

連続系における 2^n 分岐周期軌道と記号力学の関係

本池 巧 金野 秀敏[†] 有光 敏彦^{*}

湘北短期大学 電子情報 筑波大学 物質工[†] 筑波大学 物理^{*}

概要

連続系においてみられる周期軌道の自分自身との絡み合い方を記述するために導入した局所交差数と Holmes らが考案した記号力学による Horseshoe template 上の周期軌道の記述との関係について考察する。

1 連続系の周期軌道の絡み方

今回考察する系としては、以下のようなトーラス $R^2 \times S$ 上の力学系で、

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, \theta, \mu) \quad (1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, \theta, \mu) \quad (1b)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 \quad (1c)$$

さらに、 f_1, f_2 は次の 2 つの条件を満たすものとする。

条件 1.1: f_1, f_2 はともに θ に関して周期 1 の周期関数。

条件 1.2: f_1 は変数 y に関して単調関数。

このような系の代表としては、Duffing 方程式のような 2 階微分方程式で記述される系に周期的外力が加わったものなどが挙げられる。

このような系で観測される周期軌道は、 $R^2 \times S$ 上の絡み目と見なすことができる。次に、この絡み目を $x - \theta$ 平面に射影して表現することにする。一般にこのように射影した場合には射影された絡み目には交差点が発生するが、実際には交差点は図 1 で示される 2 種類しかない。

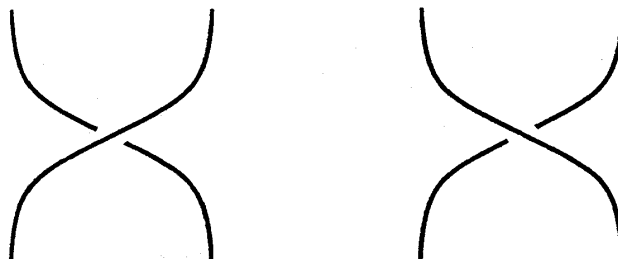


図 1: 交差点の種類

ところで、これから考える系では、条件 1.1 より交差点としては図 1 のうちのどちらか一方しか現れないことが簡単に示せる。このことは即ち、2次元平面に射影された軌道上の交差点の配置から本来の軌道のトポロジカルな情報をもれなく導き出すことが可能となる。

2 局所交差数

このような軌道の絡み合い方の中で今回は、特に 2nd分岐中に絡み合い方がどのように変化していくのかを見ていくことにする。実際に軌道がどのように絡み合うかを示す例として、損失変調レーザーモデル方程式 [5] の数値計算によって得られた周期軌道の結果を射影したものを図 2(a)-(d) を挙げる。

