の点における Newton 方向は次の方程式の解で与えられる.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A & -A & O \\ E & -E & O \\ D & -D & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^+ \\ \Delta x^- \\ \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & -A & O \\ E & -E & O \\ D & -D & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ t \end{pmatrix} =: r_p \\ & \begin{pmatrix} A^T & E^T & D^T \\ -A^T & -E^T & -D^T \\ O & O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^T & E^T & D^T \\ -A^T & -E^T & -D^T \\ O & O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} =: r_d \\ & Z_1 \Delta x^+ + X^+ \Delta z_1 = \gamma \mu e - X^+ z_1 \\ & Z_2 \Delta x^- + X^- \Delta z_2 = \gamma \mu e - X^- z_2 \\ & Z_3 \Delta t + T \Delta z_3 = \gamma \mu e - T z_3 \end{aligned} \quad (27)$$

ただし $\mu = \frac{(x^+)^T z_1 + (x^-)^T z_2 + t^T z_3}{2n + s}$ と $\gamma \in [0, 1]$ とする.

3.6.1 アルゴリズム

step1: パラメータ $\gamma \in [0, 1]$ とする. 初期内点 w^0 が与えられている.

step2: 終了条件 $(x^+)^T z^1 + (x^-)^T z^2 + t^T z^3 \leq \varepsilon, \|r_p\| \leq \varepsilon_1, \|r_d\| \leq \varepsilon_2$ をみたせば終了する.

step3: Newton 方向 Δw を計算する.

step4: $w^{k+1} := w^k + \alpha \Delta w$ と更新する.

step5: $k := k + 1$ として, step2 に戻る.

4 閉凸錐 $\mathcal{K}^*$ の場合

次の最適化問題を考える.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathcal{K}^* := \{u \in \Re^n : u = D^T \lambda_1 + E^T \lambda_2, \lambda_1 \geq 0, \lambda_1 \in \Re^s, \lambda_2 \in \Re^t\}. \end{aligned} \quad (\text{P2})$$

多面錐 $\mathcal{K}^*$ を具体的に記述すると, この問題は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x = D^T \lambda_1 + E^T \lambda_2 \\ & \lambda_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

自由変数 x , λ_2 を非負変数の差 $x^+ - x^-$, $\lambda_2^+ - \lambda_2^-$ で表すと,

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x^+ - c^T x^- \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A & -A & O & O & O \\ I & -I & -D^T & -E^T & E^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ \lambda_1 \\ \lambda_2^+ \\ \lambda_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \\ & (x^+, x^-, \lambda_1, \lambda_2^+, \lambda_2^-) \geq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

この問題は標準形の線形計画問題であるので, 双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y_1 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A^T & I \\ -A^T & -I \\ O & -D \\ O & -E \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \geq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

最適条件は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} A & -A & O & O & O \\ I & -I & -D^T & -E^T & E^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ \lambda_1 \\ \lambda_2^+ \\ \lambda_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A^T & I \\ -A^T & -I \\ O & -D \\ O & -E \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} x_i^+ z_{1i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ x_i^- z_{2i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \lambda_{1i} z_{3i} &= 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ \lambda_{2i}^+ z_{4i} &= 0, \quad i = 1, \dots, t, \\ \lambda_{2i}^- z_{5i} &= 0, \quad i = 1, \dots, t, \\ (x^+, x^-, \lambda_1, \lambda_2^+, \lambda_2^-) &\geq 0, \\ (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &\geq 0. \end{aligned}$$

パラメータ $\mu > 0$ の解析的センターは次の等式不等式系をみたす点である.

$$\begin{pmatrix} A & -A & O & O & O \\ I & -I & -D^T & -E^T & E^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ \lambda_1 \\ \lambda_2^+ \\ \lambda_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A^T & I \\ -A^T & -I \\ O & -D \\ O & -E \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} x_i^+ z_{1i} &= \mu, \quad i = 1, \dots, n, \\ x_i^- z_{2i} &= \mu, \quad i = 1, \dots, n, \\ \lambda_{1i} z_{3i} &= \mu, \quad i = 1, \dots, s, \\ \lambda_{2i}^+ z_{4i} &= \mu, \quad i = 1, \dots, t, \\ \lambda_{2i}^- z_{5i} &= \mu, \quad i = 1, \dots, t, \\ (x^+, x^-, \lambda_1, \lambda_2^+, \lambda_2^-) &> 0, \\ (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &> 0. \end{aligned}$$

4.1 フィージブル内点法

等式制約をみたし非負制約を強くみたす点が得られているとする。この点における Newton 方向は次の方程式の解で与えられる。

$$\begin{pmatrix} A & -A & O & O & O \\ I & -I & -D^T & -E^T & E^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^+ \\ \Delta x^- \\ \Delta \lambda_1 \\ \Delta \lambda_2^+ \\ \Delta \lambda_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A^T & I \\ -A^T & -I \\ O & -D \\ O & -E \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \\ \Delta z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 Z_1 \Delta x^+ + X^+ \Delta z_1 &= \gamma \mu e - X^+ z_1 \\
 Z_2 \Delta x^- + X^- \Delta z_2 &= \gamma \mu e - X^- z_2 \\
 Z_3 \Delta \lambda_1 + \Lambda_1 \Delta z_3 &= \gamma \mu e - \Lambda_1 z_3 \\
 Z_4 \Delta \lambda_2^+ + \Lambda_2^+ \Delta z_4 &= \gamma \mu e - \Lambda_2^+ z_4 \\
 Z_5 \Delta \lambda_2^- + \Lambda_2^- \Delta z_5 &= \gamma \mu e - \Lambda_2^- z_5
 \end{aligned}$$

