

一層単純な spine の見つけ方

神戸大教養 池田裕司

1. Introduction

3次元多様体の spine として fake surface という概念は可成りの良い性質を持っていると思われる。以後扱いたいのはある3次元多様体の spine としてある closed fake surface が与えられている時、(何らかの意味で) もっと簡単或いは単純な (spine になっている) closed fake surface を見つける事である。今迄の方向性から言えば、この問題はいつか考えなければならぬのであるから今考える事にする。ここでは、上の「単純」という意味を次の種特異点の個数の多少で測る事にする。

P を与えられた closed fake surface とする。この時、 h で $\tilde{U}(P)$ から $\mathbb{C}^2(P)$ の上への局所的な embedding (以前に作ったもの) を表わし、 h_M で、 $M(P)$ の要素 M 上への h の制限を表わす事にする。

定義 (1) $v(M) = h_M^{-1}(G_3(P))$ の点を M の頂点
 と言う。

(2) $M - v(M)$ の *connected component* の *closure*
 を M の辺と言う。

$M(P)$ の要素 M が P の最小の要素であると言うのは

$$\#v(M) \leq \#v(M'), \quad M' \in M(P)$$

が成り立つ事と言う。特に、最小要素が 2 次元円板の時は
 それを最小円板と言う事にする。

2. 最小要素及び最小円板について

ここで問題にするのは、最小要素(=最小円板の存在)その
 頂点の個数の上限である。

定理 1. P を *normal spine* であるとして、 $M \in P$ の最小
 要素とする。この時、 P が *acyclic* ならば

$$\#v(M) \leq 5$$

が成り立つ。

最小円板の存在については次の定理を得る。

定理 2. P を *acyclic closed fake surface* で $\#G_2(P)=1$
 とする。この時、 P には最小円板 D が存在して、

$$1 \leq \#v(D) \leq 5$$

が成り立つ。

3. もっと単純な spine を。

結果のみ記す と次のようになる。

定理3. V を acyclic な 3次元多様体として, P を V の normal spine とする。 P が最小円板 D を持つて $\#(D)$ が 1, 2, または3の時は, V は P より単純な spine (closed fake surface) を持つ。

この定理によると (他にいくつかの, 211 の事を使って) 問題は全て, 最小円板の頂点の個数が 4 及び 5 の時である事が導かれるのである。

4. J. Robertson の結果について

以前の結果と, 上に述べた事を使ってほんの少し計算すると, 1972 年に J. Robertson が Notices に発表している (但し, 証明は未発表(?)) 次の結果は大した苦勞なしに得られる。

定理4. V を acyclic な 3次元多様体とする。 V が $\Sigma(5,3)$ の中に spine を持つならば, V は 3-ball である。