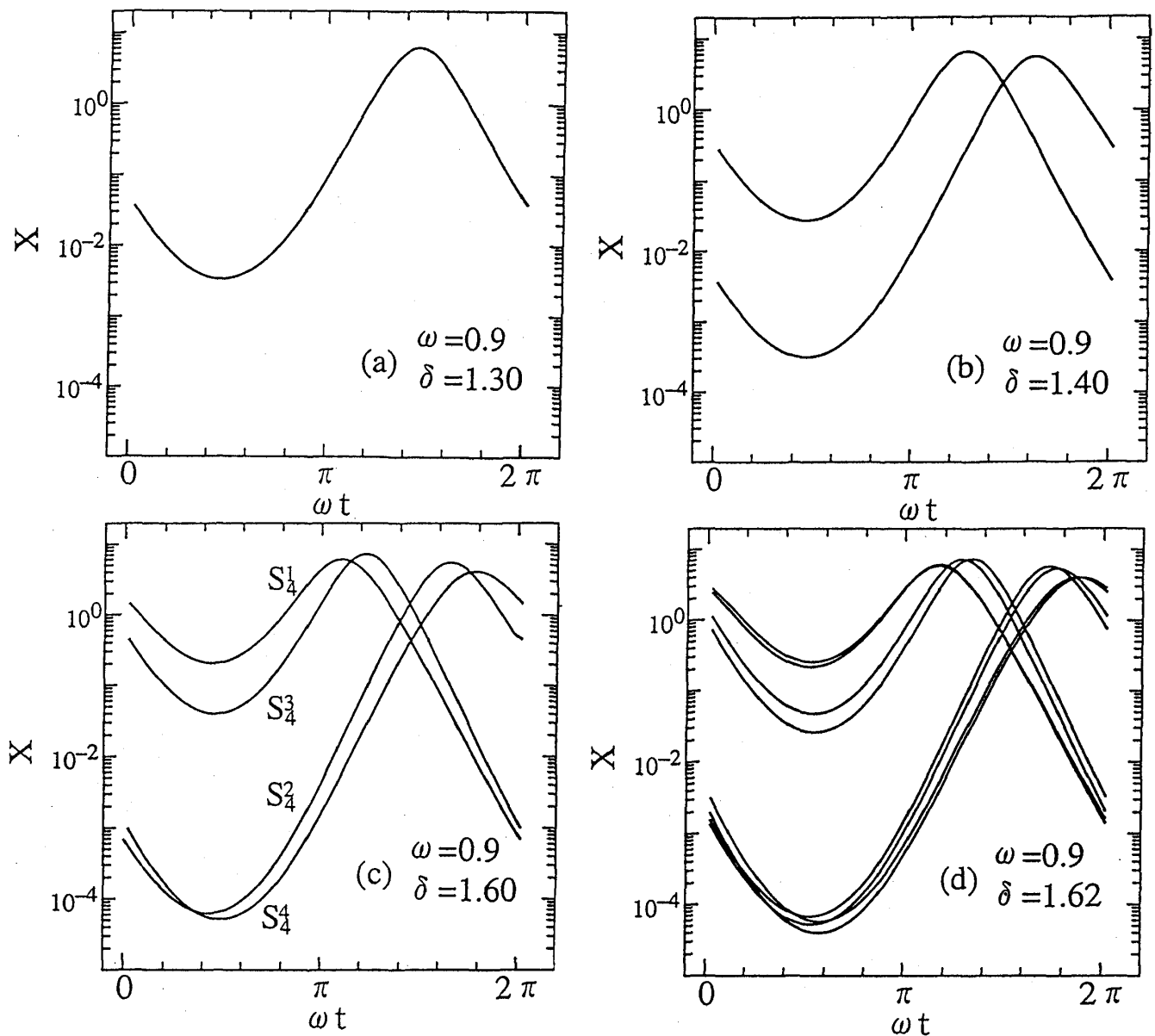


図 2: レーザーモデルでの周期軌道の交差例

この図を眺めると、 2^n 分岐中の周期軌道は自分自身と自己相似的に絡まりあうことがわかる。このような自己相似的な絡まり方を利用して軌道の構造をもっと分かりやすく示す量として、次のような局所交差数 C_n というものを定義する。

まず、 2^n 周期軌道を 2^n 本の1周期分の長さの部分軌道 $S_n^i (i = 1, \dots, 2^n)$ に分割する。こうして得られた、 2^n 本の部分軌道 $\{S_n^i\}$ に対して。

局所交差数 C_n を次のようにして定義する。

$$C_n = \sum_{i=1}^{2^n-1} [S_n^{2^{i-1}} \text{と} S_n^{2^i} \text{の交差数}] \quad (2)$$

周期軌道が周期倍分岐を繰り返すと、分岐するにしたがって現れる $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ 周期軌道に対応して局所交差数の列 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \dots$ を得る。

前の数値計算の結果からも分かるように一般に周期倍分岐中の 2^n 周期軌道には $2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$ 周期の軌道の構造が入れ子になって入っていて、各周期成分の構造は $\{C_n\}$ から知ることができるということが示せる。このことから、倍分岐中の周期軌道のトポロジカルな構造を知る方法として、射影軌道全体での交差点の配置から求めるのとは別に、局所交差数の列 $C_1, C_2, \dots, C_n$ から求める方法があることが分かる。

2.1 いくつかの系での結果

実際にいくつかの系について数値計算の結果を示すと表1のようになる。

表 1: いくつかの微分方程式での結果

MODEL	Primary Frq.	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
Laser model	1	1	3	5	11	21
	2	1	3	5	11	21
	3	1	3	5	11	?
Non-linear Mathieu Eq.	1	3	5	11	21	43
	2	3	7	13	27	53
Double-well Duffing Eq.	1	1	3	5	11	21
Single-well Duffing Eq.	1	5	9	19	37	75
	3	15	31	61	123	?