ただし $\mu = \frac{(x^+)^T z_1 + (x^-)^T z_2 + \lambda_1^T z_3 + (\lambda_2^+)^T z_4 + (\lambda_2^-)^T z_5}{2n + s + 2t}$ と $\gamma \in [0, 1]$ とする。終わりの 5 行の大文字は対応する小文字のベクトルを対角要素に持つ対角行列。

錐 $\mathcal{K}$ と同様に $\mathcal{F}^0$ と $\mathcal{N}$ を定義する。

4.1.1 アルゴリズム

step1: パラメータ $\gamma := 1 - \frac{0.4}{\sqrt{2n + s + 2t}}$ とする。初期点 $w^0 \in \mathcal{N}$ が与えられている。

step2: 終了条件 $(x^+)^T z_1 + (x^-)^T z_2 + \lambda_1^T z_3 + (\lambda_2^+)^T z_4 + (\lambda_2^-)^T z_5 \leq \epsilon$ をみたせば終了する。

step3: Newton 方向 Δw を計算する。

step4: $w^{k+1} := w^k + \Delta w$ と更新する。

step5: $k := k + 1$ として, step2 に戻る。

4.2 インフィージブル内点法

現在の点における Newton 方向は次の方程式の解で与えられる.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} A & -A & O & O & O \\ I & -I & -D^T & -E^T & E^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^+ \\ \Delta x^- \\ \Delta \lambda_1 \\ \Delta \lambda_2^+ \\ \Delta \lambda_2^- \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & -A & O & O & O \\ I & -I & -D^T & -E^T & E^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ \lambda_1 \\ \lambda_2^+ \\ \lambda_2^- \end{pmatrix} =: r_p \\
 & \begin{pmatrix} A^T & I \\ -A^T & -I \\ O & -D \\ O & -E \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \\ \Delta z_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^T & I \\ -A^T & -I \\ O & -D \\ O & -E \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} =: r_d \\
 & Z_1 \Delta x^+ + X^+ \Delta z_1 = \gamma \mu e - X^+ z_1 \\
 & Z_2 \Delta x^- + X^- \Delta z_2 = \gamma \mu e - X^- z_2 \\
 & Z_3 \Delta \lambda_1 + \Lambda_1 \Delta z_3 = \gamma \mu e - \Lambda_1 z_3 \\
 & Z_4 \Delta \lambda_2^+ + \Lambda_2^+ \Delta z_4 = \gamma \mu e - \Lambda_2^+ z_4 \\
 & Z_5 \Delta \lambda_2^- + \Lambda_2^- \Delta z_5 = \gamma \mu e - \Lambda_2^- z_5
 \end{aligned} \tag{34}$$

ただし $\mu = \frac{(x^+)^T z_1 + (x^-)^T z_2 + \lambda_1^T z_3 + (\lambda_2^+)^T z_4 + (\lambda_2^-)^T z_5}{2n + s + 2t}$ と $\gamma \in [0, 1]$ とする.

4.2.1 アルゴリズム

step1: パラメータ $\gamma \in [0, 1]$ とする. 初期内点 w^0 が与えられている.

step2: 終了条件 $(x^+)^T z_1 + (x^-)^T z_2 + \lambda_1^T z_3 + (\lambda_2^+)^T z_4 + (\lambda_2^-)^T z_5 \leq \varepsilon, \|r_p\| \leq \varepsilon_1, \|r_d\| \leq \varepsilon_2$ をみたせば終了する.

step3: Newton 方向 Δw を計算する.

step4: $w^{k+1} := w^k + \alpha \Delta w$ と更新する.

step5: $k := k + 1$ として, step2 に戻る.

5 結論と今後の課題

線形計画問題の双対性を使って, 多面錐上の線形計画問題の双対問題を導出した. また多面錐上の線形計画問題の弱双対定理と双対定理を証明した. また多面錐上の線形計画問題を解くアルゴリズムとして, 主双対内点法を適用できることを示した. 今後の課題は, 数値実験を行うことがある.

参考文献

- [1] D. P. Bertsekas, A. Nedoć and A. E. Ozdaglar, Convex Analysis and Optimization, Athena Scientific, 2003.
- [2] J. M. Borwein and A. S. Lewis, Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples (Second Edition), Springer, 2006.
- [3] S. Boyd and L. Vandenberghe, Convex Optimization, Cambridge University Press, 2004.
- [4] I. M. Glazman and J. I. Ljubić, Finite-Dimensional Linear Analysis: A Systematic Presentation in Problem Form, Dover Publications, Inc., 2006.
- [5] A. J. Goldman and A. W. Tucker, Polyhedral Convex Cones, in Linear Equalities and Related Systems, H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds., Princeton University Press, 19-40, 1956.
- [6] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博, 内点法, 朝倉書店, 2004.
- [7] 水野眞治, 学習用テキスト線形計画法 (2) 双対問題と双対定理, http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/, 2013
- [8] Z. Liu and Y. Fathi, An Active Index Algorithm for the Nearest Point Problem in a Polyhedral Cone, Comput. Optim. Appl., 49, 435-456, 2011.
- [9] D. G. Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. , 1973.
- [10] A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley&Sons, 1986.
- [11] S. J. Wright, Primal-Dual Interior-Point Method, SIAM Publications, 1997.