(1). Laser Model[4, 5].

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -u(\delta \cos \omega t - z) \\ \frac{dz}{dt} &= -\epsilon_1 z - u - \epsilon_2 z u + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= 0.09 \\ \epsilon_2 &= 0.003 \\ \omega &= 0.9^{1,2}, 2.4^3 \\ \delta &= 0.5 \sim 1.625^1, 1.33 \sim 2.045^2, 1.30 \sim 1.3281^3\end{aligned}$$

(2). Non Linear Mathieu Equation[6, 7].

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \kappa \dot{x} &= -x(1 + \delta \cos \omega t) - x^3 \\ \kappa &= 0.1^1, 0.2^2 \\ \omega &= 2.0 \\ \delta &= 0.550 \sim 0.593^1, 0.327 \sim 0.335^2\end{aligned}$$

(3). Double-well Duffing Equation[8].

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \kappa \dot{x} &= x - x^3 + \delta \cos \omega t \\ \kappa &= 0.09 \\ \omega &= 1.2 \\ \delta &= 0.195 \sim 0.1982\end{aligned}$$

(4). Single-well Duffing Equation[3, 9].

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \kappa \dot{x} &= -x^3 + \delta \cos \omega t \\ \kappa &= 0.2^1, 0.05^2 \\ \omega &= 1.0 \\ \delta &= 5.70 \sim 6.49^1, 5.8 \sim 6.535^2\end{aligned}$$

※計算したパラメータの方の上の数字は一つの方程式について複数の倍周期分岐がある場合の元の周期軌道の周期を示している

2.2 局所交差数の漸化式

以上の、数値計算の結果をみるとなんらかの規則性が有るように思われる。さらに表1の結果を詳しく調べてみると、この局所交差数 C_n について以下のような漸化式がなりたつ

ことがわかる。

$$C_{n+2} = C_{n+1} + 2C_n \quad (3)$$

さらにこの2階差分方程式を解くと

$$C_n = \frac{1}{3} \left\{ \left[2^{n-1} - 2(-1)^{n-2} \right] C_1 + \left[2^{n-1} + (-1)^{n-2} \right] C_2 \right\} \quad (4)$$

$$(n \leq 3)$$

この関係式は、力学系の詳細に依らず普遍的に成り立つもので、周期倍分岐現象に固有の性質と思われる。そして、この関係式より、周期倍分岐中の周期軌道のトポロジカルな構造は第1,2分岐での局所交差数さえ求まれば、その後の構造は全て自動的に決定できることになる(2PSNB, 3PSNB .. などの場合は分岐を起こす前の軌道の絡み方の情報も必要になる場合がある)。

ある周期倍分岐現象に付随して得られる局所交差数の列 $\{C_n\}$ は力学系の flow に関してなんらかの同値関係を提供すると思われるので。逆にこの量から、周期倍分岐を起こしている力学系を幾つかの同値類に分類し、それぞれのタイプについての一般論を議論できるのではないと思われる。その一つの試みとして、Holmes らの考えた Template が挙げられると思われる。

3 Horseshoe template

Holmes[1, 2] たちは以上述べてきたような、3次元多様体上で絡みあった軌道を解析するために、2次元写像である馬蹄形写像を3次元に拡張した。このような、3次元多様体上の

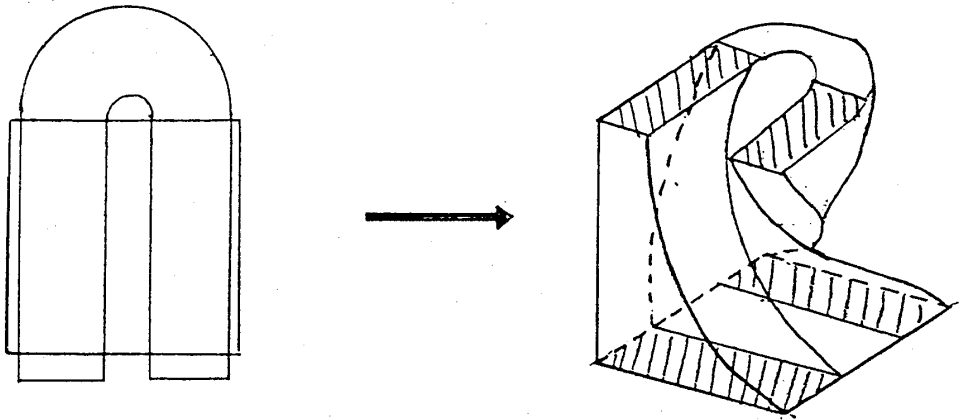
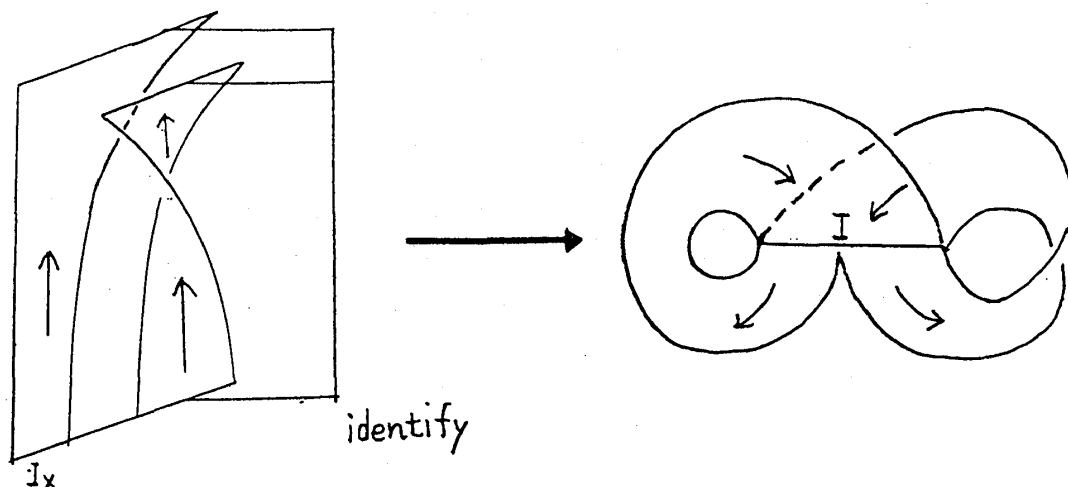


図 3: suspension of Smale's horseshoe map

流れ ϕ_t を次の同値関係 $\sim: z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \phi_t(z_1) \rightarrow \phi_t(z_2); (t \rightarrow \infty)$ 使って分岐している2次元多様体 K 上の流れ ϕ_t に縮約する。この多様体 K を horseshoe template と呼ぶ。馬蹄形写像は x 軸方向に縮小を続けるので同じ y を持つ点は上の関係では同値と見なされるので、多様体 K は結局 x 軸方向に潰されたものになる。

図 4: horseshoe template K とその上の流れ $\bar{\phi}_t$

この様に縮約した多様体 K 上の flow $\bar{\phi}_t$ の周期軌道は元の多様体上の流れ ϕ_t の周期軌道と同相であるという性質を持っている。そして、彼等は K の分岐線 I に関する return map をつくりその写像 f について 1 次元写像に関する記号力学の理論から、return map に対する一次元写像から得られる $\{x, y\}$ 2 文字からなる非周期ブロック w を周期的に繰り返す無限の文字列に対して 2 次元多様体 K 上の流れ $\bar{\phi}_t$ の周期軌道が 1 つ対応することが分る。結局一次元写像から得られる周期文字列の各分岐での変化の仕方から K 上の軌道がその分岐で絡み方をどのように変化させるかが導き出せるわけである。

4 一次元写像の記号力学

ロジスティック写像のように単峰で負の Schwartz 微分をもつ一次元区間写像

$$f_\mu : I \rightarrow I, \quad \text{極大点 } c$$

上の記号力学を考える。

$z \in I$ に対して文字 $\{x, y\}$ よりなる半無限の文字列を次のようにして定義する。

$\Psi(z) \in \{x, y\}^{\mathbb{Z}^+}$ を半無限の文字列として、 j 番目の文字は次の法則で決める。

$$\Psi_j = \begin{cases} x & f_\mu^j(z) < c \\ c & f_\mu^j(z) = c \\ y & f_\mu^j(z) > c \end{cases} \quad (5)$$

つぎに、 $z \in I$ に対して $\{+1, 0, -1\}$ からなる半無限列 invariant coordinate $\theta(z) = \{\theta_k\}_{k=0}^\infty$ を

$$\theta_k(z) = \prod_{j=0}^k \epsilon(\Psi_j(z)). \quad (6)$$

ここで、

$$\epsilon(\Psi_j) = \begin{cases} +1 & \Psi_j = x \\ 0 & \Psi_j = c \\ -1 & \Psi_j = y \end{cases} \quad (7)$$

によって定める。例として列 $\overline{xyyy} = |xyyy|xyyy|xyyy|\dots$ に対する invariant coordinate は $|+-+---+-+|+-+---+-+|+-+---+-+|\dots$ となる。

この kneading invariant に $+1 > 0 > -1$ で invariant coordinate に辞書式の順序をつけると、

$z_1, z_2 \in I, z_1 < z_2$ ならば $\theta(z_1) \geq \theta(z_2)$ がなりたつ。

さらに、 2^n 分岐などを解析する際に、critical point の軌道が重要な役割を果たす、kneading invariant $\nu(\mu)$ を

$$\nu(\mu) = \lim_{z \rightarrow c-0} \theta(z) \quad (8)$$

定義する、これはつぎの $|\cdot|$ の意味で最小となる

$$\forall z \in I, |\theta(z)| \leq \nu(\mu)$$

ただし $|\theta| = \theta_0 \cdot \theta$, 今後は簡単のために ± 1 を省略して $\pm$ と書くことにする。

最後に、任意の列 β でシフト演算 σ に対して

$$|\sigma^n(\beta)| \geq \beta, \quad \forall n \geq 0 \quad (9)$$

となるものを、admissible kneading invariant とよぶ。このような kneading invariant を実現するパラメータ μ が必ず存在するといういみで admissible と呼ぶわけである。

次に、分岐現象をあつかうために周期 k の admissible kneading invariant ν と admissible kneading invariant α に対して $*$ 演算を次のように定義する。

$$\nu * \alpha = \{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad (10)$$

$$\tau_{lk+i} = \alpha_i \nu_i; 0 \leq i < k. \quad (11)$$

詳しい説明は省略するが、周期倍分岐中で得られる kneading invariant ν に対し次に分岐したときに得られる kneading invariant は ν と $\overline{+-}$ の $*$ 演算によりつくられる admissible invariant であることが分っている。つまり、周期倍分岐での admissible invariant は

$$\begin{array}{ccccccc} k \times 2^1 \text{ 周期} & k \times 2^2 \text{ 周期} & k \times 2^3 \text{ 周期} & k \times 2^4 \text{ 周期} & \dots \\ \nu * \overline{+-} & \nu * \overline{+-} * \overline{+-} & \nu * \overline{+-} * \overline{+-} * \overline{+-} & \nu * \overline{+-} * \overline{+-} * \overline{+-} * \overline{+-} & \nu * \overline{+-} * \overline{+-} * \dots \end{array}$$

と変化していくことになる

4.1 f_μ の周期倍分岐

以上の結果から、周期倍分岐中での admissible kneading invariant に対して次の関係がなりたつ

$\nu_k = \nu'_k * \overline{+-}$ を周期 $2k$ の admissible kneading invariant とし、 μ_k をはじめて $\nu(\mu) = \nu_k$ となるパラメータの値とする。そして、 ν_k に対する $\{\Psi_j(c)\}_{j=0}^{\infty}$ の最初の $2k$ 個の要素中に n_k 個の y を含むとする。 μ が増加すると $\nu(\mu)$ はつぎの admissible kneading invariant $\nu_k * \overline{+-}$

をとる (このときの μ の値を μ'_k とする)。この二つの kneading invariant に対応してそれぞれ長さ $k, 2k$ の周期的ブロック w_k, w_{2k} をもった軌道 γ_k, γ_{2k} が存在する。 y_k, y_{k+1} を w_k, w_{2k} 中の y の数とすると、

$$y_{k+1} = 2y_k + (-1)^{n_k} \quad (12)$$

$$n_{k+1} = 2n_k + \frac{(1 - (-1)^{n_k})}{2} \quad (13)$$

または

$$y_{k+1} = 2y_k + (-1)^{n_0+k} \quad (14)$$

$$n_{k+1} = 2n_k + \frac{(1 - (-1)^{n_0+k})}{2} \quad (15)$$

がなりたつ、また明らかなことであるが、パラメータ μ_k と μ'_k の間の値で周期軌道は周期倍分岐を起こしている。

5 局所交差数と記号力学の結果

記号力学から得られる周期的な word 中の y は template のひねりのある方を通る軌道を示す。軌道が分岐するとそれに対応する word 中の y の数だけひねりが加わるので、これから y_n と C_n は

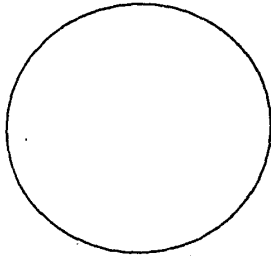
$$C_n = y_{n-1} (n \geq 0), C_0 = 0$$

という関係を持つことが分かる。さらに C_n の漸化式は y_n の漸化式から導き出せ、式 (14) を変形すると式 (3) になる。これからわかるように、局所交差数のダイナミクスは horseshoe template 上のリターンマップに対する記号力学を使って説明することができるわけである。

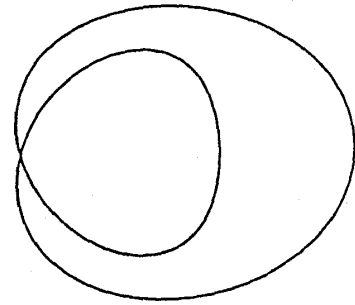
ここで、問題となるのは記号力学の結果はあくまで、分岐線 I に対する軌道の交差の仕方を記述するのみで、軌道全体の構造を記述しているわけではない。軌道全体の構造はその際に考えている horseshoe template の構造に大いに依存する。つまりある word に対応する周期軌道の自己絡み数、交差数 (全体) を求めるのには horseshoe template の構造が重要になってくる。

そこで実際に、double-well duffing 方程式の 1-PSNB の局所交差数列の結果から、軌道の絡まり方を求めると図 5 になる

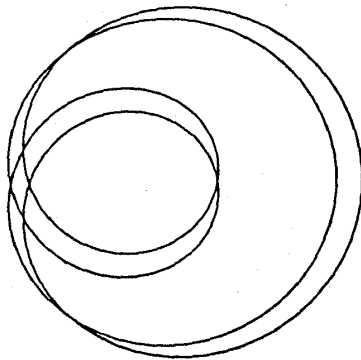
1-Periodic



2-Periodic



4-Periodic



8-Periodic

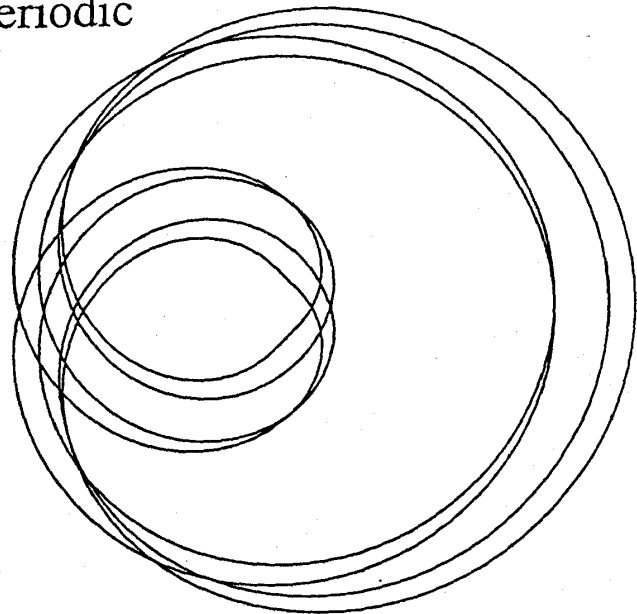


図 5: double-well duffing 方程式の軌道の絡み方

この絡み方をつくるためには、horseshoe template としては holmes らが最初に考えたものではだめで図 6 で示されるものを考えなければならないことが分かる。

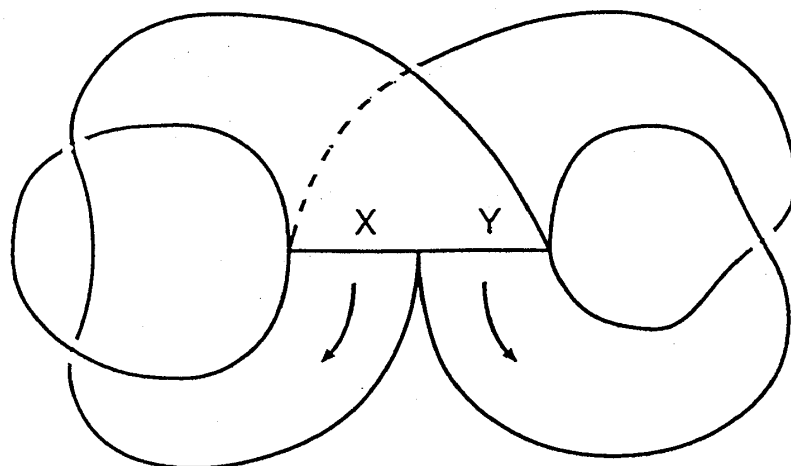


図 6: double-well duffing 方程式に対する horseshoe template

ここで重要なのは Holmes らが考えた y_n は実際の軌道の構造に関する情報は全く含んでいないが、我々の考えている局所交差数では生の軌道の構造をもれなく含んでいる点である。言葉を変えていえば局所交差数は記号力学の結果の real な系での表現になっている。

6 結論

周期倍分岐中の周期軌道の構造を解析するために、導入した局所交差数の周期倍分岐での変化の仕方は、Holmes らが同じ目的で導入した horseshoe template の分岐線 I 上のリターンマップに対する記号力学による取扱で説明できる。しかし、Holmes らの結果にはその基底となる horseshoe template の構造は含まれておらずそのため実際に軌道全体のトポロジカルな構造を決定することはできない。ところが、局所交差数はもともとの軌道の構造をきちんと捉えているので、実際に軌道の構造を解析するにはこの方法が非常に有用と思われる。また、逆に局所交差数の結果から horseshoe template を再構成することもできこうして得た template の構造から力学系を分類することも可能ではないかと思われる。

参考文献

- [1] P. Holmes, Physica 21D (1986) 7.
- [2] P. Holmes and R. F. Williams, Arch. Rat. Mech. and Anal. 90 (1985) 115.

- [3] H. Kawakami, IEEE Trans. Circuits and Systems **CAS-31** (1984) 248.
- [4] J. R. Tredicce, F. T. Arecchi, G. P. Puccioni, A. Poggi and W. Gadomski, Phys. Rev. A **34** (1986) 2073.
- [5] I. B. Schwartz, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1359.
- [6] Y. Ueda, H. Doumoto and Y. Suehiro, Report of IECE, NLP-24 (1978) [in Japanese].
- [7] H. Konno, J. Phys. Soc. Japan **59** (1990) 3989.
- [8] P. J. Holmes, Phil. Trans. Roy. Soc. **A292** (1979) 419.
- [9] Y. Ueda, *New Approach to Nonlinear Problems in Dynamics*, ed. P. J. Holmes, (SIAM, Philadelphia 1980) pp. 311–322.